Coleção UAB–UFSCar

Pedagogia

Mauro Carlos Romanatto
Cármen Lúcia Brancaglion Passos

A Matemática na formação de professores dos anos iniciais

um olhar para além da Aritmética

A Matemática na formação de professores dos anos iniciais

Um olhar para além da Aritmética

UAB-UFSCar
Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, km 235
13565-905 - São Carlos, SP, Brasil
Telefax (16) 3351-8420
www.uab.ufscar.br
uab@ufscar.br

EdUFSCar
Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, km 235
13565-905 - São Carlos, SP, Brasil
Telefax (16) 3351-8137
www.editora.ufscar.br
edufscar@ufscar.br

Mauro Carlos Romanatto
Cármen Lúcia Brancaglion Passos

A Matemática na formação de professores dos anos iniciais

Um olhar para além da Aritmética

São Carlos

EdUFSCar

2015

Concepção Pedagógica
Daniel Mill

Supervisão
Douglas Henrique Perez Pino

Revisão Linguística
Clarissa Galvão Bengtson
Daniel William Ferreira de Camargo
Kamilla Vinha Carlos
Paula Sayuri Yanagiwara
Rebeca Aparecida Mega

Diagramação
Izis Cavalcanti
Juan Toro
Vagner Serikawa

Capa e Projeto Gráfico
Luís Gustavo Sousa Sguissardi

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

R758m

Romanatto, Mauro Carlos.
A matemática na formação de professores dos anos iniciais : um olhar para além da aritmética / Mauro Carlos Romanatto, Cármen Lúcia Brancaglion Passos. -- São Carlos : EdUFSCar, 2011.
107 p. -- (Coleção UAB-UFSCar)

ISBN – 978-85-7600-274-1

1. Matemática - estudo e ensino (Ensino Fundamental). 2. Professores - formação. 3. Ensino de geometria e medidas. 4. Fração. 5. Tratamento da informação. I. Título

CDD – 372.7 (20ª)
CDU – 371:51

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

As unidades que contemplam este livro apresentam conteúdos essenciais aos estudos matemáticos para além da Aritmética propostos para a Educação Infantil e para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A primeira unidade refere-se ao estudo dos conceitos geométricos. A Geometria trata da relação do indivíduo com o espaço em que este vive. Nesse espaço, existem objetos e estes possuem as formas mais variadas. Assim, a partir da intuição espacial, os estudantes, por meio da observação, manipulação e comparação de objetos, procuram classificá-los a partir da elaboração de relações ou identificação de suas características específicas.

No entanto, a Geometria também é a construção do espaço intelectual em que, por meio de definições e propriedades dos objetos, elaboramos e validamos conjecturas. Nessa perspectiva, a Geometria, mais do que estudar somente objetos físicos ou abstratos, também possibilita o aperfeiçoamento do raciocínio por meio de intuições, imaginação, criatividade e da sensibilidade estética.

Ao relacionarmos a Aritmética com a Geometria, temos o conteúdo *Grandezas e Medidas*, em que as medições surgem como uma necessidade das pessoas em seu dia a dia e mostram de maneira significativa a utilidade prática dos conhecimentos matemáticos.

As *Frações* são estudadas como a primeira ampliação dos conjuntos numéricos. Assim, a noção de número natural e as operações fundamentais com eles são ampliadas e reconceituadas.

Nessa unidade, o estudo das frações permite estender as ideias de número e de medidas, assim como permite compreender as operações fundamentais com outro tipo de número, o que implica também em novas ideias sobre essas operações. Um ponto de destaque em relação aos números fracionários são as justificativas das técnicas operatórias relacionadas às operações fundamentais.

A quarta unidade trata do *Pensamento Estocástico*, discutindo aspectos que levam, a partir de uma amostra significativa de uma população, estudar fatos, eventos e fenômenos obtendo dados, informações e conhecimentos sobre eles. Os raciocínios estatístico, probabilístico e combinatório são discutidos na perspectiva de considerar o aleatório, o acaso, o inesperado e o não pensado como possibilidades que se apresentam tanto na ciência atual como nas mais diversas situações da vida, em oposição à forma determinística de predizer acontecimentos.

Por fim, uma unidade sobre a *Matemática na Educação Infantil* traz aspectos em relação ao aprendizado dessa ciência que podem se revelar como caminhos promissores para trabalhos diferenciados, na perspectiva de que os conhecimentos matemáticos contribuam efetivamente para o desenvolvimento intelectual das crianças nessa etapa da escolarização.

UNIDADE 1

Espaço e Forma: o desenvolvimento do pensamento geométrico

1.1 Primeiras palavras

Desde o início da escolarização, o conhecimento geométrico deve estar presente. Isso significa possibilitar à criança maior convívio com ideias e aspectos da Geometria relacionados com o seu dia a dia, favorecendo o processo de elaboração desse conhecimento. Paulatinamente, a criança, desde a Educação Infantil, vai conseguindo maior coordenação de suas atividades no espaço, podendo pegar um objeto que deixou cair, reiniciar uma atividade interrompida, antecipar o deslocamento de um objeto móvel oculto (por exemplo, quando um carrinho se desloca por detrás de uma cortina, a criança acompanha seu movimento e sabe onde o carrinho aparecerá) ou mesmo diferenciar os objetos que estão ao seu alcance daqueles que não estão.

Compreende-se que a construção do espaço e dos conceitos geométricos implica em um processo gradual de elaborações e reelaborações do sujeito.

Apenas a exposição oral e as explicações do professor não seriam suficientes para a aquisição do conhecimento geométrico. O senso comum pode levar o professor a imaginar que a visão dos objetos e a sua manipulação são recursos suficientes para que o estudante aprenda Geometria. Mas isso não é tão simples. Discutiremos essas questões ao longo desta unidade.

1.2 Problematizando o tema

> Melhor que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do 'espaço intelectual', já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, indo do que pode ser percebido para o que pode ser concebido.
>
> Wheeler. *Imagem e pensamento geométrico*.

A Geometria se constitui em um campo de conhecimento muito importante para a descrição e a inter-relação do homem com o espaço em que vive, podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto, fundamental na formação dos estudantes.

As experiências geométricas se apresentam de forma espontânea para crianças em atividades de exploração de objetos e do espaço físico em que se desenvolvem. As relações e as ideias geométricas são úteis em situações diárias, podendo ser relacionadas com outros tópicos da Matemática e com outras áreas do conhecimento. Entretanto, quando a criança ingressa na escola, comumente não lhe são oferecidas oportunidades para desenvolver ideias geométricas que aproveitem o potencial que ela traz consigo. Por que isso ocorre?

Entre os matemáticos e educadores em geral, muitas discussões têm sido feitas a respeito da forma com que o ensino da Geometria deveria ser introduzido às crianças. Existe certo consenso que este ensino deveria ter início logo que a criança ingressa na escola; há, entretanto, divergências em relação aos conteúdos e aos métodos de ensino. O que deve ser ensinado de Geometria na Educação Infantil? Que conteúdos precisam ser desenvolvidos nos anos iniciais?

Entre as razões para essas divergências estaria a multiplicidade de aspectos relativos ao seu conteúdo e sua inerente complexidade. Portanto, não é simples definir um único caminho, linear, hierárquico, desde os seus princípios elementares até as abstrações e formalizações.

1.3 Primeiras considerações sobre a Geometria

O conhecimento dos estudantes sobre Geometria nem sempre decorre da escola. Para os gregos da Antiguidade, Matemática traduzia-se pela Geometria. Na filosofia grega, defendia-se a crença milenar de que a Geometria era inerente à natureza e não parte do arcabouço que o indivíduo lançaria mão para descrevê-la. A Geometria situava-se no topo de todas as atividades intelectuais. Essa visão exerceu influência decisiva sobre a ciência e a filosofia ocidentais. Ao contrário, a filosofia oriental sempre sustentou que as noções de espaço e tempo são elaborações da mente e, dessa forma, a Geometria jamais atingiu, no Oriente, status semelhante ao da Grécia. Essa atitude filosófica advertia que nossas noções de Geometria não são propriedades absolutas e imutáveis da natureza, mas sim construções intelectuais.

Assim, a Geometria lida com relações entre objetos reais e objetos teóricos. Sua origem está em trabalhos práticos reais (resolução de problemas) e, ao mesmo tempo, em teorias abstratas.

Como já dito, a manipulação dos objetos por si só não é recurso suficiente para o aprendizado de Geometria. Podem ocorrer equívocos conceituais quando figuras geométricas são identificadas apenas com base em sua representação gráfica.

Estudos têm revelado esses equívocos conceituais por parte de professores quando os objetivos são definidos a partir apenas da percepção visual que eles têm das figuras. Um exemplo disso seria classificar um polígono não convexo, conforme o que aparece representado na Figura 1, com as mesmas propriedades do triângulo. A justificativa apresentada foi: “é um triângulo, uma figura com três lados porque tem três pontas”.

Figura 1 Polígono não convexo.

Esse exemplo de equívoco evidencia que o aspecto *figural* prevaleceu sobre o aspecto *conceitual* de polígonos. Esses termos são definidos por Fischibein (1993). O autor explica que o objeto geométrico é tratado como possuidor de duas componentes: uma conceitual e outra figural. A componente conceitual expressa propriedades que caracterizam certa classe de objetos por meio da linguagem escrita ou falada, com maior ou menor grau de formalismo, com que se está trabalhando. A componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito e que, no caso da Geometria, tem a característica de poder ser manipulada por meio de movimentos como translação, rotação e outros, mantendo invariáveis certas relações.

A simetria de *translação* é a transformação de uma figura deslocada paralelamente a uma reta. Todos os seus pontos são deslocados numa mesma direção e a uma mesma distância. A forma, as dimensões, as medidas de seus ângulos e a distância entre seus pontos permanecem as mesmas, como pode ser observado abaixo. A figura A foi transladada em dois movimentos, resultando nas figuras A’ e A”.

Notem que a figura A transladou para a direita, no mesmo sentido, quatro unidades (representadas pelos retângulos da malha), resultando na figura A’; e transladou para baixo no mesmo sentido, sete unidades (representadas pelos retângulos da malha), resultando na figura A”.

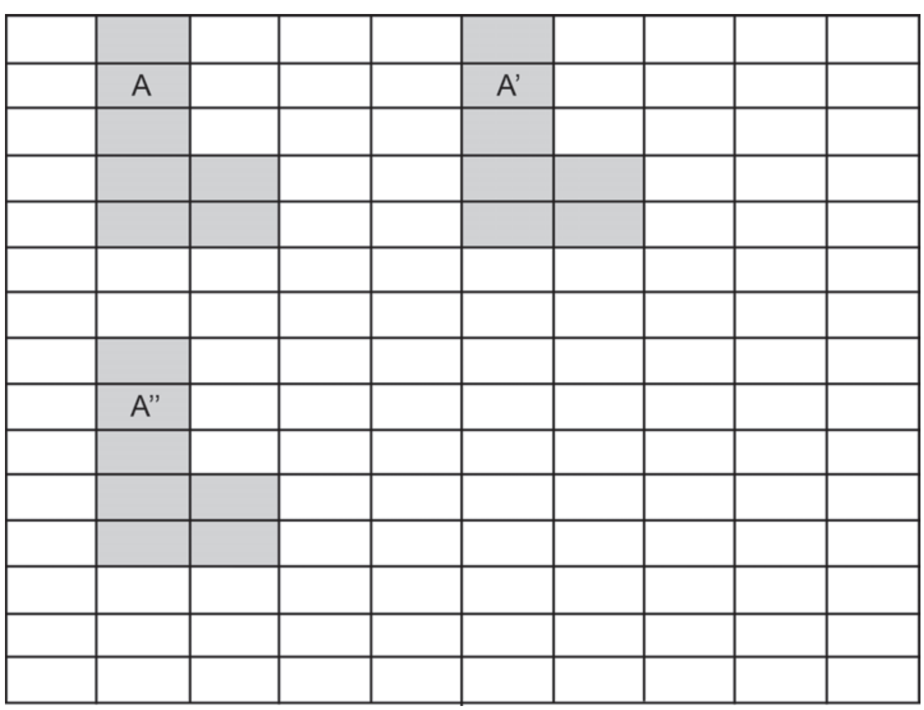


Figura 2 Exemplo de translação.

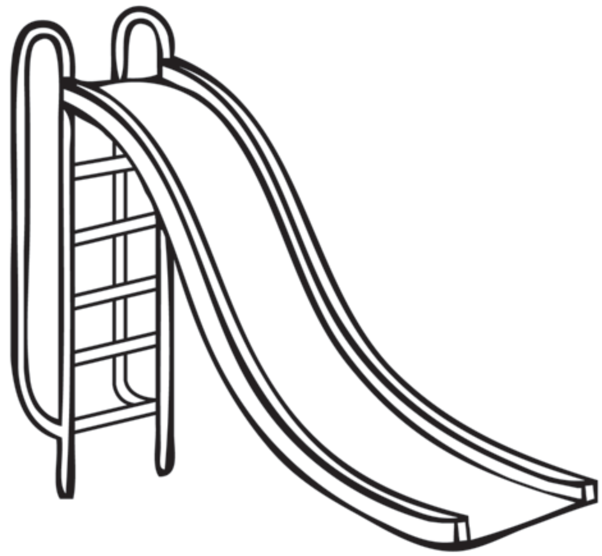


Figura 3 Escorregador.

Quando uma criança escorrega em um escorregador, está realizando um movimento de translação.

A simetria de *rotação* é a transformação de uma figura que obtemos girando cada um de seus pontos segundo um arco de circunferência ao redor de um ponto, percorrendo um determinado ângulo, no sentido horário ou anti-horário. Ao efetuarmos a rotação de uma figura em torno de um ponto, a imagem obtida é congruente à figura dada. A forma, as dimensões, as medidas de seus ângulos e a distância entre seus pontos permanecem as mesmas. Veja um exemplo:

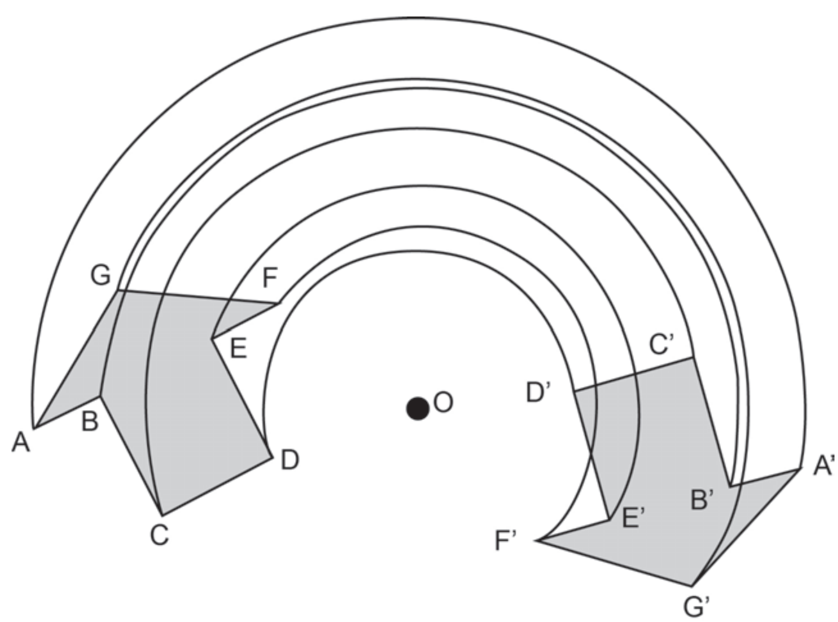


Figura 4 Simetria de rotação.

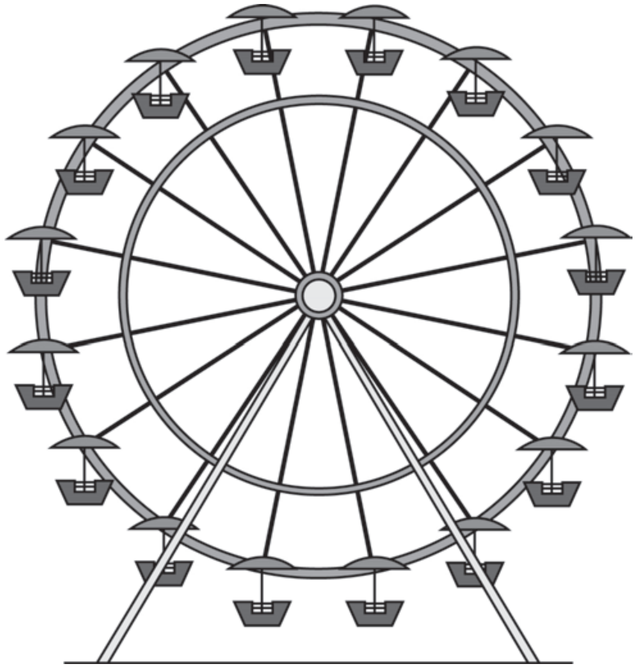


Figura 5 Roda gigante.

Em livros didáticos, algumas vezes, encontramos situações nas quais os triângulos são apresentados apenas na forma equilátera (com os três lados de mesma medida). Essa prática pode contribuir para que o professor venha a apresentar, equivocadamente, em sala de aula, uma única forma de representar o triângulo, dificultando o progresso dos estudantes. Em muitas situações didáticas, encontramos padrões de *representação* de uma figura geométrica como única maneira de *representar* graficamente a imagem de um objeto *geométrico*. Tal procedimento faz com que o conceito de uma figura geométrica, por exemplo, fique restrito apenas à posição que a figura ocupa no plano.

Um típico exemplo de figura-protótipo é o quadrado, que em muitos livros é apresentado sempre como uma figura com um dos lados paralelo à margem. Isso contribui para que ele não seja reconhecido também como um losango.

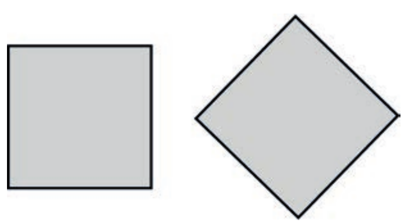


Figura 6 Quadrado em duas posições.

Esses exemplos são certamente triviais; entretanto, muitos outros – que podem causar conflitos como esses –, nos quais o conceito figural poderia ser usado e interpretado, poderiam ser usados sistematicamente na sala de aula a fim de discutir a predominância da definição sobre a figura desenhada.

A percepção espacial desempenha um papel fundamental no estudo da Geometria. Contribui para a aprendizagem de números e medidas, estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças entre objetos e quantidades e auxilia na identificação de regularidades ou não. O reconhecimento das formas geométricas quando representadas no plano, assim como as propriedades intrínsecas a elas, precisa ser efetivamente trabalhado na sala de aula desde os anos iniciais. Há vários níveis de compreensão da percepção espacial. Alguns são necessários e básicos para o dia a dia, outros são solicitados pelos diferentes níveis profissionais do indivíduo. Dessa forma, uma boa formação espacial pode melhorar a adaptação desse indivíduo ao mundo tridimensional, capacitando-o a compreender as diferentes formas e expressões de nossa cultura. Nesse sentido, a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, de pinturas, de desenhos, de esculturas, de artesanatos, etc., o estudante terá oportunidade de fazer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Os famosos quadros dos pintores Pieter Corneles Mondriaan e Giorgio Morandi são exemplos de que obras de arte podem fazer parte do cotidiano escolar.

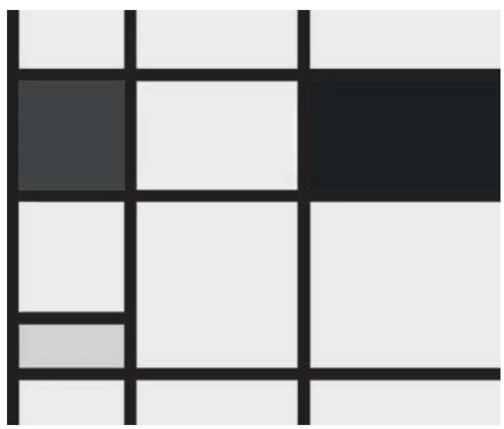


Figura 7 Mondriaan, “Composição com Amarelo, Preto, Azul, Vermelho e Cinza”, 1923.

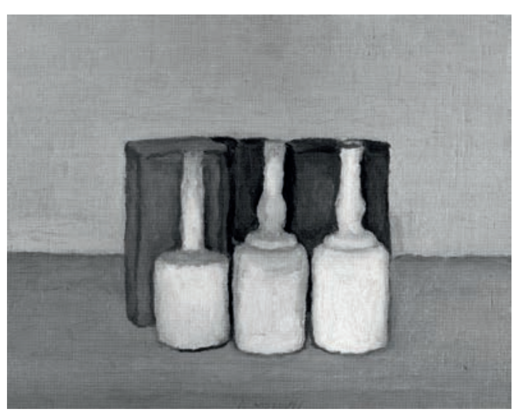


Figura 8 Morandi, “Natureza Morta”, 1943.

Os estudantes poderão ser incentivados a reconhecer no espaço da sala de aula figuras semelhantes às das obras de arte. Identificar nas obras objetos semelhantes aos sólidos geométricos que aparecem na obra de Morandi será um exercício bastante importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Os estudantes poderão ainda reproduzir as obras, criar outras e também escrever sobre elas. Uma atividade interessante será visitar exposições e museus com outro olhar.

Em Nacarato, Mengali & Passos (2009), uma atividade realizada com estudantes do quinto ano sobre a obra “Os retirantes”, de Cândido Portinari, resultou em uma interessante atividade interdisciplinar envolvendo, além dos conteúdos de artes, conteúdos de outras áreas do conhecimento, como: história (migração); geografia (localização de estados brasileiros e problemas sociais); língua portuguesa (leitura e interpretação de texto sobre a obra e a visita a museu, biografia do artista plástico); ciências (doenças causadas pela falta de higiene e pela fome); educação física (expressão corporal); e matemática (confecção em papel, do tamanho original da obra de arte; elaboração de situações-problema, dimensões da figura plana, perímetro).

A produção de textos a partir da interpretação que os estudantes fazem de obras de arte, comunicando sobre o que visualizam e o que sentem sobre elas, se constitui em um aspecto importante em sua formação e é uma prática que deve ser explorada pelos professores.

Situações do cotidiano podem ser levadas para a sala de aula na exploração de sólidos geométricos. Imagine o que comporia uma lista de cilindros pouco habituais. Geralmente, a imagem que fazemos do cilindro está ligada a objetos do cotidiano, como a forma e o tamanho de uma lata de refrigerante. As pessoas têm de fazer um esforço para pensar em casos extremos de cilindros quase planos, como, por exemplo, uma moeda, ou estreitos, como um pedaço rígido de espaguete.

Figura 9 Face de moeda.

Figura 10 Espaguete.

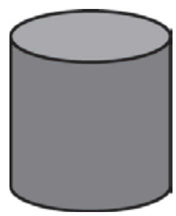


Figura 11 Cilindro.

Práticas em que essas experiências ocorrem possibilitam um exercício que tem muito mais consequências do que ampliar a nossa imagem de cilindro. É um dos primeiros exercícios para nos tornarmos conscientemente atentos à *independência* dos atributos que definem a forma; nesse caso, reconhecer que o diâmetro da base e a altura são distintos, e que podem ser manipulados independentemente.

Pense agora na definição de circunferência. O que lhe vem à mente quando falamos de circunferência?

Esta é habitualmente definida como lugar geométrico dos pontos (do plano) equidistantes de um dado ponto, mas raramente temos tendência para pensar muito sobre o que queremos dizer com distância. O que lhe vem à cabeça quando falamos de distância?

Goldenberg (2010) faz uma comparação entre essa definição e o que ele chama de a "geometria do motorista de táxi". Para o motorista, no quadriculado abaixo, o conjunto de pontos que estão a uma mesma distância de um dado ponto central O, por exemplo, forma um quadrado com uma diagonal horizontal.

Observa-se que, na Figura 12, cada um dos pontos dista do centro; para o motorista de táxi são três quarteirões. Como se trata de um percurso de táxi, o caminho não é direto e obedece aos quarteirões representados na malha quadriculada.

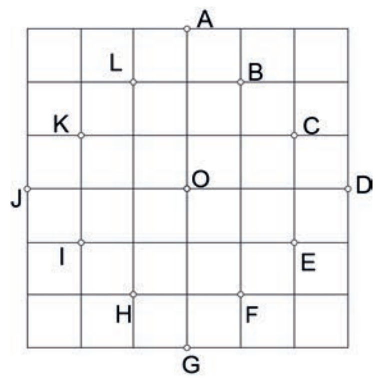


Figura 12 Geometria do motorista de táxi segundo Goldenberg (2010).

O lugar geométrico dos pontos (do plano) equidistantes de um dado ponto (centro) resulta numa figura geométrica denominada circunferência.

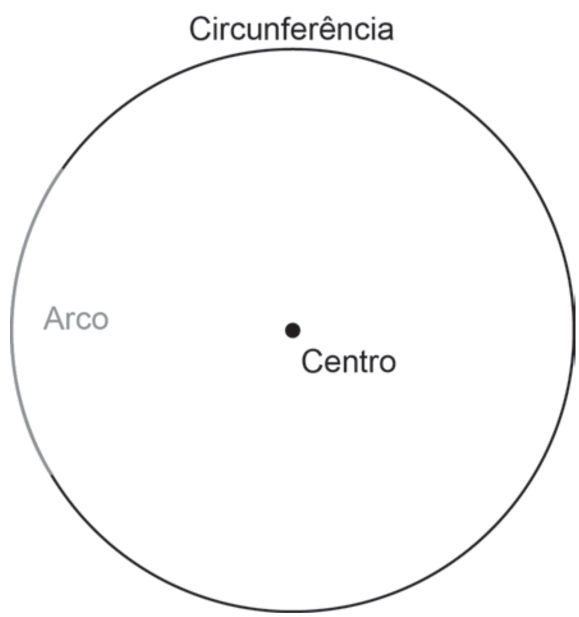


Figura 13 Circunferência indicando centro e arco.

Os elementos de uma circunferência são arco e corda. Qualquer curva entre dois pontos da circunferência é chamada de arco de uma circunferência. A corda é composta por segmentos que unem dois pontos do arco. Na figura a seguir, identificamos uma corda AB ou BA, e um arco AB (a nomeação de um arco é sempre no sentido anti-horário).

A maior corda de uma circunferência chama-se diâmetro.

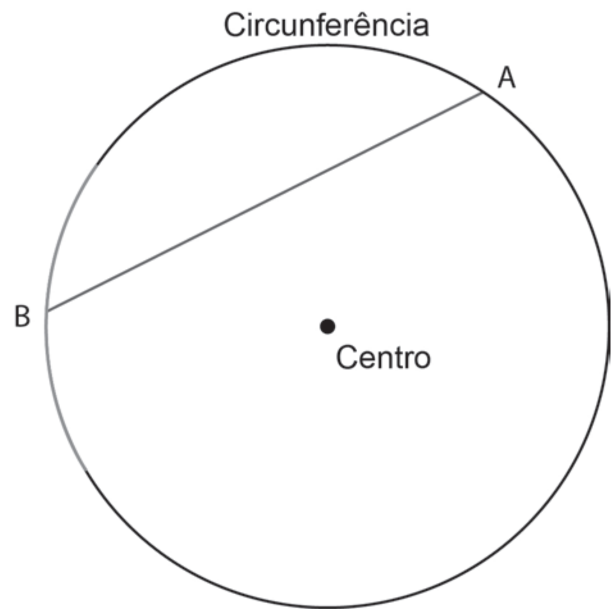


Figura 14 Circunferência indicando arco e corda.

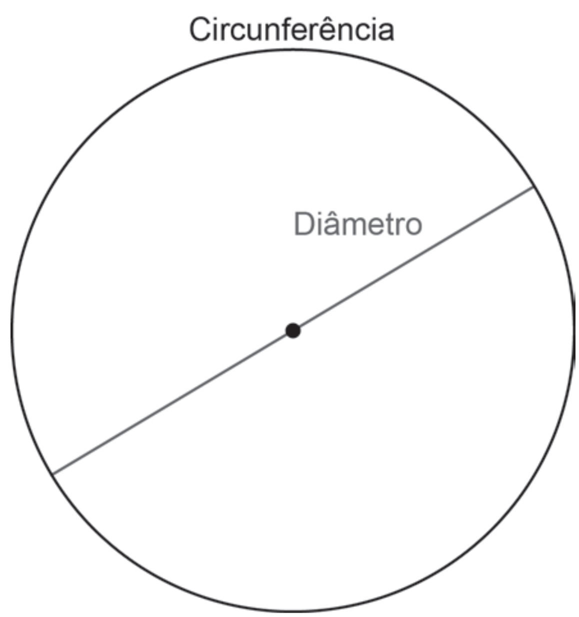


Figura 15 Circunferência indicando o diâmetro.

A metade do diâmetro chama-se raio. Cada um dos pontos que forma o arco está a uma mesma distância do centro.

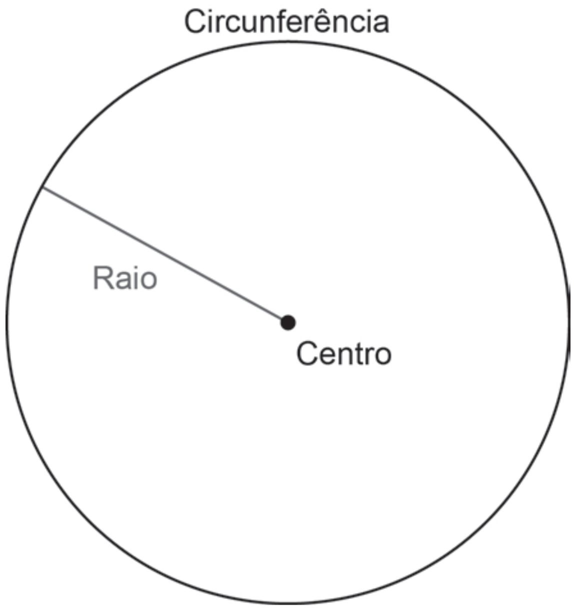


Figura 16 Circunferência indicando o raio.

A circunferência e a região limitada por ela é chamada de círculo.

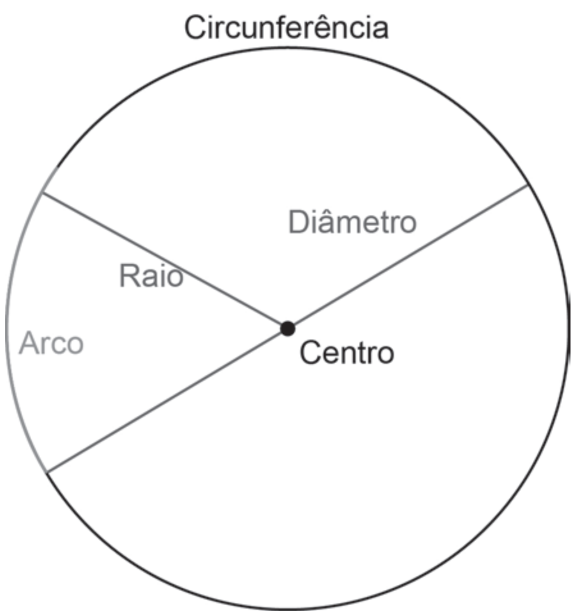


Figura 17 Circunferência e seus elementos.

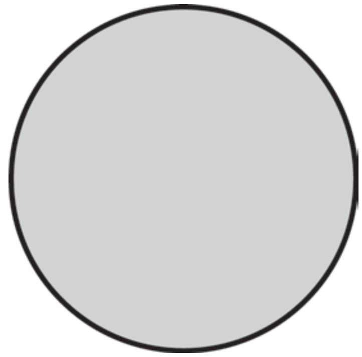


Figura 18 Círculo.

A nomenclatura específica da Geometria contribui muitas vezes para que muitos de seus aspectos não sejam considerados no momento de ensino ou até para que sejam negligenciados.

Para muitos professores, ainda não é clara a importância do ensino da Geometria ou até mesmo quais conteúdos devem ser selecionados para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. As dúvidas são apontadas também quanto à metodologia que deve ser utilizada e como os estudantes devem ser avaliados.

1.4 O ensino de Geometria nos anos iniciais

> A Geometria é o agarrar do espaço... esse espaço no qual a criança vive, respira e se movimenta. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, dominar, com vista a viver, respirar e movimentar-se melhor.
>
> Freudenthal. *Mathematics as an Educational Task*.

O estudo da Geometria ajuda os estudantes a representar e a dar significado ao mundo. Os modelos geométricos fornecem uma perspectiva a partir da qual os estudantes podem analisar e resolver problemas. As interpretações geométricas podem ajudá-los a compreender mais facilmente uma representação abstrata (simbólica). Os estudantes devem ter a oportunidade de visualizar e de trabalhar objetos tridimensionais a fim de desenvolver o domínio do espaço fundamental na vida cotidiana.

Na unidade sobre a Matemática na Educação Infantil, traremos algumas considerações e sugestões de como pode ser desenvolvido o trabalho com a Geometria. Discutiremos aqui a Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse nível de ensino, a Geometria deve centrar-se em atividades de manipulação, exploração, percepção, comparação, conexão, classificação, construção, transformação e relação com um grande número de experiências que levem à descoberta do espaço e da forma que a criança realizou anteriormente na Educação Infantil ou mesmo antes de ingressar na escola.

É importante que as crianças encontrem na escola o ambiente, a oportunidade e as condições para que ocorra a aquisição de noções e princípios geométricos. As atividades de exploração do espaço e das formas contribuem para a criatividade, imaginação e o desenvolvimento do sentido estético das crianças.

No processo de ensino e aprendizagem da Geometria, alguns aspectos podem ser contemplados, tais como experimentação, formulação de conjecturas, representação, relação, comunicação, argumentação e validação. Experimentar, ou seja, pôr à prova empiricamente, pode levar o estudante a construir ou adquirir noções, princípios e procedimentos matemáticos concretamente. Conjecturar significa juízo de opinião sem fundamento preciso, ou seja, por suposição ou por hipótese. A representação pode ser expressa por falas, gestos, desenhos, figuras geométricas, imagens mentais ou conceitos. Descobrir relações, padrões, regularidades, fazer analogias entre coisas diferentes e confrontar ideias é especialmente importante no processo de aprender Geometria. A comunicação, expressa por relações, com vocabulário e simbologia próprios, decorre da compreensão em Geometria. A partir dessa iniciação geométrica, o estudante conseguirá, na continuidade de sua escolarização, identificar relações; analisá-las significa que estará argumentando sobre o conteúdo, de modo a atingir, provavelmente no ensino médio, o momento da validação, ou seja, legitimar uma afirmação através de prova dedutiva.

A organização dos conteúdos ao longo dos anos iniciais pode ser pensada progressivamente, enfatizando o desenvolvimento do pensamento geométrico iniciado pela visualização, quando as crianças percebem o espaço como algo que existe ao redor delas.

O espaço no qual vivemos varia em natureza e em tamanho. No espaço ao alcance da criança pode-se explorar tarefas geométricas de montar, desmontar, compor e decompor, construir e desconstruir. No espaço, mais amplo, alcançado pelo olhar, em desenhos ou em fotos, podemos nos movimentar, nos orientar e nos localizar, ou seja, é um espaço maior, que não se pode manipular, mas sim representar em desenhos ou na construção de modelos, por exemplo. Considerando essas diferenças entre tais espaços e as possibilidades de exploração, inúmeras tarefas geométricas podem ser criadas.

Mas por onde começar?

No início da escolarização, digamos no primeiro ciclo (correspondente ao 1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental), deve-se sempre partir da manipulação de objetos de modo que as crianças possam se situar no espaço em relação às pessoas e aos objetos de diferentes naturezas. Essa manipulação vai permitir-lhes reconhecer o interior e o exterior de um domínio limitado por uma linha ou por uma superfície fechada. Brincar dentro e fora de caixas (embalagens grandes) ou ficar dentro ou fora de um bambolê colocado no chão, por exemplo, são atividades que as colocam nesse movimento de reconhecer o interior e o exterior. Seria interessante solicitar às crianças que fizessem uma coleção de objetos (trazidos de casa ou que a escola já possui) para poderem manipulá-los, enfileirá-los, entrar neles. Elas precisam experimentar recortar figuras e objetos que apareçam em revistas e reconhecer em que lugar se encontram no mundo real.

Assim, poderão estabelecer relações entre objetos segundo suas posições no espaço. As tarefas propostas deverão possibilitar às crianças a utilização do vocabulário próprio da relação que se estabelece com o espaço, como em cima, atrás, à frente, entre, dentro, fora, à esquerda, à direita, sobre, antes, depois.

A comparação de objetos poderá ser introduzida ao se manipular materiais moldáveis, transformando, cortando, fazendo e desfazendo construções com objetos como tubos, caixas, bolas e materiais de encaixe.

Na sequência, deverão ser propostas tarefas que levem ao reconhecimento de superfícies planas e não planas em objetos diversos e em objetos geométricos. A partir dessas experiências, as crianças poderão reconhecer e nomear, nos sólidos geométricos, alguns dos seus elementos, como suas faces. Por exemplo, ao desenhar o contorno de uma face de um cubo, será possível reconhecer que a figura plana que a define é um quadrado, e mais, que o cubo possui seis faces, todas iguais. Ao fazer o contorno das faces de um prisma reto de base retangular (que não seja cubo), também encontrarão seis faces, todas retângulos. E assim, desenhando o contorno de objetos que representam sólidos geométricos, encontrarão exemplos de triângulos, pentágonos, círculo, etc. Por exemplo, se tivermos uma pirâmide de base quadrada, como na Figura 19, podemos solicitar aos estudantes que analisem como são as faces desse sólido fazendo o contorno das faces, como mostra a Figura 20.

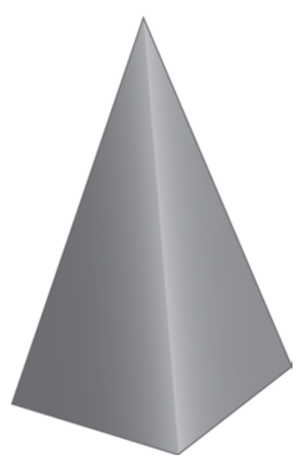


Figura 19 Pirâmide de base quadrada.

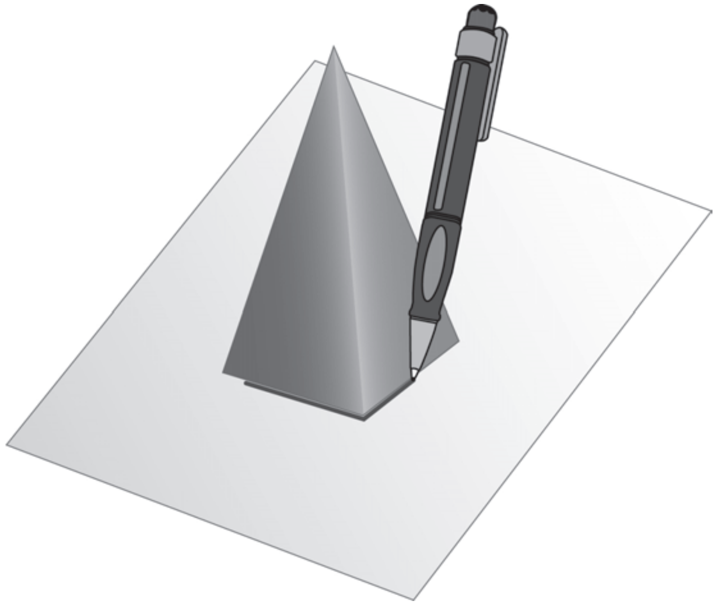


Figura 20 Imagem em que as faces do sólido estão sendo contornadas.

A partir do contorno do sólido, obtém-se o desenho de quatro polígonos.

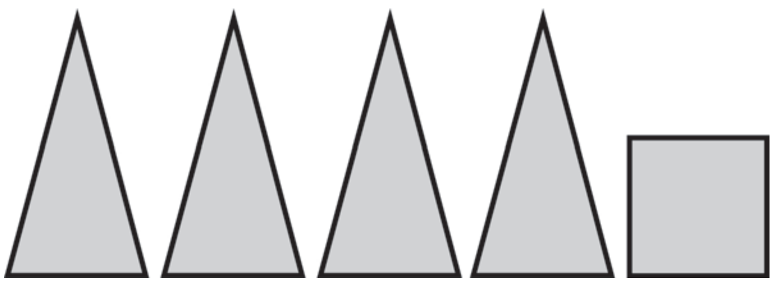


Figura 21 Faces desenhadas da pirâmide.

Outros materiais manipuláveis contribuirão para que sejam feitas composições com figuras geométricas, tais como recorte e colagem, dobragem, geoplano,[1] tangram e demais quebra-cabeças.

1 O geoplano é um material criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno. É constituído por uma placa de madeira marcada com uma malha quadriculada ou pontilhada. Em cada vértice dos quadrados formados fixa-se um prego (ou outro tipo de pino), onde se prenderão os elásticos usados para "desenhar" sobre o geoplano.

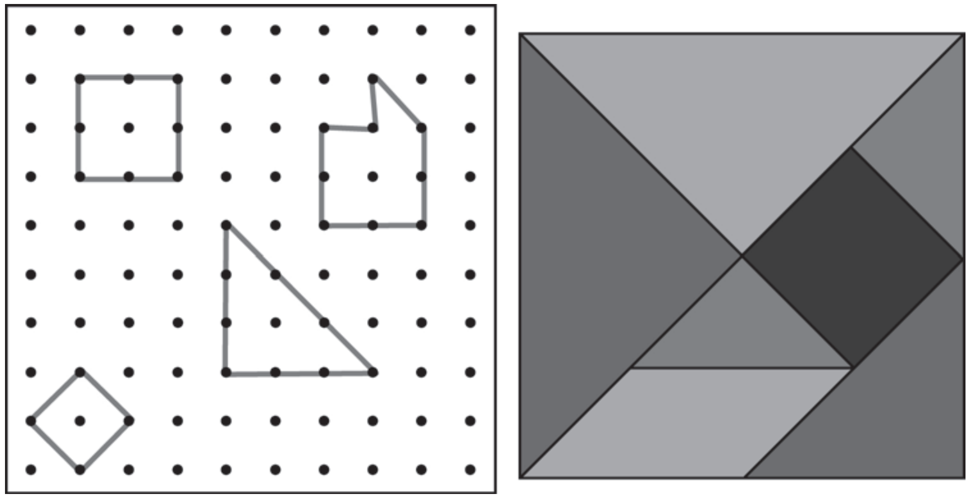


Figura 22 Geoplano e Tangram.

Permeando as atividades de manipulação, as crianças podem ser incentivadas a desenhar as figuras que compuseram usando papel quadriculado, desenhando livremente ou seguindo regras. Elas poderão ainda fazer a reprodução ou ampliação de figuras simples. Reconhecer figuras geométricas em diversas posições é outra noção geométrica importante nessa fase de escolarização. Veja, por exemplo, alguns objetos e tente reconhecê-los:

Figura 23 Foto de objetos vistos de perspectivas não habituais.

Discutir sobre os diferentes pontos de vista que um objeto pode ser observado e desenhado contribui para a ampliação do conhecimento e para despertar a curiosidade e criatividade dos estudantes. É importante também, para explorar simetrias, a utilização de espelhos e dobraduras em papel com pingos de tinta guache.

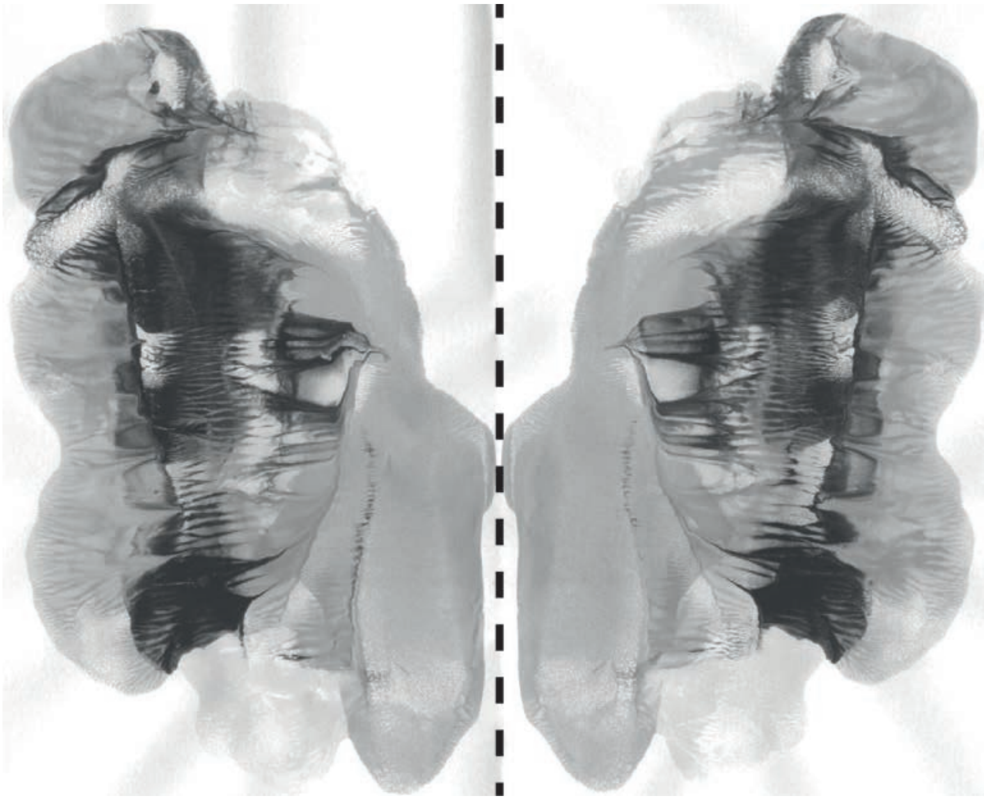


Figura 24 Simetria obtida com tinta e dobradura (a linha tracejada representa o eixo de simetria).

As dobraduras e recortes também contribuem para o reconhecimento de simetria em figuras. Experimente fazer um conjunto de bonecos de papel de mãos dadas. Esse primeiro contato com as noções geométricas é fundamental para que as crianças possam comparar sólidos geométricos e fazer classificações simples.

Segundo Rangel (1992, p. 103), "classificar é agrupar objetos de um dado universo, reunindo todos os que se parecem num determinado valor de um atributo, separando-os dos que se distinguem neste mesmo atributo". Rangel explica, com base na teoria de Piaget, que a classificação exige compreensão e extensão. A *compreensão* refere-se ao aspecto qualitativo da classe, o que faz com que alguns elementos pertençam a uma mesma classe e outros não; a *extensão* relaciona-se ao aspecto quantitativo da classe, isto é, os elementos agrupados são alguns dentre os muitos que estariam numa mesma classe. A classificação nos anos iniciais pode ter início com a criança agrupando objetos por sua função utilitária, depois por dados perceptivos, como cor, material, tamanho (são as coleções figurais); numa próxima fase, a criança organiza coleções não figurais, explicitando o critério utilizado para agrupar os elementos; por fim, ela consegue formar subgrupos dentro de um grupo, atingindo assim as inclusões hierárquicas ao fazer relações entre o todo e suas partes. A operação de classificação é fundamental para o desenvolvimento do pensamento conceitual. Em Matemática, a classificação é necessária para o desenvolvimento do pensamento lógico, favorecendo o estabelecimento de relações lógicas pelo estudante.

Num movimento de transformar e cortar objetos, as crianças experimentam novas formas, o que permitirá que reconheçam linhas curvas e linhas retas e comparem figuras geométricas planas, como quadrado, retângulo, triângulo e círculo. Isso pode ser potencializado a partir de composições com figuras geométricas, utilizando diferentes meios e instrumentos, como recorte e colagem, dobragem, geoplano, tangram e quebra-cabeça. Representar, no geoplano, figuras geométricas e desenhar essas figuras em papel quadriculado ou pontilhado possibilita, além do registro, a realização de outras tarefas, como, por exemplo, desenhar figuras simétricas a partir de um eixo de simetria.

Uma forma de ampliar a representação do espaço pode ser a partir de desenhos de plantas e mapas (da sala de aula, da escola, da rua, de percursos, etc.) sem, é claro, a exigência de rigor ou realismo.

Já para o segundo ciclo (4º e 5º anos), é possível ampliar essas noções para além da comparação com atividades que possibilitem a identificação de sólidos geométricos, como cubo, esfera, cilindro e paralelepípedo, diferenciando os sólidos geométricos que rolam (corpos redondos – cilindro, cone, esfera) dos que não rolam (prismas e pirâmides). Começando pela transformação de sólidos geométricos feitos em materiais moldáveis, os estudantes poderão construir um cubo por meio do recorte e colagem de quadrados geometricamente iguais. O uso de papel quadriculado auxiliará na identificação das diferentes planificações do cubo, uma importante atividade de exploração.

Deverão ser propostas tarefas para que os estudantes reconheçam, a partir da observação e manipulação de sólidos, retas paralelas e retas perpendiculares entre si, podendo representá-las por meio de dobras sucessivas de uma folha de papel e em papel quadriculado. Posteriormente, poderão ser introduzidos instrumentos de desenho como, por exemplo, régua e esquadro.

Para além da identificação de polígonos, será nesse momento que os estudantes terão condições de distinguir círculo de circunferência, como comentado anteriormente.

Godinho & Ruíz (2010) destacam que nos livros didáticos geralmente não há a diferenciação entre o objeto abstrato e a realidade concreta quando, por exemplo, pede-se para que se desenhe uma reta ou um triângulo. Parece óbvio que não se pode desenhar uma reta ou um triângulo como entidades abstratas; o que se desenha é um objeto perceptível que evoca, simboliza ou representa o objeto abstrato correspondente. A reta como entidade matemática é ilimitada e não tem espessura – o que não ocorre quando a desenhamos. Ao desenhar uma reta não é fácil aceitar, por exemplo, que entre dois pontos contidos nela existam infinitos pontos. Da mesma forma que um triângulo – enquanto entidade matemática – não é uma peça material de uma figura espacial, nem uma imagem desenhada no papel; geometricamente o triângulo é uma forma “controlada” por sua definição. Como mencionamos anteriormente, as figuras geométricas são criadas mediante definições e regras.

Superada a primeira fase de classificação das formas, de identificação das suas propriedades das classes de objetos e da criação de uma linguagem que permita sua descrição de maneira precisa, a atividade geométrica se ocupará de estruturar as entidades geométricas criadas. Como enfatizam Godinho & Ruíz (2010, p. 11), sairemos do “cômodo mundo das nossas percepções para entrar no mundo da linguagem, da gramática e da lógica” geométricas.

Além de desenhar figuras geométricas ou reconhecê-las em desenhos ou fotografias, será necessário compreender o que as define.

1.4.1 Observação, manipulação, comparação e classificação em Geometria

Vamos partir de um conjunto de objetos para definirmos o que entendemos para curva, superfície e sólidos a partir da secção dos mesmos (MIGUEL & MIORIM, 1986). Partindo da observação da secção resultante após o corte é que faremos a classificação dos objetos.

Imagine o conjunto composto dos seguintes objetos: pedaços de cartolina ou papel cartão, sólidos geométricos de madeira, sólidos geométricos construídos com cartolina, pedaços de barbante, espiral de caderno, mola, clipe para papel, pedra de sabão, canudos de refrigerante, rolinho suporte de papel toalha, uma batata, argola, moeda, embalagens diversas, latas de refrigerante, caixas, palitos, esfera de isopor, pedaços de arame, etc.

Figura 25 Foto de diversos objetos para classificação.

Tente classificar esses objetos em três grupos, tendo como critério o corte: 1) tudo que, ao ser cortado, a secção der a "ideia" de um ponto; 2) todos os objetos que, após o corte, a secção sugerir uma curva; 3) todos os objetos que, após o corte, a secção sugerir uma superfície. Temos aqui uma classificação a partir da secção.

Curvas

O primeiro conjunto, composto pelos objetos cuja secção sugere um ponto, será classificado como conjunto de *curvas*. Pertencerão a esse conjunto: pedaços de barbante, argola, espiral de caderno, clipe para papel, canudos, palitos, pedaços de arame e mola. Esses objetos poderão ser planos ou não planos, simples ou não simples (ou seja, ter intersecção ou cruzamento), fechados ou abertos (por exemplo, uma argola seria a representação de uma curva fechada e um clipe seria a representação de uma curva aberta). Cada uma dessas características vai determinar que tipo de curva eles representam. Denominamos de curva qualquer "caminho" contínuo, aberto ou fechado. "Caminho" reto também é uma curva; assim, a reta, a semirreta e o segmento de reta são exemplos de curvas. As curvas planas são aquelas em que todos seus pontos estão totalmente contidos em uma superfície plana. Um exemplo de representação de curva não plana é uma espiral de caderno. Chamamos de curvas simples aquelas que não têm intersecção. Nos desenhos seguintes, representaremos alguns tipos de curvas:

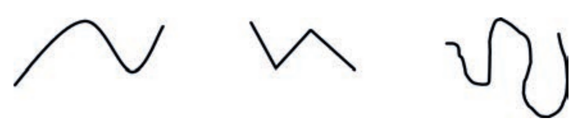


Figura 26 Representação de curvas planas, simples e abertas.

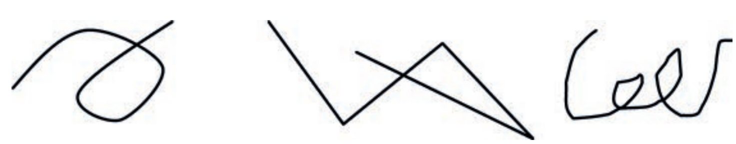


Figura 27 Representação de curvas planas, não simples e abertas.

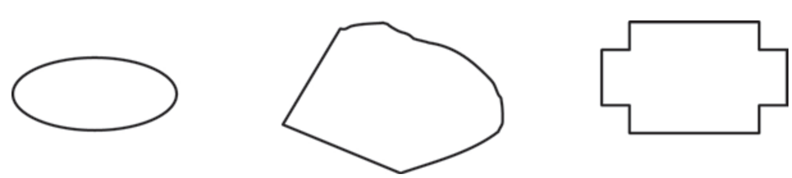


Figura 28 Representação de curvas planas, fechadas e simples.

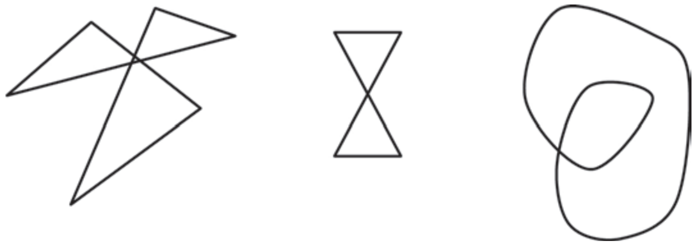


Figura 29 Representação de curvas planas, fechadas e não simples.

Figura 30 Foto de objetos que representam curvas não planas, abertas e simples (espiral de caderno e mola).

Superfície

O conjunto composto pelos objetos cuja secção sugere uma curva será classificado como conjunto de *superfícies*. Tem-se inclusos nesse conjunto: pedaços de cartolina, sólidos geométricos construídos com cartolina, rolinho suporte do papel higiênico, latas de refrigerante, caixas vazias e outras embalagens.

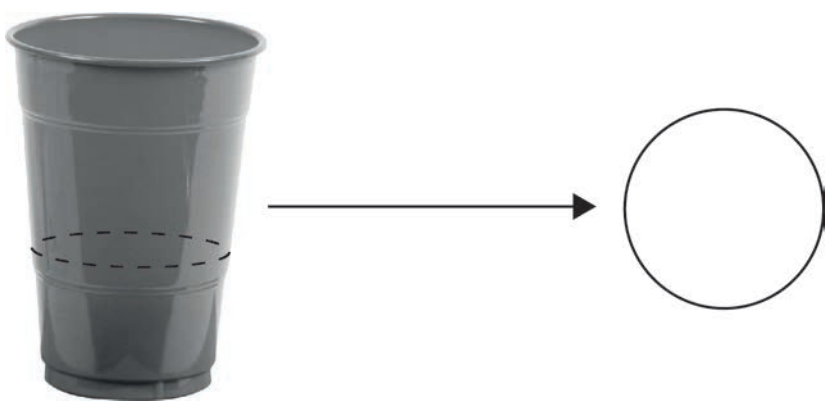


Figura 31 Representação da secção horizontal do rolinho de suporte de papel higiênico.

Se o corte foi feito verticalmente em relação à base circular, teremos como resultado da secção um segmento.

Entre essas superfícies podemos ter superfícies planas (pedaços de cartolina, por exemplo) e superfícies não planas (como o rolinho suporte de papel higiênico). Podemos ainda ter superfícies contínuas (as que não possuem buracos em seu interior) ou não contínuas. A classificação dessas superfícies será muito importante para o momento do estudo de polígonos.

Sólidos

O conjunto de objetos cuja secção sugere uma superfície será denominado de *sólidos*. Entre os sólidos identificamos os que são sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cones, cilindros, esferas, etc. Os demais objetos, como pedaços de sabão, batatas, etc., serão apenas sólidos.

Entre os sólidos geométricos podemos encontrar aqueles que rolam e os que não rolam. Entre os que rolam estão: esfera, cilindro e cone; entre os que não rolam, ou seja, têm superfícies planas, encontramos: prismas e pirâmides.

O estudo dos sólidos no Ensino Fundamental deve ser feito gradualmente; contudo, em cada ano, esse estudo deve fazer parte do planejamento das aulas.

É interessante que, em um primeiro momento, os estudantes trabalhem em grupo e manipulem um conjunto de sólidos geométricos (cubos, paralelepípedos, outros prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas) e façam a classificação segundo o critério que eles julguem pertinente. O professor deve acompanhar essa classificação, verificando a coerência e discutindo com a turma os critérios escolhidos. É fundamental que sejam percebidas as diferenças e as semelhanças entre as classes de sólidos e por qual motivo um determinado sólido estaria fora de um grupo.

Posteriormente, o professor direcionará a tarefa de modo que sejam apenas dois grupos. O objetivo é que os estudantes classifiquem os sólidos em poliedros e corpos redondos. No grupo de poliedros, ficarão os sólidos que possuem superfícies, arestas e vértices. O professor pode ampliar a discussão contando o número de faces, arestas e vértices dos poliedros.

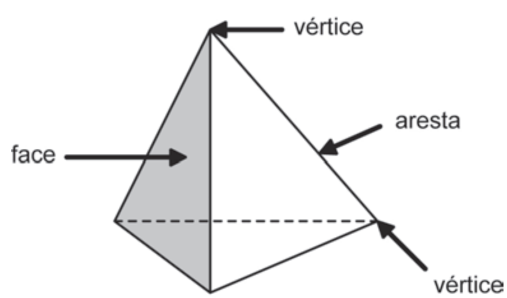


Figura 32 Pirâmide de base triangular e seus elementos (face, aresta e vértice).

Quantas faces têm essa pirâmide? Quantas são suas arestas? Quantos são seus vértices?

As faces são os polígonos da superfície de um sólido, o encontro das faces é denominado aresta e o encontro de arestas denomina-se vértice.

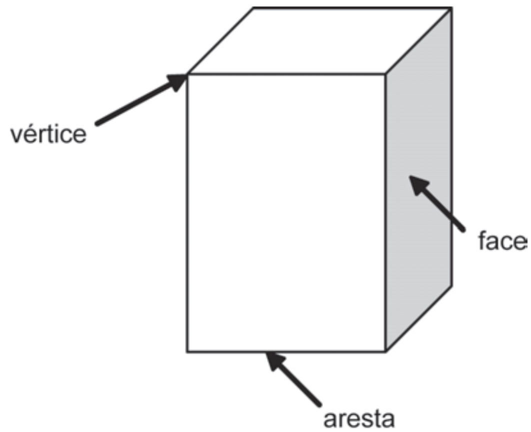


Figura 33 Os elementos do prisma (aresta, face e vértice).

O professor pode debater com a turma a característica das faces dos poliedros: os estudantes perceberão que se trata de polígonos. No cubo, por exemplo, as seis faces são quadrados congruentes. Elas poderão também contar o número de arestas, faces e vértices de um prisma.

Existe uma importante relação entre o número de faces, vértices e arestas que é verdadeira para poliedros convexos, denominada Relação de Euler. Em determinadas turmas, a Relação de Euler pode ser trabalhada no 5º ano do ensino fundamental. Nessa relação, temos que o número de vértices (V) mais o número de faces (F) será sempre igual ao número de arestas (A) mais 2. Assim, a Relação de Euler:[2] $V + F = A + 2$ ou $V + F - A = 2$. Contudo, esse conteúdo está previsto para ser desenvolvido a partir do 6º ano.

Solicitar que os estudantes escrevam sobre o que aprenderam a respeito dos sólidos geométricos ajudará na organização e na compreensão das propriedades intrínsecas a cada um. Essa escrita pode vir acompanhada de representação.

A intervenção do professor para a compreensão desses conceitos na fase da aprendizagem é fundamental. Socializar as escritas e as representações feitas pelos estudantes, discutindo com eles sobre o que diferencia um prisma de uma pirâmide, por exemplo, é um momento rico para o que chamamos de negociação de significados.

---

2 Matemático suíço, Leonard Euler (1707-1783), em 1751, divulgou que os poliedros guardam uma interessante relação entre os números de vértices, de faces e de arestas.

1.5 Estudando polígonos

A partir de classificações como a proposta aqui, pode-se iniciar o estudo particular de curvas, polígonos e poliedros.

Os conceitos de polígono e de poliedro constituem um excelente ponto de partida para a compreensão da natureza das definições em Matemática. As atividades de classificação desses objetos podem ser bons exemplos para disparar uma primeira identificação das figuras geométricas e, gradualmente, introduzir conceitos e propriedades que permitam distinguir figuras, polígonos, poliedros, cilindros, pirâmides, etc.

Vamos iniciar nosso estudo discutindo as concepções existentes para polígonos. Mesmo entre os professores que ensinam Matemática, existem diferentes concepções do que é um polígono; alguns consideram que basta que a figura seja plana e fechada por segmentos de reta para que seja definida como um polígono. Embora essa seja uma concepção aceita, adotaremos neste livro aquela que considera como um polígono uma superfície plana e contínua, cujo contorno é uma curva plana, fechada e simples, formada apenas por segmentos de reta.

A definição mais corrente em Matemática (e adotada aqui) é a que corresponde à Figura 34, representada pelo quadrilátero *XTUV*; nesse sentido, a Figura 35, representada apenas pelos segmentos de reta e nomeada nos seus vértices por *CDEF*, não será um polígono.

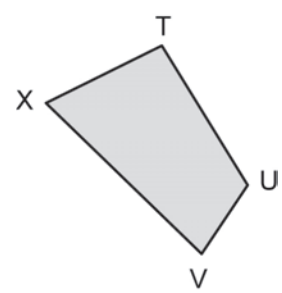


Figura 34 Polígono *XTUV*.

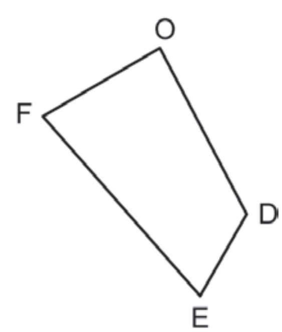


Figura 35 Curva fechada *CDEF*.

Embora esses conceitos sejam introduzidos no Ensino Fundamental, não podemos desconsiderar que mesmo antes de iniciar os primeiros anos na escola as crianças desenham e têm contato com figuras geométricas desenhadas sem preencher seu interior, o que representaria a superfície plana do polígono. Cabe ao professor inserir gradualmente as concepções. O bom senso será fundamental nesse momento, sendo importante não entrar em contradição.

A partir da definição que assumimos, apresentamos a seguir exemplos de polígonos e não polígonos.

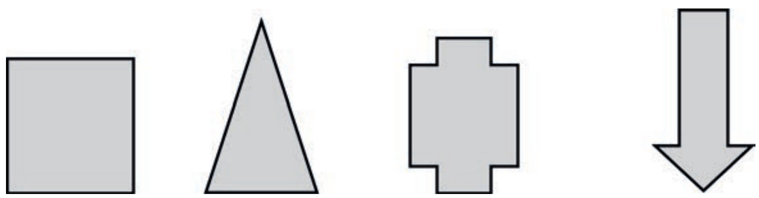


Figura 36 Exemplos de polígonos.

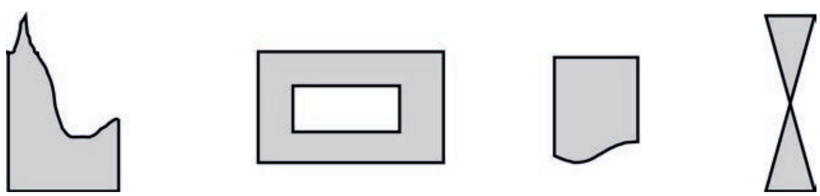


Figura 37 Exemplos de não polígonos.

Será interessante a construção de diferentes polígonos, como triângulos e retângulos, no geoplano e, nesse caso, eles serão representados apenas pelas linhas poligonais. O computador também será importante nessas construções. Existem recursos próprios do computador (ferramenta de desenho do *Word* ou do *Paint*), mas há *softwares* livres que podem contribuir para a construção e compreensão das figuras geométricas, como, por exemplo, o Logo.[3] Trata-se de um *software* que, além de desenhar figuras geométricas, contribui para a construção de conceitos geométricos.

As figuras seguintes foram desenhadas no geoplano com a ajuda do computador. O estudante poderá observar que as representações de triângulos e retângulos podem variar em relação à forma, o que não acontece com o quadrado e com o círculo. Utilizando o geoplano, será possível "representar" diferentes tipos de triângulos, uma boa oportunidade para perceber que existem triângulos cujos lados possuem o mesmo comprimento, triângulos com dois lados iguais e triângulos com três lados diferentes.

3 O *software* Logo pode ser acessado no endereço: <http://eurydice.nied.unicamp.br/softwares/softwares.php>.

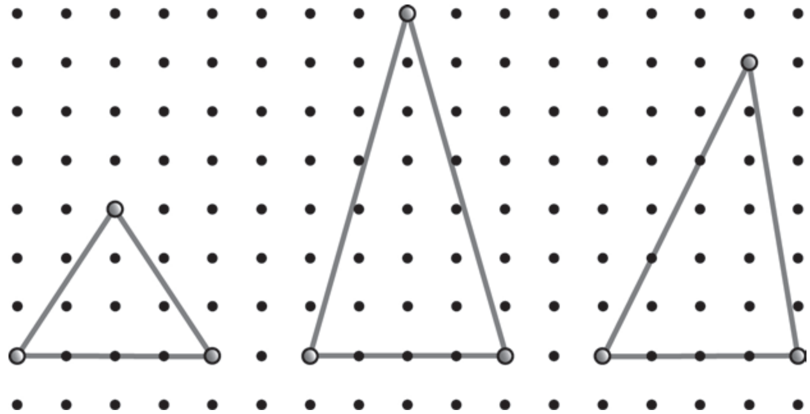


Figura 38 Triângulos desenhados no geoplano.

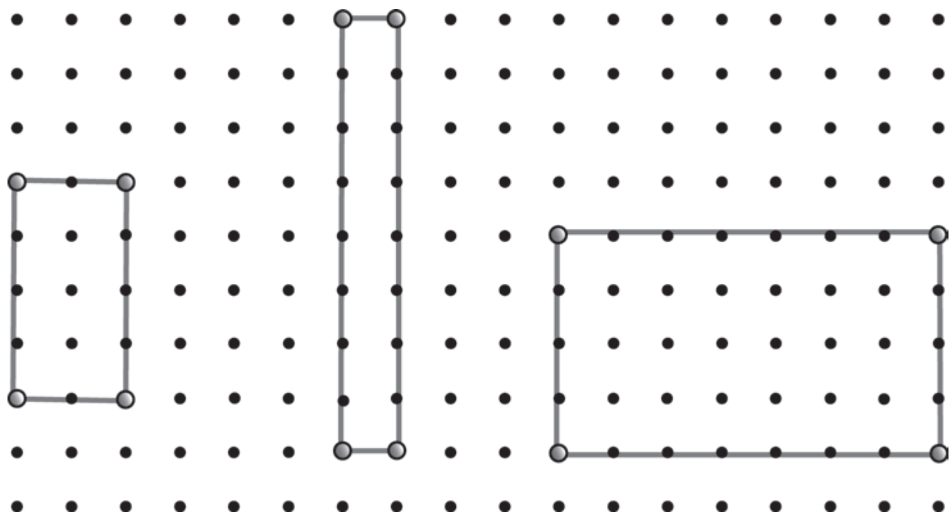


Figura 39 Quadriláteros desenhados no geoplano.

O geoplano é um excelente material manipulável para usar no ensino da Geometria, pois permite que os estudantes corram riscos, "desenhando" com elásticos e "apagando", sem indicação de que foi cometido algum erro. Crianças dos primeiros anos do Ensino Fundamental geralmente não têm a motricidade fina necessária para desenhar ou escrever bem, e o material ajuda muito nesse caso. Existem *softwares* de geoplano que podem ser acessados, conforme o disponibilizado anteriormente, como o desenvolvido pelo Departamento de Informática e Estatística – Centro Tecnológico – da Universidade Federal de Santa Catarina.[4]

Os polígonos são denominados a partir do seu número de lados: triângulo é o polígono de três lados, quadrilátero o de quatro lados, pentágono o de cinco lados e assim por diante. Note que o prefixo das palavras relaciona-se com

4 Para mais informações sobre o *software* desenvolvido pelo Centro Tecnológico, Departamento de Informática e Estatística da Universidade Federal de Santa Catarina, acesse: <http://www.inf.ufsc.br/~edla/projeto/geoplano/software.htm>.

o número de lados e o sufixo com a palavra ângulo (*gono*) ou lado (*látero*), isso porque os polígonos possuem o mesmo número de lados e ângulos.

Nos próximos subitens, 1.5.1 e 1.5.2, proporemos explicações e questões que podem ser aplicadas em sala de aula sobre os triângulos e quadriláteros, respectivamente.

1.5.1 Os triângulos

Ampliando a discussão sobre polígonos, a partir do desenho abaixo, podemos iniciar o estudo de triângulos e quadriláteros identificando na figura:

a) um triângulo equilátero;

b) um triângulo isósceles;

c) um triângulo escaleno;

d) um triângulo retângulo;

e) um trapézio;

f) um retângulo;

g) um losango.

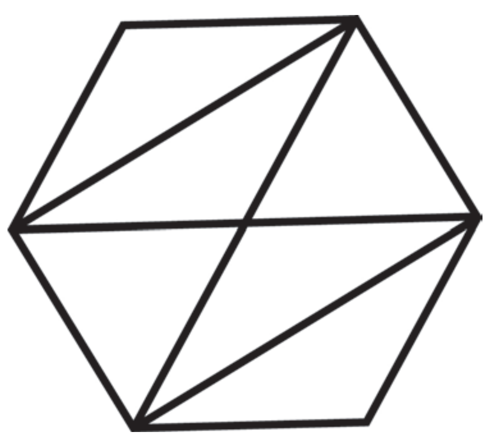


Figura 40 Hexágono.

Os triângulos são classificados a partir da medida do comprimento de seus lados e também pela medida dos seus ângulos internos. Há várias respostas possíveis para a questão proposta. Encontre-as!

Mas como identificar os tipos de triângulos?

Comece identificando na figura os triângulos que possuem um ângulo reto (90°). Esses são classificados como triângulos retângulos.

Identifique os triângulos que têm as medidas de todos os lados iguais. Esses são classificados como triângulos equiláteros. O que se pode dizer da medida dos ângulos desses triângulos?

Os triângulos que possuem dois de seus lados com medidas iguais são os isósceles. Notem que esses triângulos também possuem dois ângulos com a mesma medida.

Já os triângulos que possuem os três lados com medidas diferentes também terão a medida de seus ângulos diferentes e são chamados de triângulos escalenos.

Mas, afinal, o que define os triângulos e quadriláteros? Como classificá-los? Será possível construir um triângulo com três palitos (tipo espetinho) de quaisquer comprimentos? Experimente construir triângulos com conjuntos de palitos que medem:

a) 10 cm, 5 cm e 5 cm;

b) 12 cm, 7 cm e 9 cm;

c) 12 cm, 3 cm e 4 cm;

d) 10 cm, 10 cm e 10 cm.

O que você pode dizer a respeito dessa experiência?

Na verdade existe uma condição de existência de triângulos e essa condição pode ser verificada com atividades semelhantes à anterior e propostas aos estudantes dos anos iniciais. Logo eles perceberão que com três palitos pode-se construir um triângulo somente se a soma das medidas dos comprimentos de dois palitos for maior que a medida de comprimento do terceiro.

Essa é a condição de existência de um triângulo. Matematicamente, essa propriedade recebe o nome de postulado, ou seja, uma verdade dada pela experiência.

A nomenclatura que identifica diferentes tipos de triângulos relaciona-se com as medidas de comprimentos dos lados e com as medidas dos seus ângulos internos.

Se um triângulo possuir os três lados de mesma medida, seus ângulos também terão a mesma medida. Esse triângulo denomina-se *equilátero*. Se o triângulo possuir dois de seus lados com a mesma medida, será denominado de triângulo *isósceles*. O triângulo isósceles terá ainda dois de seus ângulos com medidas iguais. Se um triângulo for equilátero ele também será isósceles? Investigar essa questão será muito interessante. Experimente.

O triângulo que tiver todos seus lados com medidas de comprimento diferentes será denominado *escaleno*. O que acontecerá com as medidas dos seus ângulos? Investigue.

1.5.2 Os quadriláteros

Como podemos classificar os quadriláteros? Experimente escrever tudo que você sabe a respeito dos quadriláteros, procurando relacionar as palavras ou expressões que escreveu, construindo um mapa conceitual[5] a seu respeito.

Vamos começar escrevendo quadrilátero e uma frase (definição), o leitor complementa.

Figura 41 Início do mapa conceitual.

O leitor poderá concluir que polígonos que possuem quatro lados e quatro ângulos são denominados *quadriláteros*. Os quadriláteros serão classificados como *trapézios* ou *não trapézios*.

Os *trapézios* que possuírem apenas um par de lados paralelos serão denominados de *trapézios não paralelogramos*. Já aqueles quadriláteros que possuírem dois pares de lados paralelos serão denominados *paralelogramos*.

Dentro do conjunto de paralelogramos podemos identificar os não retângulos ou não losangos.

Se os paralelogramos tiverem os quatro ângulos com a mesma medida serão denominados *retângulos*; se os paralelogramos tiverem os quatro lados com a mesma medida, serão denominados *losangos*.

Os retângulos que tiverem quatro lados com a mesma medida serão denominados *quadrados*. Os losangos que tiverem os quatro ângulos com a mesma medida serão denominados *quadrados*.

5 Mapa conceitual: são representações gráficas, semelhantes a diagramas, que indicam relações entre conceitos ligados por palavras. Geralmente, são utilizados para auxiliar na ordenação e na sequência hierárquica dos conteúdos de ensino, de forma a oferecer estímulos aos alunos. A técnica de construção e a teoria dos mapas conceituais foram desenvolvidas pelo pesquisador norte-americano Joseph Novak.

Há muito ainda a se falar e debater sobre a Geometria nos anos iniciais. Mas não poderíamos deixar de destacar que todo processo deverá ser desencadeado num ambiente de comunicação e troca de ideias, o qual deverá influenciar a aprendizagem de todos os envolvidos no processo.

1.6 Algumas considerações

Há ainda muito que se estudar e aprender sobre Geometria. Mas vamos deixar para um outro momento.

Apresentamos uma pequena parcela de tudo que consideramos fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Deixamos o convite para que o leitor, que será um futuro professor dos anos iniciais, busque sempre ampliar seus estudos a respeito.

Contudo, não poderíamos finalizar esta unidade sem destacar o papel importante que o professor exerce nas práticas de sala de aula. Será ele o responsável para que ocorra a comunicação em linguagem oral ou escrita, em linguagem matemática, em linguagem gestual, em forma de desenhos, maquetes e esculturas. As diferentes formas de comunicação revelam a interpretação e a compreensão dos estudantes. Em um ambiente de interações e reflexões, ocorre a negociação de significados, essencial para a aprendizagem. E esse ambiente de comunicação e de troca de ideias influencia a aprendizagem de todos os envolvidos no processo.

Concordamos com Charlot (2005, p. 84) quando ele diz que é “o aluno quem deve aprender e que não se pode aprender em seu lugar. Mas isso supõe que o aluno entre em uma atividade intelectual”. Essa atividade é central ao processo de aprendizagem. Desse modo, “é legítimo prestar maior atenção a ela, no que ela tem de singular”. Colocar o estudante no centro do processo de ensino permitirá que ocorra o compartilhamento de ideias e de saberes.

1.7 Estudos complementares

O aprofundamento das questões aqui debatidas poderá ser feito a partir da leitura das obras citadas nesta unidade ou com outras referências complementares:

FONSECA, M. C. F. R. et al. *O ensino de geometria na escola fundamental*: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

A obra acima referida é destinada a educadores em formação inicial ou continuada, e foi elaborada para discutir questões que emergem no e do trabalho com o ensino de Geometria.

Na obra referida a seguir, é apresentada a discussão de duas vertentes: a Geometria no currículo escolar e a Geometria e a formação de professores.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. *A geometria nas séries iniciais*: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

UNIDADE 2

Grandezas e Medidas: um tema integrador

2.1 Primeiras palavras

Para os Parâmetros Curriculares de Matemática (1997), na vida em sociedade as Grandezas e Medidas estão presentes nas mais diferentes atividades que realizamos. Assim, esse conteúdo escolar mostra a utilidade do conhecimento matemático em nosso dia a dia. Foi em tempos passados, quando o homem começou a construir suas habitações e a desenvolver a agricultura, que houve a necessidade de construir instrumentos para efetuar medições.

Atividades bem trabalhadas com os estudantes sobre as noções de grandezas e medidas proporcionam uma ampliação de conceitos relativos ao espaço e às formas. Os contextos envolvendo grandezas e medidas são extremamente significativos para trabalhos com as noções de números, operações, proporcionalidade, escala, estimativa, entre outros.

E mais, o tema grandezas e medidas é um assunto em que a abordagem histórica para o ensino da Matemática pode ser utilizada para mostrar aspectos da construção desse conhecimento.

2.2 Problematizando o tema

As crianças, desde muito cedo, têm experiências com a medição de grandezas (comprimento, área, volume, capacidade, tempo, massa, temperatura, ângulo, sistema monetário), por exemplo:

- Acordei às 6 horas.
- O termômetro marcava 10 graus. Que frio!
- Comprei 1 litro de leite.
- Andei dois quarteirões para chegar ao ponto de ônibus.
- O ônibus percorreu aproximadamente cinco quilômetros até chegar à escola.
- Gastei R$ 5,00 para comprar um lanche e terminadas as aulas voltei a pé para casa.
- Acho que emagreci uns dois quilos.

Mas isso não significa a compreensão dos aspectos mensuráveis de um objeto nem a dominação de procedimentos de medida.

Os conceitos relacionados às medidas são desenvolvidos ou adquiridos por meio de experiências que enfocam as duas ideias básicas de medida, que são:

- Comparação;
- Unidade-padrão.

Assim, podemos dizer que somos mais altos ou mais baixos que alguém. Mas, também, podemos dizer que temos 1,75 m. Essa segunda ideia relaciona a medida de uma determinada grandeza a um número e isso é um aspecto de fundamental importância, pois é por meio dele que o estudante aprofundará o seu conhecimento numérico e terá a justificativa para a ampliação dos conjuntos numéricos. A ampliação dos conjuntos numéricos (os números fracionários e os números negativos) pode ser justificada em contextos envolvendo grandezas e medidas. Mas, afinal, o que podemos comparar?

O que é maior: a minha idade ou o meu pé?

Para Machado (1988), se você estranhou a pergunta, isso é bom. Não faz sentido compararmos idade com tamanho de pé. São grandezas diferentes: a idade se refere a tempo e o tamanho do pé a comprimento. Assim, só podemos comparar grandezas de mesma espécie.

O que comparamos: grandezas ou números?

Tenho cinco borrachas iguais e uma caneta. O comprimento da caneta é igual ao das cinco borrachas enfileiradas. Portanto, cinco vezes o comprimento da borracha equivale ao comprimento da caneta. Cinco é o número que obtemos comparando essas duas medidas. Em outras palavras, tomando-se como padrão o comprimento da borracha, o comprimento da caneta é cinco vezes o comprimento da borracha.

Vejamos outro exemplo: podemos medir uma das dimensões (comprimento, largura, altura) de uma mesa tomando-se o palmo como padrão ou as dimensões de uma sala com o tamanho do pé.

Pensemos na seguinte situação: o comprimento de um tapete retangular é de 6 pés, e a sua largura é de 3 pés.

Em geral, é desse modo que relacionamos duas grandezas da mesma espécie. Em vez de comparar diretamente uma com a outra, comparamos as duas com uma terceira, escolhida como padrão, no caso o pé. Dessas duas comparações resultam dois números. Por meio deles, comparamos as grandezas correspondentes.

2.3 O homem como medida das coisas

Protágoras, filósofo grego, afirmava que o homem era a medida de todas as coisas. Por isso, no passado, para medir comprimentos, o homem tomava a si próprio como referência. Usava como padrões determinadas partes de seu corpo. Foi assim que surgiram a polegada, o palmo, o pé, a jarda, a braça e o passo:

- Polegada: corresponde a 2,54 centímetros ou 25,4 milímetros.
- Palmo: diz respeito a uma medida de comprimento que se obtém com a mão toda aberta, correspondendo a aproximadamente 22 centímetros.
- Pé: um pé correspondia a 11,5 polegadas, mas atualmente corresponde a 12 polegadas, o tamanho médio dos pés masculinos adultos. Essa medida é amplamente utilizada na aviação, equivalendo, atualmente, a 30,48 centímetros.
- Jarda: era originalmente a medida do cinturão masculino de mesmo nome. No século XII, o rei Henrique I da Inglaterra fixou a jarda como a distância entre seu nariz e o polegar de seu braço estendido. Atualmente é utilizada no futebol americano.
- Braça: é uma antiga medida de comprimento equivalente a 2,2 metros.
- Passo ou passo duplo: é uma unidade de medida de comprimento utilizada no Império Romano, valendo 5 pés, ou seja, 1,48 m.

A escolha de um ou de outro padrão depende do que se deseja medir. Um padrão pode servir para medir uma coisa e não ser adequado para medir outra. Por isso, não podemos dizer que um padrão é “bom” ou “ruim”, mas apenas que é ou não apropriado para certa medição. Como exemplo, temos que, para medir o comprimento do corredor de uma escola, a jarda é preferível à polegada.

2.3.1 A necessidade de padronizar os padrões

Ainda conforme Machado (1988), podemos imaginar que, como as pessoas têm tamanhos diferentes, as medidas associadas ao corpo humano resultaram em confusões. E mais, para se comparar duas medidas obtidas com padrões diferentes, tais como o pé e a jarda, precisamos saber que relação existe entre elas.

2.3.2 A Terra como medida das coisas

Com o desenvolvimento do comércio e das cidades e o consequente aumento do intercâmbio entre os povos, tornou-se cada vez mais essencial estabelecer padrões que fossem utilizados por todos os países. Então, a Terra passou a ser utilizada como padrão para medidas, lembrando que algumas medidas de tempo usadas já se relacionavam com o nosso planeta: o dia e o ano. Foi assim que surgiu a légua como medida de comprimento.

2.4 O metro

A palavra metro vem do grego *métron*, que significa "que mede".

Vejamos, então, a primeira definição da unidade metro. Imagine a quarta parte do meridiano terrestre dividida em 10 milhões de partes iguais. Cada uma dessas partes é igual a 1 metro.

Acontece que os meridianos terrestres não são iguais, pois a Terra não é perfeitamente esférica, nem sua superfície totalmente lisa. Assim, foi necessário procurar outra forma de conceituar o metro.

A partir da criação do metro como uma unidade-padrão, foi possível expressar, de modo simples, e por meio de um único número, o resultado de uma medição feita com ele ou seus múltiplos e submúltiplos.

A última definição do metro, que passou a vigorar em 1983, é baseada na velocidade da luz. Sabemos que a luz se propaga no espaço vazio com a velocidade constante de aproximadamente 300.000 km por segundo. Pois bem, o metro pode ser definido como uma fração ou parte da distância percorrida pela luz, no vácuo, em um segundo. Como 300.000 km correspondem a 300 milhões de metros, então o metro corresponde a 1/300.000.000 da distância percorrida pela luz em um segundo.

Essa caminhada por certo não terminou. É importante perceber que a história dos padrões e instrumentos de medida de comprimento acompanha a história da humanidade. É bem provável que a definição de metro sofra ainda outras transformações.

Portanto, as duas ideias fundamentais de medida são: comparação e unidade-padrão. No caso dos comprimentos, as comparações são expressas pela unidade-padrão que denominamos: o metro.

2.5 Sistema métrico decimal

2.5.1 Medidas de comprimento

No sistema métrico decimal, a unidade-padrão para medir comprimentos é o metro, cujo símbolo é *m*. Existem outras unidades (múltiplos ou submúltiplos) do metro. Considerando-o como unidade-padrão, temos:

- Quilômetro (km = 1.000 m);
- Hectômetro (hm = 100 m);

- Decâmetro (dam = 10 m);
- Metro (m = 1 m);
- Decímetro (dm = 0,1 m);
- Centímetro (cm = 0,01 m);
- Milímetro (mm = 0,001 m).

Se as medições forem muito pequenas ou muito grandes, existem ainda outras unidades de comprimento, por exemplo o mícron (10^{-6} m) e o ano-luz $(9,46 \times 10^{15}\ \text{m})$.

Como podemos observar, há uma relação entre as unidades de comprimento: cada unidade de comprimento é dez vezes maior que a unidade imediatamente inferior ou dez vezes menor que a unidade imediatamente superior. Por exemplo:

$$5\ m = 5 \times 10 \times 10\ cm = 500\ cm$$

ou

$$500\ cm = 500 \div 10 \div 10\ m = 5\ m$$

Assim, para converter uma unidade maior em uma unidade menor, multiplica-se por dez a cada unidade que se passa até chegar àquela que se quer. Já para converter uma unidade menor em uma unidade maior, divide-se por dez a cada unidade que se passa até chegar àquela desejada.

Alguns exemplos:

$$253\ dam = 253 \times 10 \times 10 \times 10\ cm = 253.000\ cm$$

$$1.500\ mm = 1500 \div 10 \div 10 \div 10\ m = 1,5\ m$$

$$13,45\ m = 13,45 \times 10 \times 10 \times 10\ mm = 13.450\ mm$$

$$52,3\ cm = 52,3 \div 10 \div 10\ m = 0,523\ m$$

2.5.2 Medidas de superfície

No sistema métrico decimal, a unidade fundamental para medir superfícies é o metro quadrado, cuja representação é m^2. O metro quadrado é a medida da superfície de um quadrado de 1 metro de lado. Como na medida de comprimento, na área também temos os múltiplos e os submúltiplos (km^2, hm^2, dam^2, dm^2, cm^2 e mm^2). As transformações de uma unidade de área para outra são feitas como nas transformações das unidades de medida, porém, para cada mudança, devemos multiplicar ou dividir por 10^2 ou 100.

Alguns exemplos:

$$5\ m^2 = 5 \times 10^2 \times 10^2\ cm^2 = 50.000\ cm^2$$

$$3.000\ m^2 = 3.000 \div 10^2 \div 10^2 \div 10^2\ km^2 = 0,\ 003\ km^2$$

Quando queremos medir grandes porções de terra, usamos uma unidade agrária chamada hectare (ha). O hectare é a medida de superfície de um quadrado de 100 m de lado. Assim, 1 hectare (ha) = 1 hm^2 = 10.000 m^2.

Em alguns estados do Brasil, utiliza-se também uma unidade não legal chamada *alqueire*. Um alqueire mineiro equivale a 48.400 m^2 e 1 alqueire paulista equivale a 24.200 m^2.

2.5.3 Medidas de volume

No sistema métrico decimal, a unidade fundamental para medir volume é o metro cúbico, cuja abreviatura é *m^3*. O metro cúbico (m^3) é o volume ocupado por um cubo de 1 m de aresta. Como nas medidas de comprimento e de área, no volume também temos os múltiplos e os submúltiplos. Analogamente à transformação de unidades da medida de comprimento, faz-se o mesmo para as medida de volume, porém, para cada mudança, deve-se multiplicar ou dividir por 10^3 (ou 1.000). Veja os exemplos:

$$5,2\ m^3 = 5,2 \times 10^3\ dm^3 = 5.200\ dm^3$$

$$300.000\ cm^3 = 300.000 \div 10^3 \div 10^3\ m^3 = 0,3\ m^3$$

A unidade fundamental para medir volume ou capacidade é o litro (L). Para as aplicações práticas, podemos definir: 1 litro = 1 dm^3.

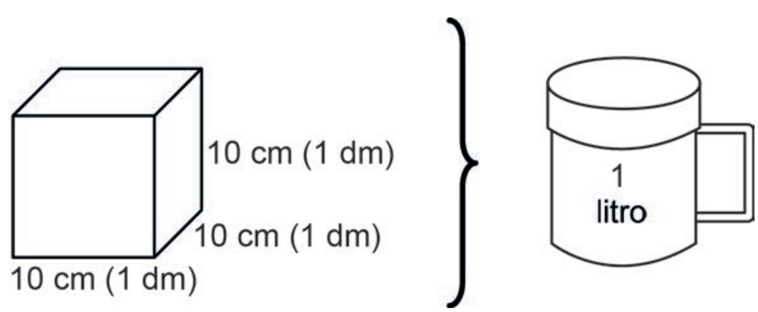


Figura 42 Cubo de 1 dm^3 e uma caneca de 1 litro.

Exemplo: Na leitura de um hidrômetro, constatou-se que o consumo do último mês foi de 25 m^3. Quantos litros de água foram consumidos?

Resposta: 25 m^3 = 25.000 dm^3 = 25.000 litros.

2.6 Exemplos de atividades que podem ser desenvolvidas com as crianças

O conteúdo envolvendo Grandezas e Medidas pode possibilitar ao professor o desenvolvimento de uma pesquisa com os estudantes. Essa pesquisa se daria da seguinte forma: os estudantes trariam para a escola os mais diversos instrumentos ou aparelhos utilizados para medições. Esses materiais seriam tanto atuais como antigos e, ao final da pesquisa, depois dos trabalhos com ideias, princípios e procedimentos matemáticos envolvendo medições, o professor e os estudantes poderiam expor os objetos encontrados em uma feira de conhecimento. Os pais dos estudantes, assim como a comunidade, poderiam participar de uma pesquisa desse tipo.

Mais do que mostrar os conteúdos matemáticos no dia a dia, essa pesquisa mostra também a relação da Matemática com a resolução de problemas em contextos sociais, econômicos e científicos, por exemplo. Enfim, mostra a Matemática como uma atividade humana e social e pode desenvolver um significado para essa disciplina junto às crianças.

Outro exemplo de atividade pode relacionar os conhecimentos intuitivos que as crianças possuem com os conhecimentos científicos. A noção de ângulo, por exemplo, seria a região plana limitada por duas semi-retas de mesma origem. No entanto, em suas brincadeiras, as crianças giram, rodam e assim possuem, intuitivamente, a ideia de ângulo. Nas brincadeiras com *skate*, as crianças utilizam expressões do tipo: “Vou dar um 180°” ou até mesmo “Vou dar um 540°”, significando meia volta ou uma volta e meia. Pensamos que nessas brincadeiras a ideia de ângulo como um giro está presente e poderia, em estudos posteriores de trigonometria, ser recuperada para fundamentar o raciocínio periódico.

Esse exemplo mostra-nos que muitas definições matemáticas, embora rigorosas do ponto de vista formal, podem não explicitar as ideias matemáticas que elas sintetizam. Então, não deveríamos ensinar tão somente pela definição, mas sim construir com os estudantes a definição. A definição seria o coroamento de ideias trabalhadas ou recuperadas de contextos em que estão presentes.

2.7 Considerações finais

A utilização de medidas mostrou-se não somente como um eficiente processo de resolução de problemas práticos como também desempenhou um papel fundamental em várias relações envolvendo conteúdos matemáticos. A compreensão dos números, em especial os fracionários, assim como de muitas relações geométricas, é facilitada por causa das medidas.

2.8 Estudos complementares

No endereço <www.dominiopublico.gov.br> existem vários vídeos relacionados às ideias discutidas nesta unidade, entre eles podem ser encontrados vídeos sobre medidas, forma dentro de forma, quadrados, cubos, etc.

UNIDADE 3

Iniciação ao estudo de frações

Garçom: Em quantos pedaços divido essa pizza: seis ou oito?

Cliente: Em oito, pois hoje estou com fome.
Anônimo

3.1 Primeiras palavras

Nesta unidade, iniciaremos o estudo das frações procurando conceituar a ideia de fração, suas diferentes representações, a noção de fração equivalente e as operações com os números fracionários. As operações com frações são discutidas e justificadas articulando-se as ideias com os algoritmos.

3.2 Problematizando o tema

Os números fracionários representam a primeira ampliação dos conjuntos numéricos. Nesse sentido, o trabalho do professor precisa atentar para o surgimento de um novo tipo de número que expressa relações matemáticas diferentes daquelas que envolvem o número natural. Por extensão, as operações fundamentais, envolvendo os números fracionários, também precisam ser revistas em relação aos números naturais.

Assim, o fato de que os números fracionários representam outras ideias matemáticas e que essas ideias têm repercussões nas operações realizadas com eles deve ser contemplado pelo trabalho docente para que o aprendizado desses números ocorra significativamente. Como exemplo, temos os números decimais e a porcentagem, que estão muito presentes em nosso dia a dia.

3.3 Considerações iniciais

Conta-se que o rei Sesóstris tinha dividido todo o Egito entre os egípcios. Deu a cada um deles uma porção igual e retangular de terra, às margens do rio Nilo, com a obrigação de que fosse pago por ano um imposto. Mas, no período das chuvas, o rio inundava algumas dessas terras, levando parte delas. Então, esses proprietários tinham que procurar o rei e explicar o que tinha acontecido. Assim, o rei enviava medidores ao local a fim de saber quanto diminuiu o terreno e o proprietário pagava o imposto segundo o que tivesse ficado de terra. Os medidores utilizavam uma marcação com cordas, que seria uma espécie de unidade de medida. As cordas eram esticadas e, assim, eles verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Porém, raramente essa medida dava certo no terreno, isto é, não “cabia” um número inteiro de vezes nos lados do terreno. Diante disso, houve a necessidade de dividir a unidade de medida e assim foi criado o número fracionário.

Esse aspecto da História da Matemática é essencial para a compreensão dos números fracionários, pois este novo tipo de número é uma síntese de duas ideias: quantidade e medida.

Quando lemos uma fração, por exemplo $\frac{2}{3}$, e dizemos "dois terços" e não "dois três" é porque esses números expressam ideias diferentes. E mais, uma fração não é dois números, mas sim uma relação expressa por dois números.

As frações representam uma ampliação significativa dos conhecimentos das crianças sobre números. Quando as crianças possuem um conhecimento sólido acerca das noções de frações, podem usar esse conhecimento para descrever fenômenos do mundo real e para aplicá-los a problemas envolvendo medidas, partições, comparações, probabilidades e estatística. A compreensão de frações e, por extensão, a dos números racionais, alarga a consciência que os estudantes têm sobre a utilidade e o poder dos números e amplia o seu conhecimento sobre o sistema numérico. Nos níveis elementares de escolaridade, é fundamental o desenvolvimento de ideias e de relações que funcionarão como alicerces para noções e capacidades mais avançadas.

O ensino de frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental deve ajudar os estudantes a compreender esse conceito, a explorar as suas relações e a construir noções de ordem e equivalência. Dado que as investigações sugerem que as crianças constroem essas ideias lentamente, é importante que usemos materiais manipuláveis, modelos e situações do mundo real juntamente a esforços progressivos para que elas descrevam as suas experiências de aprendizagem por meio da linguagem oral e de símbolos. Se, nesses anos da escolaridade, houver a preocupação em enfatizar as ideias básicas, haverá a redução do tempo habitualmente gasto, nas séries seguintes, para corrigir as concepções errôneas e para superar as dificuldades processuais.

Todo o trabalho, nesses anos, deve envolver frações úteis na vida diária, isto é, frações que sejam facilmente modeladas. O trabalho inicial com as frações deve ser sugerido por experiências de partilha equitativa, tais como várias crianças partilharem um conjunto de figurinhas (grandeza discreta) ou um chocolate (grandeza contínua). A noção de unidade e a sua subdivisão em partes iguais são fundamentais para compreender frações e decimais, quer se trate de repartir um chocolate retangular ou um conjunto de figurinhas. Inicialmente, o ensino deve realçar a linguagem oral (um quarto, dois terços) e associá-la a modelos. Para iniciar um modelo nessa área, podemos propor uma variedade de atividades, tais como dobraduras com tiras de papel em partes iguais, descrições do tipo de partes (quintos, por exemplo) e a quantidade de partes consideradas (dois quintos, por exemplo).

Em uma atividade, os estudantes podem construir o todo, o inteiro, a unidade, uma vez conhecida uma das partes.

O exemplo a seguir é uma interessante atividade dessa natureza:

- "Se este pedaço é um quarto do todo, desenhe o todo".

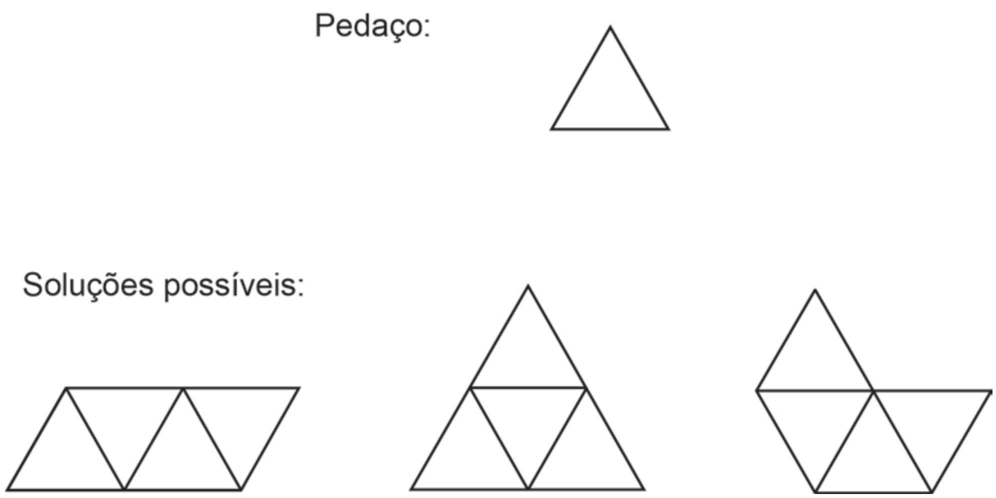


Figura 43 Representação da parte e do todo.

Contarmos nas ordens crescente ou decrescente por unidades de frações ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc.) é uma atividade que ajuda as crianças a tomar consciência da sequência de frações e as prepara quer para o cálculo mental, quer para o cálculo com papel e lápis. Mais do que o estudante saber que, na notação a/b, *a* é o numerador e *b* o denominador, é necessária a compreensão das relações que tais termos representam. Em questões do tipo: "Qual das frações de um mesmo todo representa um número maior, $\frac{3}{5}$ ou $\frac{2}{6}$?", a resposta $\frac{2}{6}$ é bastante frequente. A razão normalmente apresentada é o fato de 6 ser maior do que 5.

As frações propriamente ditas, tais como os símbolos $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{3}$, só devem ser introduzidas depois que as crianças desenvolverem as noções e a linguagem oral que tornam os símbolos significativos, devendo estes ser cuidadosamente associados quer a modelos, quer à linguagem oral.

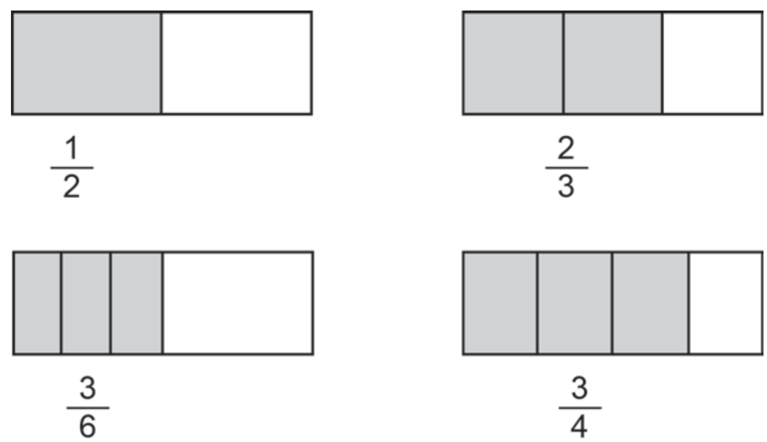
O conhecimento do tamanho relativo das frações sustenta o sentido do número e reforça compreensões básicas. A atividade ilustrada por figuras ajuda as crianças a pensar sobre a quantidade (área) representada por uma fração.

Vejamos o retângulo a seguir, que ilustra esse tipo de informação.

Pode-se então questionar: Quanto vale a parte pintada do retângulo? Cerca de $\frac{3}{8}$, menos que $\frac{1}{2}$, menos que $\frac{1}{3}$?

Qual a condição para responder essa pergunta?

Aconselhamos o uso de materiais manipuláveis para a exploração de frações equivalentes e comparações de frações de um mesmo todo. Por exemplo, com tiras de papel dobrado, as crianças constatam, facilmente, que $\frac{1}{2}$ representa a mesma porção que $\frac{3}{6}$, e que $\frac{2}{3}$ é menor do que $\frac{3}{4}$. Veja as representações de tiras de papel:



As crianças podem também usar o mesmo raciocínio, utilizando a manipulação de tiras de papel, para concluir que $\frac{1}{5}$ é maior do que $\frac{1}{8}$, ou do que $\frac{1}{10}$, porque quanto maior for o número de partes iguais em que o mesmo todo é dividido, menor será cada uma dessas partes.

Os estudantes devem reconhecer, por exemplo, que $\frac{3}{4}$ está entre $\frac{1}{2}$ e 1, e que $\frac{1}{3}$ é grande quando comparado a $\frac{1}{10}$, próximo do tamanho de $\frac{1}{4}$ e pequeno quando comparado a $\frac{5}{6}$.

Devem, também, explorar frações de valor próximo de zero, de $\frac{1}{2}$ e de 1. As experiências sobre o tamanho relativo dos números fracionários promovem o desenvolvimento do sentido de número. Os estudantes precisam relacionar numeradores e denominadores nas frações para obter a compreensão correta dos tamanhos dessas frações, o que vai possibilitar, mais tarde, a localização exata na reta numérica. Assim, $\frac{9}{10}$, $\frac{5}{10}$ e $\frac{1}{10}$ precisam ser entendidos, das mais diversas maneiras, relativamente aos seus tamanhos.

Os materiais manipuláveis também podem ser usados com sucesso em trabalhos exploratórios para as operações com frações, para que as crianças resolvam problemas reais e possam fazer partições de conjuntos, relacionando essa atividade com a divisão. Como exemplo, podemos citar que as crianças aprendem que $\frac{1}{3}$ de 30 é equivalente a 30 dividido por 3, o que as ajuda a relacionar as operações com frações às operações com números naturais. Ainda em relação à divisão, é importante que as atividades ou situações-problema abordem com compreensão as ideias de partição e de medida associadas a essa operação.

Fazermos com que as crianças explorem, com modelos, as ideias de frações decimais pode ajudá-las a compreender futuramente a representação decimal dos números racionais. O ensino dos decimais deve incluir experiências informais que relacionem frações com decimais, de forma que os estudantes comecem a estabelecer conexões entre os dois sistemas. Trataremos desses aspectos ainda nesta unidade.

Em relação às operações, é importante ressaltarmos que muitas destas que envolvem frações diferem em alguns aspectos daquelas que envolvem os números naturais. Um estudante que compreende os princípios básicos das relações entre números naturais precisa descobrir como esses princípios operam com frações para poder proceder efetivamente com essa outra espécie de número.

Os estudantes podem compreender que a evolução das ideias de número está intimamente relacionada com as exigências das mais variadas operações. No caso de 1 dividido por 2, o novo número criado é uma fração e tem como nome "um meio", sendo escrito, convenientemente, como $\frac{1}{2}$. Certamente, em uma apresentação a estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, uma fração pode ser descrita como uma ou mais partes iguais da unidade, ou, talvez, como uma das partes iguais de diversas unidades. Basicamente, porém, não se deve esquecer que uma fração é um novo número, criado para ampliar os naturais.

As sugestões apresentadas para um trabalho diferenciado com as frações não são únicas, mas são relevantes dentro do contexto do estudo ora apresentado.

Quando da extensão das frações, ou seja, quando apresentamos os números racionais nos anos seguintes do Ensino Fundamental, um trabalho eficiente, num primeiro momento, seria a extensão de ideias que envolvam esse novo tipo de número em atividades e situações-problema significativas. Assim sendo, a formalização da noção e dos princípios do número racional seria, então, a síntese de uma série de relações em que a forma $\frac{a}{b}$ seria utilizada.

Contextos, por exemplo, em que as ideias de probabilidade, razão e proporção são trabalhadas poderão tanto aprofundar quanto ampliar esse novo número escrito na forma $\frac{a}{b}$.

3.4 Algumas ideias de fração

A melhor forma de compreender as ideias relacionadas à fração será a partir de situações-problema ou de um contexto em que a fração se faz presente.

Partição

Situação 1: dividir uma pizza em quatro partes iguais e comer três delas (unidade: 1 pizza; o resultado é $\frac{3}{4}$ ou três quartos).

Situação 2: três quartos de um grupo de 12 pessoas (unidade: 12 pessoas; o resultado é nove pessoas).

Esses exemplos envolvem grandezas contínuas e discretas e alguns aspectos devem ser destacados no trabalho do professor. O primeiro seria a ideia de unidade. Para as crianças, considerar que a unidade, ou o todo, equivale a 12 não é tão simples. Elas precisam entender que nesse caso a unidade representa o número de elementos do grupo, da coleção, do conjunto. E mais, é possível dividir grandezas contínuas em qualquer número de partes iguais. Já nas grandezas discretas, o denominador deve ser um divisor do número de elementos do grupo. Assim, em um grupo de 12 pessoas, só poderíamos expressar frações cujos denominadores fossem: 2, 3, 4, 6 e 12.

Quociente

Situação: dividir igualmente três pizzas entre quatro pessoas. Nesse caso, o resultado da divisão de 3 por 4 é igual a $\frac{3}{4}$. Portanto, o número $\frac{3}{4}$ representa o quociente de uma divisão exata. Esse é um aspecto que deve ser ressaltado, enquanto nos números naturais a divisão pode comportar um resto, nos números fracionários a divisão é exata, ou seja, não tem resto.

Medida

Quanto de R$ 2,00 “cabe” em R$ 0,50?

A unidade monetária é interessante para as crianças compreenderem que R$ 2,00 não “cabe” um número de vezes “inteira” em R$ 0,50, mas que parte de R$ 2,00 “cabe” em R$ 0,50. A resposta será: $\frac{1}{4}$ (um quarto) de R$ 2,00 “cabe” em R$ 0,50.

Número

A fração é também um número. Historicamente, foi a primeira ampliação dos conjuntos numéricos. Assim, $\frac{3}{4}$ é um número, mais próximo de 1 do que de zero.

Algumas crianças sentem dificuldade em aceitar que fração é um número. É compreensível que ocorram alguns obstáculos, afinal, até o aparecimento das frações, todo número que as crianças conheciam era representado por um só numeral, sendo que a fração, por sua vez, é representada por dois numerais (além do traço horizontal) e esse número, a fração, não será nenhum dos dois numerais que a compõem, individualmente, mas o todo. Assim, é nesse momento que pela primeira vez as crianças se deparam com três símbolos para representar uma única quantidade.

Operador multiplicativo (divisão e multiplicação)

A fração $\frac{3}{4}$ de 60 pode ser obtida dividindo 60 por 4 e multiplicando por 3, ou multiplicando 60 por 3 e dividindo por 4.

Ainda na ideia de operador multiplicativo, a fração $\frac{3}{4}$ pode ter interpretações diversas, por exemplo:

a) $\frac{3}{4}$ = três vezes $\frac{1}{4}$;

b) $\frac{3}{4}$ = uma vez $\frac{3}{4}$;

c) $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ de um;

d) $\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ de três.

Probabilidade

Uma fração também pode representar um contexto que envolve probabilidade, pois esse conceito matemático é uma comparação (parte/todo) entre os casos favoráveis e os casos possíveis. Discutiremos mais sobre probabilidade na próxima unidade.

Romanatto (1997) afirma que os números fracionários modelam situações nos mais distintos contextos. Para que esses números sejam plenamente compreendidos, essas diversas situações em que eles estão presentes precisam ser trabalhadas, pois são diferentes as noções matemáticas expressas por uma mesma notação $\frac{a}{b}$.

3.5 Representação de frações

As frações podem ser representadas nas formas: barra fracionária ($\frac{3}{4}$), decimal (0,75), percentual (75%), três quartos (falada) e pictórica (desenhos em que a fração que se quer é destacada por uma cor, por exemplo).

No início dos estudos com as frações, o professor poderia destacar um todo (grandeza contínua) ou um grupo (grandezas discretas) e mantê-los até que as ideias sobre esse novo número fiquem bem compreendidas.

Por que não falar ao mesmo tempo de frações, números decimais e porcentagem? Essa é uma das propostas que trazemos para a Matemática ensinada nos anos iniciais.

Primeiramente, é preciso considerar o mito de que a noção de fração surge na criança bem antes das noções de porcentagem e de número decimal. Se verificarmos a origem desse mito, encontraremos somente que essa ordem é apenas curricular. Como afirmado anteriormente, frações, números decimais e porcentagem se referem a um mesmo conceito; eles são representações de uma mesma ideia.

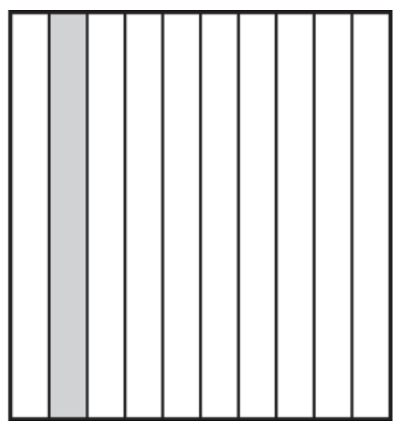


Figura 44 Representação pictórica de $\frac{1}{10}$, 0,1 ou 10%.

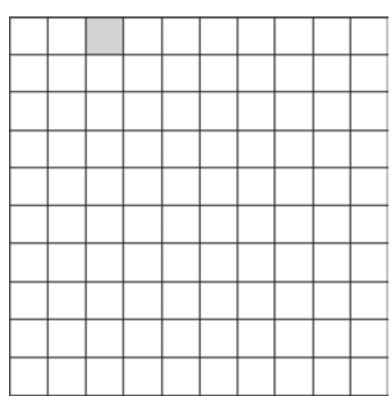
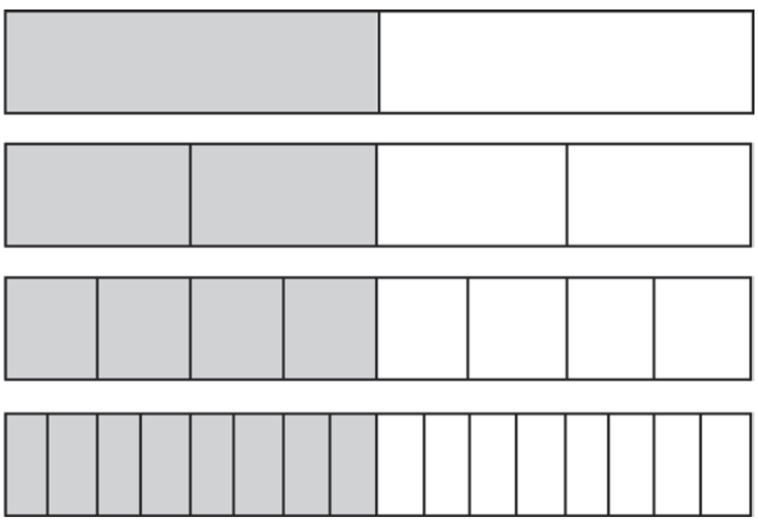


Figura 45 Representação pictórica de $\frac{1}{100}$, 0,01 ou 1%.

É importante considerar que $\frac{1}{100}$ ou 0,01 ou 1% indicam a mesma ideia matemática, mas que possuem regras diferentes para ser manipuladas nas diferentes operações. E o que acontece quando aplicamos a uma representação as regras de outra? Em resumo, as representações podem ser sinônimos matemáticos, mas se mal tratadas podem nos levar a distintas e falsas conclusões. Ampliaremos esses aspectos quando abordarmos operações.

3.6 Frações equivalentes

Uma noção essencial no estudo dos números fracionários é a noção de fração equivalente. Toda fração tem uma classe infinita de frações equivalentes. Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ tem um conjunto de infinitas frações equivalentes: $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}, \ldots$



A noção de fração equivalente é importante para a comparação de frações assim como para o trabalho com as operações de adição e subtração.

3.7 Operações com frações

As operações com os números fracionários devem começar com materiais manipulativos. Com tiras de papel, pode-se trabalhar, principalmente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, todas as operações com frações. Frações equivalentes são decisivas em trabalhos com a adição e a subtração de números fracionários, e atividades com materiais concretos podem fazer a diferença entre a compreensão ou não dessas operações. Também as operações envolvendo a multiplicação e a divisão de frações podem ter o seu pleno entendimento extremamente facilitado com a utilização de materiais manipulativos.

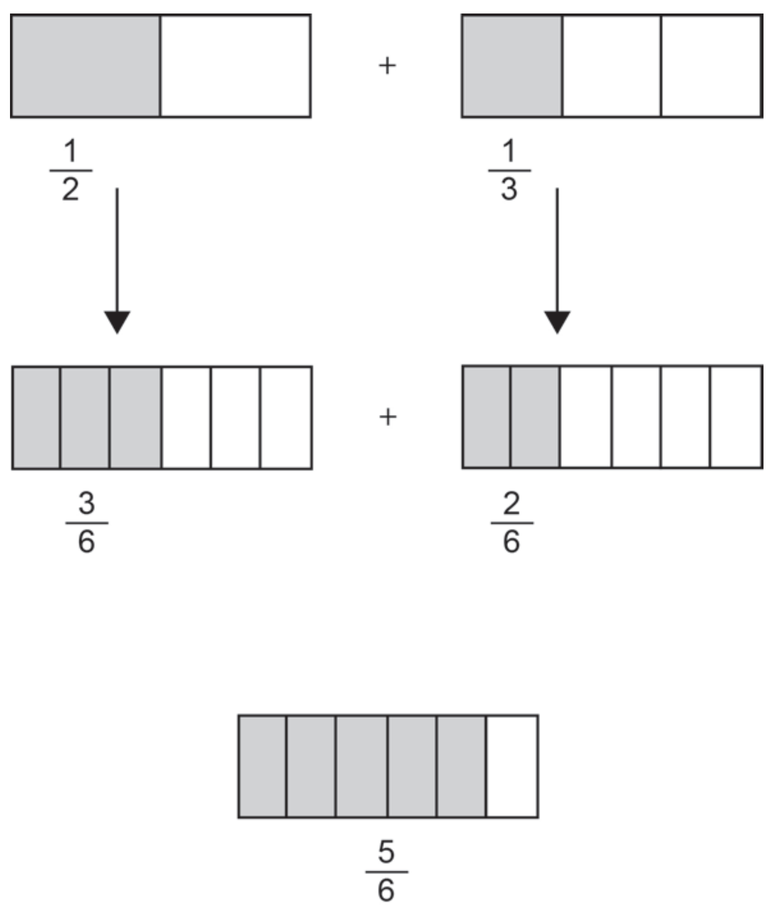
Nos anos iniciais, o ensino das operações com frações deve associar os materiais concretos com representações pictóricas para que o aprendizado ganhe significado para as crianças. Assim, as representações formais seriam o coroamento dessas compreensões.

3.7.1 Adição e subtração

É comum propor a adição e a subtração de frações com o mesmo denominador e, em seguida, como extensão, apresentar frações com denominadores diferentes. Pensamos que deveríamos propor, inicialmente, essas operações com denominadores diferentes, pois são nessas condições que a necessidade de denominadores iguais se apresenta. O denominador de uma fração está associado com a ideia de medida, e sabemos que só podemos adicionar ou subtrair grandezas expressas numa mesma unidade de medida. Exemplificando:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Note que a representação considera o mesmo todo como referência:

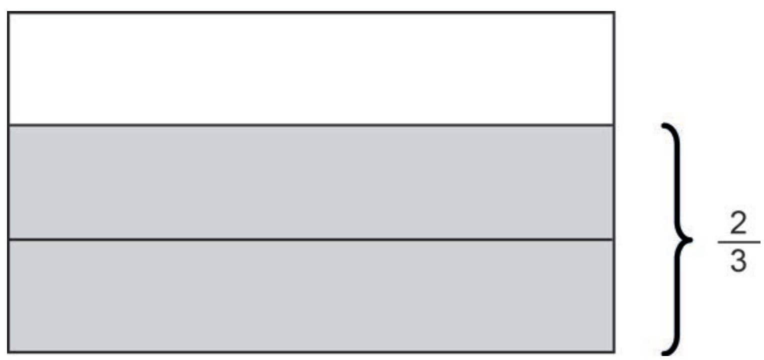


Destacamos que inserir a noção de mínimo múltiplo comum (*mmc*) interrompe o caminho natural da construção da ideia de fração. Além disso, esse conceito não é imprescindível aos cálculos, pelo menos nos anos iniciais.

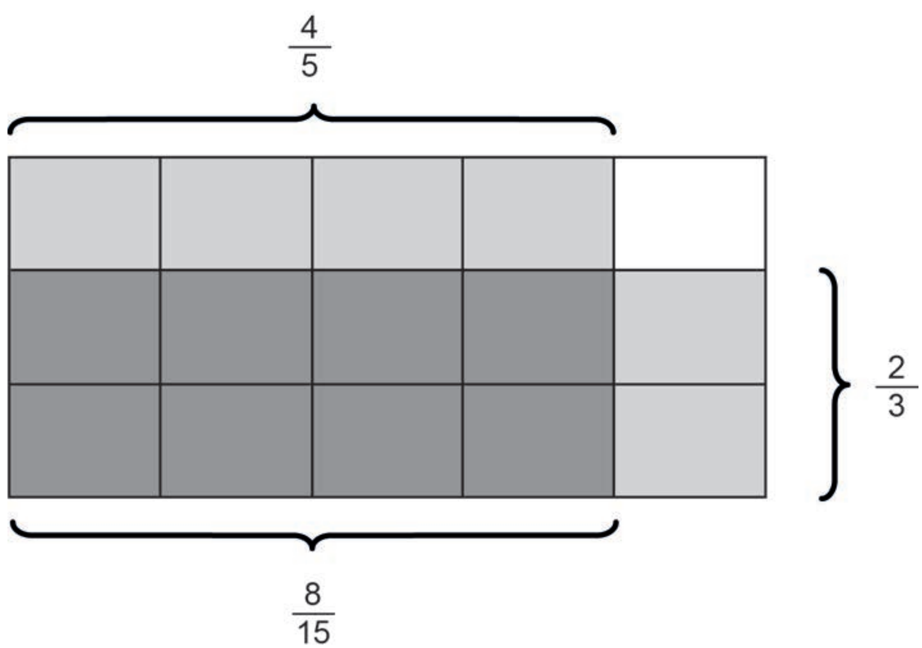
3.7.2 Multiplicação

Resolver a multiplicação $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ significa encontrar "quanto vale $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ de um todo".

Primeiramente, a figura foi dividida em três partes iguais e, em seguida, foram tomadas duas delas ($\frac{2}{3}$ de um todo):



A seguir, os $\frac{2}{3}$ foram divididos em cinco partes iguais e tomadas quatro delas.



Assim, o todo inicial foi dividido em 15 partes iguais e oito delas foram tomadas.

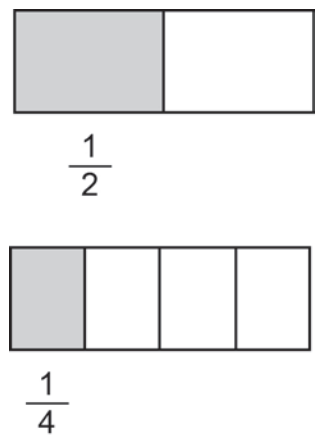
3.7.3 Divisão

Vamos analisar as diferentes divisões com frações.

a) Fração por número inteiro: $\frac{1}{2} \div 2 =$

Metade dividida por 2. Qual é o resultado comparado com o todo inicial?

Resp.: $(\frac{1}{4})$.

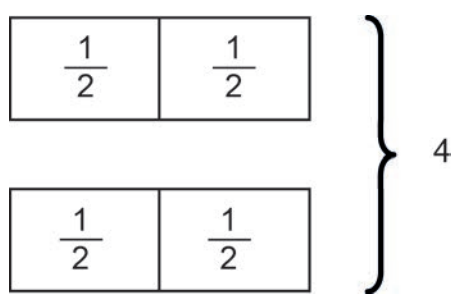


Observe que a parte referente ao resultado $(\frac{1}{4})$ representa a quarta parte do todo inicial.

b) Número inteiro por fração: $2 \div \frac{1}{2} =$

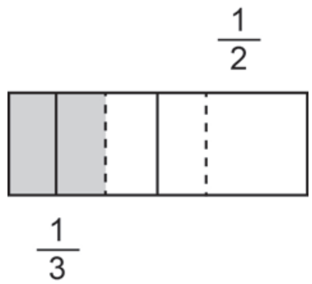
Quantas metades cabem em dois todos?

Resp.: 4.



c) Fração por fração: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$

Na primeira divisão, podemos pensar em “quantas vezes $\frac{1}{3}$ ‘cabe’ em $\frac{1}{2}$” e, na segunda divisão, “quantas vezes $\frac{1}{2}$ cabe em $\frac{1}{3}$”. Vejamos as representações:



Na primeira divisão, a resposta é uma vez e meia ou $\frac{3}{2}$, e, na segunda divisão, a resposta é $\frac{2}{3}$ de vezes.

Os algoritmos envolvendo as frações são até mais simples do que aqueles que envolvem as operações fundamentais nos números naturais, mas em relação a essas técnicas operatórias sua justificação é essencial para o seu aprendizado. Dizer que na divisão de duas frações “conserva a primeira e multiplica pelo inverso da segunda” é algo que necessita de uma comprovação tanto concretamente quanto conceitualmente.

Observe que na divisão $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ realizada anteriormente, podemos encontrar o resultado a partir da divisão de frações equivalentes às frações dadas, cujos denominadores são iguais:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{6}{6}} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

Na segunda divisão proposta, temos, então:

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

Após a realização de divisões a partir desse algoritmo, possivelmente os estudantes poderão perceber o que está ocorrendo com os resultados (regra geralmente ensinada nas escolas). E isso, provavelmente, não se dará nos anos iniciais, os estudantes terão tempo para essa compreensão.

Por fim, é importante destacar que, da mesma forma que precisamos reconceituar a noção de número natural para o pleno entendimento do que é um número fracionário, isso também deve ser feito com as operações fundamentais e, em especial, com a multiplicação e a divisão.

Nos números naturais, a multiplicação sempre aumentava (exceção de um número multiplicado pela unidade) e a divisão sempre diminuía (exceção quando o divisor era a unidade).

Agora, com os números fracionários, dependendo das frações, a multiplicação pode aumentar, mas também pode diminuir. Vejamos o exemplo:

A multiplicação $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

E na divisão de frações, dependendo das frações, o quociente pode aumentar: $2 \div \frac{1}{2} = 4$

3.8 Porcentagem

Um assunto que podemos também trabalhar com os números fracionários é a porcentagem. Porcentagem é uma fração em que o denominador é 100, ou seja, um todo que foi dividido em cem partes iguais.

Assim, se quisermos expressar a fração $\frac{3}{4}$ em porcentagem, devemos transformá-la em uma fração equivalente cujo denominador seja 100. Então, $\frac{3}{4}$ tem como fração equivalente $\frac{75}{100}$ (na fração $\frac{3}{4}$ multiplicamos 3 por 25 e 4 por 25), portanto $\frac{3}{4}$ é o mesmo que 75%.

Ao trabalhar frações e porcentagem simultaneamente, é muito simples determinar 25% de um todo, ou seja, basta determinar $\frac{1}{4}$ desse todo.

3.9 Algumas reflexões a respeito dos obstáculos com números decimais e números fracionários

Estudos revelam que a dificuldade de representação de um número racional está relacionada com a compreensão do conceito. Na pesquisa realizada por Carpenter (1981, apud MATOS & SERRAZINA, 1996, p. 247), 88% dos estudantes de 9 anos e 40% dos estudantes de 13 anos apresentaram como resposta à questão: “Qual dos números seguintes representa 37 milésimos? a) 0,037; b) 0,37; c) 37; d) 37.000”, o número 37.000. Nesse mesmo estudo, quando os estudantes foram questionados sobre “como se escreve três centésimos”, as respostas equivocadas apresentadas foram: “0,300; 3,00; 3,0; 3,100; 00,3; 0,3”.

Em curso de formação continuada, uma professora nos relatou uma situação ocorrida com seus estudantes da 3ª série. Na resolução do problema, fica evidente que, para esse estudante, a representação fracionária nada significa. Observem o problema e a resolução:

Marcos ganhou 100 balas e deu $\frac{1}{4}$ para sua irmã. Quantas balas ela ganhou?

$$\begin{array}{r} 100 \\ \underline{\times 14} \\ 400 \\ \underline{100\ +} \\ 1400 \end{array}$$

Resp.: Ela ganhou 1400 balas.

Um estudo de Monteiro & Costa (1996) identificou estudantes com idades entre 13 e 17 anos que apresentavam dificuldades com os números decimais. As autoras mostram alguns exemplos:

- na adição de 4 com 1,3, alguns estudantes apresentaram como resposta 1,7;
- na comparação entre 1,63 e 1,9, alguns estudantes justificaram que "63 é maior que 9, então 1,63 é maior que 1,9";
- na comparação para ver qual é maior entre 1,63 e 1,4, alguns estudantes responderam que "1,4 é maior que 1,63 porque o primeiro só tem décimos enquanto o outro tem décimos e centésimos".

Esses exemplos indicam que provavelmente o sistema de numeração decimal não foi convenientemente compreendido pelos estudantes.

O ensino a partir da aplicação de regras mecanizadas, como, por exemplo, "ao se multiplicar um número inteiro por 10 basta acrescentar um zero à direita do último algarismo", representará um obstáculo importante, pois quando se trata da multiplicação por números decimais, essa regra não vale. Daí, não seria estranho encontrar 437,560 como resposta para $437{,}56 \times 10$, ou 30,15 para $3{,}15 \times 10$.

O esforço para que as crianças compreendam as diferenças entre os números naturais e os números decimais precisa ser intencionalmente enfrentado pelo professor. Se as crianças fixarem a regra "quanto maior o número de dígitos maior é o valor do número", provavelmente continuarão a aplicá-la para os decimais, cometendo equívocos decorrentes da forma com que lhes foi ensinado. Vejam alguns exemplos de erros, a partir de questões colocadas aos estudantes, e as justificativas apresentadas por eles:

- Ordenar do menor para o maior os seguintes números: 4,5; 4,15; 4,05. A resposta mais frequente é: 4,05 < 4,5 < 4,15. Explicação: "O menor é o que tem um zero, pois o 5 é menor que 15".

- Qual é o maior número entre: 0,09; 0,385; 0,3; 0,1814? A resposta mais frequente é 0,1814. A explicação é do mesmo tipo da questão anterior. É feita a leitura do número depois da vírgula como se se tratasse de um número inteiro.
- Intercalar um decimal entre 1,23 e 1,24. Resposta: “Não há nenhum número entre 1,23 e 1,24. O número 1,24 é o número seguinte a 1,23”.

Muitas vezes, os estudantes “inventam regras” que lhes permitam obter resultados corretos. Essas regras podem ser desconhecidas para o professor se não conduzirem a erros. Algumas regras implícitas para ordenar decimais que muitas vezes os estudantes estabelecem são:

- “É menor o número que tem mais algarismos depois da vírgula”. A aplicação dessa regra, que é falsa, pode conduzir a resultados certos em alguns casos, por exemplo: $12{,}04 < 12{,}4$; no entanto, é falsa em $12{,}413 < 12{,}4$.
- “Aplicar a ordenação dos números inteiros aos números que estão antes da vírgula e aos que estão depois da vírgula”. Muitas vezes, pode-se chegar a resultados errados, por exemplo: $4{,}15 > 4{,}5$ (15 é maior que 5).

Outras vezes, os estudantes aplicam regras válidas para outras situações, como por exemplo:

- Na adição de duas quantidades, não se usa a regra conhecida (para números naturais); é por isso que as crianças fazem tranquilamente:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{7}.$$

- Na simplificação de frações, regras válidas para multiplicação não são válidas para adição, por exemplo:

Na fração $\frac{15}{20} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3}{4}$, é possível simplificar os fatores 5 do numerador e do denominador, pois $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, enquanto na adição $\frac{9}{3} = \frac{8+1}{2+1} = \frac{4}{1} = 4$ a simplificação resulta em erro, pois $3 = \frac{9}{3} \neq 4$.

Na proposição de problemas, é necessário ter muito cuidado com as possíveis interpretações que os estudantes podem ter. Vejamos um exemplo: “Em um treino de futebol, Robinho chutou 10 vezes ao gol e marcou 3 gols e, em seguida, chutou 6 vezes e marcou 3 gols”. Como expressar os gols feitos por Robinho? Vamos analisar quatro possibilidades de interpretação:

1º modo:

$\frac{10}{3}+\frac{6}{3}=\frac{16}{3}=5,3$ é a média de gols de Robinho nesse treino.

2º modo:

$\frac{3}{10}+\frac{3}{6}=\frac{18}{60}+\frac{30}{60}=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}=0,8$

Isso significa que Robinho acertou 80% dos chutes.

3º modo:

- 3 em 10 resulta aproximadamente em 33%;
- 3 em 6 resulta exatamente 50%;
- 33 + 50 = 83.

Então, a média é de $83 \div 2 = 41,5\%$. Portanto, Robinho acertou 41,5%.

4º modo:

- 16 chutes correspondem a 100%.

Os 6 gols marcados correspondem a x (um valor desconhecido). Podemos determinar esse valor desconhecido resolvendo a equação resultante $16 \times x = 6 \times 100$, ou, por meio do cálculo resultante de uma regra de três simples: $(6 \times 100) \div 16$ é aproximadamente 37%. Portanto, Robinho acertou 37% dos chutes.

Os quatro modos de calcular são corretos? São equivalentes? Caso não, o que houve de errado?

Esse exemplo nos indica que diante de um enunciado ou problema é preciso compreender o que é informado e o que é pedido; em seguida, é preciso traduzir a linguagem de apresentação para uma linguagem matemática e então, escolhida esta, é preciso trabalhar com as normas específicas a ela e, inclusive, a interpretação do resultado obtido (sem se esquecer de compará-lo com o bom senso).

3.10 Considerações finais

Nesta unidade, procuramos mostrar a necessidade de trabalhar a noção de número fracionário nas mais variadas situações e em diferentes contextos em que ele pode modelar para que as mais diversas relações matemáticas expressas na notação $\frac{a}{b}$ tenham significado e sejam plenamente compreendidas. Como a primeira ampliação dos conjuntos numéricos, esse conteúdo matemático é uma excelente oportunidade de aprofundar ideias sobre números e operações matemáticas como consequência de novas situações-problema práticas ou especulativas propostas para a ciência matemática.

Assim como fizemos com as operações fundamentais envolvendo os números naturais, a articulação entre as ideias e os algoritmos das operações com os fracionários é um elemento a ser destacado.

O conteúdo de frações costuma ser um dos mais difíceis nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e tal fato é atestado pelo baixo rendimento dos estudantes. A construção do sentido de número fracionário não é uma tarefa que possa ser resolvida em poucas aulas. É preciso encontrar caminhos para que o estudante identifique essas quantidades em seu contexto cotidiano e possa se apropriar da ideia de número fracionário, usando-o com significado. É evidente que ninguém comenta que comeu 0,25 de uma pizza, mas é importante compreender que esse número corresponde ao mesmo $\frac{1}{4}$ de uma pizza que foi dividida em quatro partes iguais.

As pesquisas sobre essa temática são muitas, embora ainda não se tenha muita certeza sobre a melhor maneira de se abordar esse tema nos anos iniciais. Contudo, é certa a constatação de que os símbolos são obstáculos à compreensão inicial do significado desses números pela criança. Isso quer dizer que se deve dedicar razoável tempo inicial de aprendizagem não simbólica das frações.

É possível trabalhar uma variedade grande de problemas desafiantes para a criança, antes mesmo de ela começar a aprender frações. Eles servirão para ela pensar nessas quantidades, de maneira significativa e real, e podem servir de ocasião para a introdução de nomes das partes que aparecem.

3.11 Estudos complementares

O leitor poderá ampliar seus estudos sobre frações consultando um interessante material produzido pelo *Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação* (ICMC) da USP de São Carlos, que se encontra disponibilizado na *web*: <http://educar.sc.usp.br/matematica/m5let2.htm>. Acesso em: 18 jun. 2010.

Consulte também:

IMENES, L. M.; LELLIS, M.; JAKUBO, J. *Frações e números decimais*. São Paulo: Atual, 1990. (Coleção Prá Que Serve a Matemática).

Trata-se de um livro paradidático muito interessante, que em uma linguagem simples apresenta as frações e números decimais a partir de fatos históricos e cotidianos.

MACHADO, N. J. *O pirulito do pato*. São Paulo: Scipione, 1989. (Coleção História de Contar).

Trata-se de outro livro paradidático indicado para crianças que estão iniciando a escolarização. Conecta a Literatura Infantil com a Matemática numa história muito divertida.

RAMOS, L. F. *Doces frações*. São Paulo: Ática, 2000.

Esse é outro livro que sugere a conexão entre a Literatura Infantil e a Matemática. Conta a história de uma avó que prepara tortas para serem vendidas aos pedaços.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *O ensino de Matemática no 1º grau*. São Paulo: Atual, 1987. (Coleção Magistério).

Trata-se de um livro muito bom que aborda a Matemática na formação do professor que a ensina.

> La estadística es la ciencia de los datos. Con más precisión, el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos. La estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Aunque es una ciencia Matemática, no es un subcampo de la Matemática. Aunque es una disciplina metodológica, no es una colección de métodos.
>
> Moore. *Teaching Statistics as a respectable subject*.

UNIDADE 4

O desenvolvimento do pensamento estocástico

4.1 Primeiras palavras

Esta unidade será dedicada a reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento estocástico na formação dos professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Verificar que podemos inferir informações e conhecimentos sobre uma população a partir dos dados coletados de uma amostra significativa é outro conteúdo importante no contexto atual, em que o raciocínio probabilístico predomina sobre o determinístico nos mais variados campos científicos. A Estatística pode ser trabalhada desde a Educação Infantil e pode preparar a criança para pensar sobre fatos, fenômenos e eventos em termos de probabilidade.

4.2 Problematizando o tema

Qual a razão da inserção dos raciocínios estatístico, probabilístico e combinatório no currículo de Matemática desde os Anos Iniciais da Escola Básica? Quais as relações ou implicações dessa inserção com a formação e atuação dos professores nesse nível de ensino? As propostas curriculares de Matemática justificam a importância desses temas na formação dos estudantes, destacando que isso contribuirá para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, decorrente da demanda social atual. Tais propostas sugerem também que o bloco Tratamento da Informação integre as noções de estatística, de probabilidade e de combinatória.

Contudo, Lopes (2010a) pondera que se a *estocástica* (termo utilizado para tratar da probabilidade integrada à estatística) for incluída apenas como mais um tópico a ser estudado nas aulas de Matemática, priorizando a parte da estatística descritiva, seus cálculos e fórmulas, em nada contribuirá para o desenvolvimento do pensamento estatístico e probabilístico. Esses pensamentos envolvem a estratégia de resolução de problemas e a análise sobre os resultados obtidos.

Lopes (2010a, p. 60) comenta que a competência em probabilidade e estatística permite

> aos alunos uma sólida base para desenvolverem estudos futuros e atuarem em áreas científicas como a biologia e as ciências sociais. Além disso, ao considerarmos o mundo em rápida mudança como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões.

Nesse sentido, faz-se necessário tratar essa temática por meio de problemas próximos dos contextos dos estudantes, para que eles "possam observar e construir os eventos possíveis, por meio da experimentação concreta de coleta e de organização de dados" (LOPES, 2010a, p. 58-59). Nessa perspectiva didática, a aprendizagem da estocástica cumprirá o papel de complementar a formação dos estudantes significativamente.

4.3 O tratamento de dados

A perspectiva teórica que consideramos pertinente para a formação do pensamento estocástico requer que o professor assuma uma postura de respeito aos saberes dos estudantes. O professor precisará discutir temáticas do contexto que interferem na qualidade de vida das pessoas e que normalmente são comentadas na sala de aula. A análise de questões sociais, que aparentemente não interessariam aos estudantes, deverá fazer parte das aulas de Matemática. Essa análise de fatos que determinam a condição de vida do cidadão (como a poluição de rios e oceanos, a escassez da água, o problema do lixo urbano e industrial, a precariedade da saúde, o trabalho infantil e muitos outros) faz parte dos chamados temas transversais nos Parâmetros Curriculares Nacionais e, quase sempre, é acompanhada de índices, tabelas e gráficos, os quais podem ser discutidos em sala de aula.

O professor precisará prestar atenção ao que os estudantes dizem e escrevem e deverá observar no trabalho de sala de aula se estes estão "fazendo" Matemática. Essa perspectiva teórico-metodológica contribuirá para que o professor perceba o que eles compreendem sobre as ideias matemáticas. Essas informações conduzirão o planejamento do professor.

A problematização dos temas relacionados à estocástica, princípio norteador da aprendizagem da Matemática, já mencionado anteriormente, pode possibilitar o desenvolvimento do trabalho com estatística e probabilidade na escola. A Estatística também se desenvolveu por meio da resolução de problemas de ordem prática da humanidade. Lopes (2010a) diz que não teria sentido propor uma coleta de dados desvinculada de uma situação-problema, nem a construção de tabelas e gráficos desvinculados de um contexto ou relacionados a situações que não são próximas dos estudantes, pois não garantiria o desenvolvimento da criticidade deles.

Batanero & Godino (2010) explicam que a Estatística costuma ser dividida em *estatística descritiva* e *estatística inferencial*. A estatística descritiva tem como finalidade apresentar resumos de um conjunto de dados e suas características, sendo geralmente representada graficamente. Os dados são usados para fins comparativos e não são utilizados princípios da probabilidade. O essencial, nesse caso, é a descrição do conjunto de dados, sem a pretensão de estender as conclusões a outros dados ou a uma população. A inferência estatística, pelo contrário, estuda os resumos de dados com referência a um modelo probabilístico. Ou seja, um conjunto de dados analisados que se constitui em uma amostra de uma população, sendo o interesse principal prever o comportamento de toda a população.

Geralmente, as pesquisas realizadas por órgãos governamentais têm interesse em conhecer a totalidade de uma população. O estudo estatístico realizado nessa perspectiva denomina-se Censo, que, no Brasil, tem sido realizado a cada 10 anos.

O currículo de Matemática tem de incluir situações que envolvam as ideias de acaso e de aleatório, pois, do contrário, estaremos reduzindo o seu ensino ao verdadeiro e falso de suas proposições.

Godino et al. (1987 apud LOPES, 2010a, p. 63) defendem que a educação da intuição probabilística na escola básica possibilite que os estudantes se tornem mais conscientes da “natureza probabilística de distintos jogos de azar (loterias, máquinas caça-níqueis, bingos, etc.), jogos que são magníficos negócios para aqueles que os promovem e um risco desproporcional de perder dinheiro para aqueles que apostam”.

A ação docente para que essa perspectiva seja inserida nas aulas de Matemática é primordial. Podemos evocar Paulo Freire, para quem a educação é um ato político, e o educador matemático D’Ambrosio (1996), o qual destaca que se algum professor julga sua ação politicamente neutra, não entendeu nada de sua profissão.

O estudo da probabilidade e chance requer que os estudantes entendam conceitos e termos relacionados à chance, à incerteza e à aleatoriedade, com as quais cotidianamente convivemos. Outras ideias importantes que devem ser discutidas nas séries iniciais dizem respeito ao fato de que algumas vezes nossas intuições são incorretas e nos levam a conclusões erradas. Lopes (2010a, p. 70) destaca que para uma pessoa ser educada estatisticamente, deverá “ser capaz de comunicar efetivamente as discussões sobre os resultados de investigações estatísticas, críticas estatísticas ou argumentos probabilísticos que clamam estar baseados em alguma informação”.

As crianças têm de criar e recriar conhecimentos, precisam desenvolver a curiosidade, a imaginação e a criatividade, o que justifica a presença da Matemática desde a Educação Infantil. Nessa perspectiva, o desenvolvimento do pensamento estatístico e probabilístico deverá ser inserido nessa faixa de escolarização, contribuindo para a formação desde a infância. Propostas de tarefas que envolvem aleatoriedade e estimativas, experiências de coletar, representar e analisar dados que sejam significativas para as crianças podem ampliar o universo de capacidades e acentuar o potencial criativo delas.

As orientações curriculares indicam que desde a Educação Infantil é importante a inclusão de experiências com análise de dados para que os estudantes sejam capazes de classificar objetos de acordo com seus atributos e que possam organizar e representar dados usando objetos concretos, desenhos e gráficos. São indicadas atividades informais de classificação para que as crianças se habituem a formular questões, testar suas hipóteses e para que, gradativamente, possam progredir de modo a serem capazes de ver um conjunto de dados como um todo e a usarem as características estatísticas para comparar um conjunto de dados.

Batanero & Godino (2010) sugerem que sejam realizadas atividades a partir de características da classe e dos estudantes na primeira etapa da escolarização, as quais ajudarão no desenvolvimento do raciocínio estatístico e probabilístico. Os autores consideram importante envolver os estudantes em projetos em que estes reconheçam seus próprios dados a partir da observação, como por exemplo:

- De que cor são os olhos das crianças da sala?
- Qual tipo de trabalho exercem as mães e/ou os pais?
- Com que tipo de calçados as crianças da sala estão em um determinado dia?

Segundo os referidos autores, atividades desse tipo contribuem para os estudantes perceberem que cada fato isolado é parte de um todo (distribuição dos dados) e que há questões que não podem ser respondidas com apenas um dado, mas sim com uma distribuição de dados.

Encontramos em Lopes (2010a, p. 65) exemplos de atividades, de diferentes partes do mundo, que podem favorecer o desenvolvimento do pensamento probabilístico desde o início da escolarização. Apresentaremos uma delas.

A proposta era fazer a ordenação de eventos de acordo com a probabilidade de ocorrência. Para tanto, foram apresentadas às crianças (de 4 a 11 anos) quatro cartas com as seguintes afirmações:

– Talvez chova amanhã.

– Um elefante vai passar em frente à escola amanhã.

– Eu vou ganhar na loteria.

– Eu virei à escola amanhã.

Foi solicitado às crianças que colocassem as cartas em ordem: do que fosse mais provável para o que fosse menos provável.

A ordenação das cartas deveria vir acompanhada de *argumentos* (ou as razões) para que as crianças optassem por tal ordem.

Na sequência, foi sugerida a introdução de uma *escala*, primeiramente utilizando o vocabulário: “certo”, “possível” e “impossível”.

A autora comenta que as crianças de seu estudo, ao longo dessa atividade, foram incentivadas a criar outras categorias, tais como “certamente provável”, “provável”, “improvável” e “certamente improvável”.

Após esse momento, introduziram a *escala numérica*: 0 para o impossível e 1 para o certo.

Observamos na dinâmica desenvolvida durante a atividade que novos conceitos foram trabalhados sem que tenham sido formalizados.

Outro aspecto relevante para que a estocástica seja abordada refere-se à habilidade de construir, ler e interpretar tabelas e diferentes gráficos que serão solicitados com frequencia na resolução de problemas, tanto no contexto escolar quanto fora dele. Nesse sentido, tarefas que conduzam os estudantes a selecionar, organizar, relacionar e interpretar dados, informações e conhecimentos representados de diferentes formas, para enfrentar situações-problema, possibilitará que, aos poucos, os estudantes adquiram uma visão crítica e possam tomar decisões a partir de análises.

São vários os temas que podem fazer parte das aulas de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e que proporcionam a oportunidade de se trabalhar a organização e a representação de dados.

Uma atividade inicial pode se dar a partir do levantamento das idades dos estudantes da turma. O levantamento poderá ser feito, inicialmente, por meio da tabulação e organização desses dados em uma tabela, como a exemplificada a seguir, e, posteriormente, poderá ser construído um gráfico de colunas. Utilizando papel quadriculado, as crianças terão a oportunidade de pintar quadradinhos correspondentes ao número de crianças de cada idade:

Tabela 1 Número de crianças e idade.

Idade (em anos)	Número de crianças da turma
5	2
6	13
7	10

A tabela de frequência está organizada de modo que na primeira coluna foi registrada a categoria da variável em estudo (no caso, idade, em anos, das crianças de uma turma) e, na segunda coluna, a variável da frequência absoluta, em que se registra o total de elementos da amostra (turma de crianças da classe) que pertencem a cada categoria. Há tabelas que têm ainda uma terceira coluna, a das frequências relativas (ou percentuais), em que se coloca, para cada categoria, o valor que se obtém dividindo a respectiva frequência absoluta pelo total. A quarta coluna, relativa à porcentagem, também é bastante utilizada para o registro de dados.

Utilizando a tabela anterior, teríamos então:

Tabela 2 Número de crianças por idade, com frequência relativa e percentual.

Idade (em anos)	Número de crianças da turma (frequência absoluta)	Frequência relativa	Porcentagem
5	2	0,08	8%
6	13	0,52	52%
7	10	0,4	40%

Notem como fica a tabela com a linha relativa ao total de dados:

Tabela 3 Número de crianças por idade, com dados totalizados.

Idade (em anos)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Porcentagem
5	2	0,08	8%
6	13	0,52	52%
7	10	0,4	40%
Total	25	1	100%

Tabelas desse tipo contribuirão para a construção e análise de gráficos de setores que nos reportaremos ainda nesta unidade.

A partir do levantamento dos dados, da construção da tabela de frequência pode ser construído o gráfico de colunas. O gráfico a seguir representa os dados trazidos na tabela que estamos nos referindo.

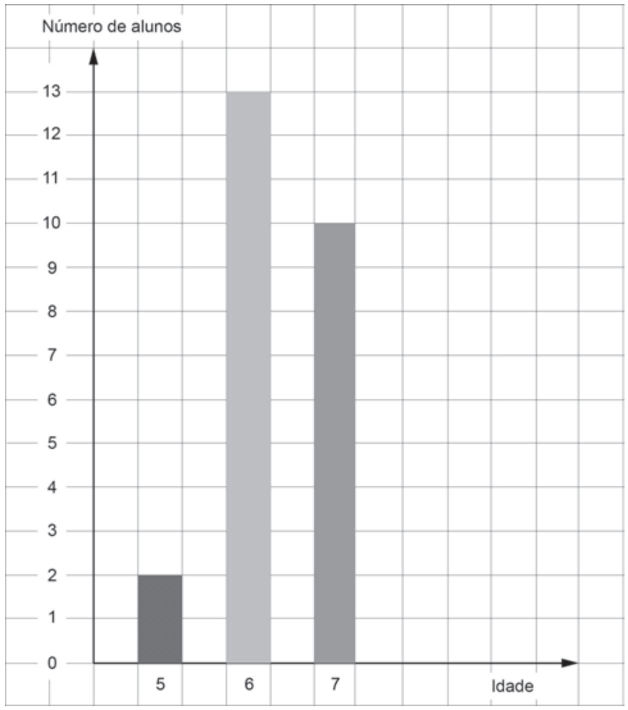


Gráfico 1 Gráfico de colunas: Número de crianças por idade.

Será fundamental explorar com as crianças o gráfico de colunas, ou seja, será importante explicar-lhes a representação dos dois eixos. No eixo horizontal serão escritas as idades das crianças da sala e, no eixo vertical, a contagem correspondente a cada uma das idades. O papel quadriculado será útil para iniciar o estudo de gráficos, pois facilita que seja obedecida a mesma distância entre as linhas.

O gráfico de barras simples também é bastante utilizado para representar a organização dos mesmos dados anteriores.

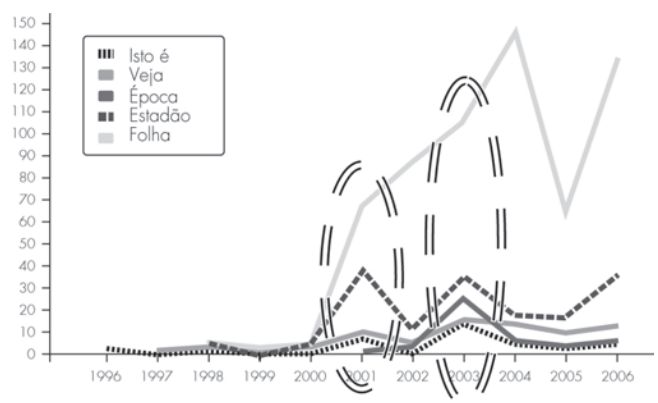


Gráfico 2 Gráfico de barras: Número de crianças por idade.

Se a escola dispuser de laboratório de informática, esses gráficos poderão ser construídos com aplicativos do próprio sistema de computador, como, por exemplo, com planilhas do tipo *Excel*.

A representação desses mesmos dados não seria indicada em um gráfico de linhas. O leitor saberia dizer por quê? Investigar a respeito será bastante interessante.

O gráfico de linhas é indicado para os chamados dados contínuos, que resultam de medições de, por exemplo, tempo e altura das pessoas. Já os gráficos de colunas, ou barras, são indicados para os chamados dados discretos, resultantes da contagem, por exemplo, do número de estudantes, de carros, etc.

Já a representação desses dados em gráfico de setores poderá ser feita desde que o total de crianças da turma seja conhecido. Gráficos de setores são utilizados quando se deseja comparar cada uma das partes com o todo da população.

Nos anos iniciais, não é indicado que os estudantes construam gráficos de setores, pois tal construção envolve o conhecimento de elementos da circunferência e de círculo, que é a figura geométrica representada nesse tipo de gráfico. Na construção de um gráfico de setores, o círculo deverá ser dividido em tantos setores circulares quantas forem as categorias consideradas na tabela de frequência. O ângulo de cada setor será proporcional à frequência observada na classe que lhe corresponde. Para a construção desses setores, é necessário que se domine conceitos sobre ângulos e proporcionalidade, assuntos que não são estudados nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, é interessante entender o setor circular correspondente a cada círculo. Nesse caso, os estudantes poderão interpretar dados apresentados em gráficos de setores. Muitas vezes, o gráfico de setor está expresso em porcentagem. No caso dos dados trabalhados anteriormente, teríamos:

Gráfico 3 Gráfico de setores: Número de crianças por idade.

Também é muito utilizado nos anos iniciais o gráfico de setores com dados percentuais. Com os mesmos dados da tabela do número de crianças por idade, temos um gráfico de setores com dados percentuais.

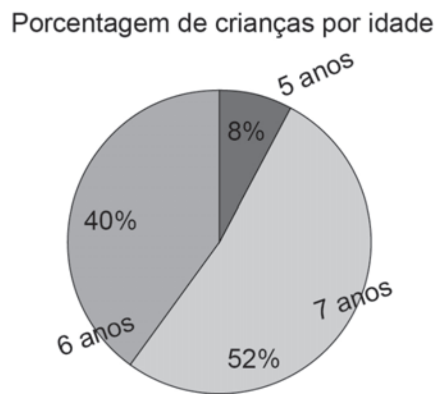


Gráfico 4 Gráfico de setores: Porcentagem de crianças por idade.

Como destacado anteriormente, as habilidades de ler gráficos e interpretar tabelas não são assuntos apenas para serem utilizados no ambiente escolar. Para ler jornais e revistas, não basta ser alfabetizado em língua materna. Milhares de informações são divulgadas a todo o momento pela rede mundial de computadores via *internet* e não podemos esquecer que as crianças desta geração dominam muito mais as tecnologias informáticas do que muitos adultos. Assim, para acompanhar esse desenvolvimento de forma crítica e criativa, é indispensável saber ler e compreender tabelas e gráficos.

Além dos tipos de gráficos citados anteriormente, há outros. Mas nos anos iniciais, são basicamente estes os mais explorados.

Ultimamente, temos convivido com muitos dados apresentados em gráficos pictóricos. Os pictogramas são representações gráficas que utilizam figuras, o que faz com que essas representações se tornem ilustrações de uma situação. Como alertam alguns pesquisadores, há casos em que essas representações são utilizadas erroneamente, como o apresentado por Martins, Loura & Mendes (2007, p. 78), em que se pretende mostrar que a quantidade de leite de uma determinada marca, vendida em um determinado período, duplicou.

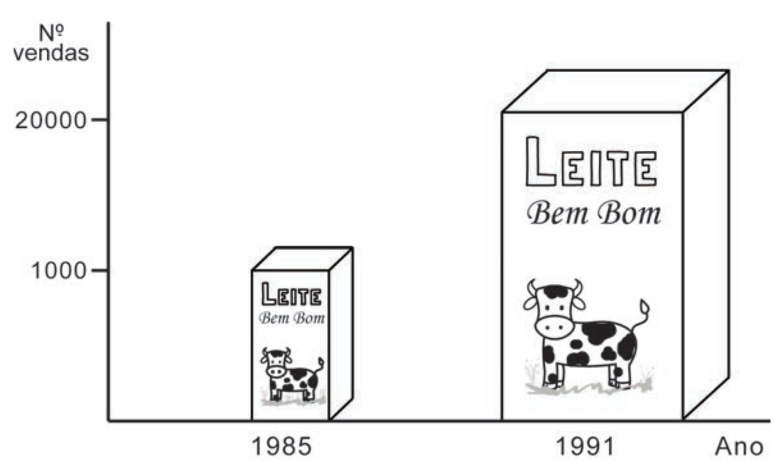


Gráfico 5 Gráfico pictórico equivocado (MARTINS, LOURA & MENDES, 2007, p. 78).

Verificamos que de fato a representação da altura da caixa de leite em 1991 é o dobro da representação de 1985. Contudo, podemos ter a impressão que o aumento foi bem mais que o dobro, induzindo ao erro de análise. As autoras sugerem que se se quiser manter o gráfico fazendo uso da caixa de leite, deve-se manter outros elementos dela e dobrar apenas a altura.

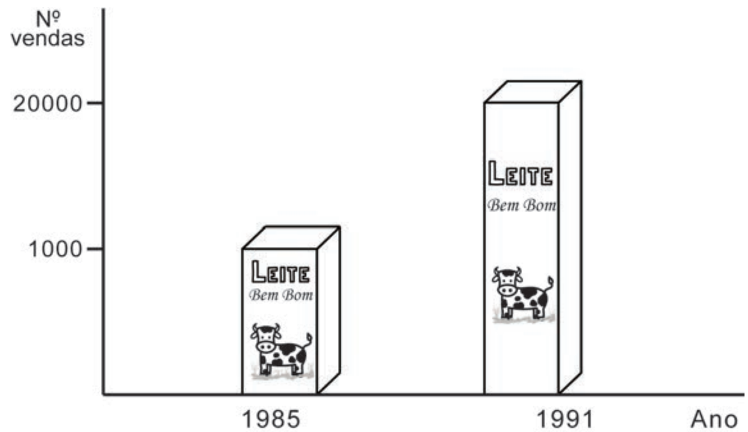


Gráfico 6 Gráfico pictórico aceitável (MARTINS, LOURA & MENDES, 2007, p. 78).

Podemos dizer, depois dessas considerações, que o bom senso será um elemento muito importante em práticas escolares que farão parte das aulas em que o desenvolvimento do conteúdo de análise de dados se fizer presente. Como já comentado, o professor deverá ter em mente que a formação do pensamento estocástico requer tempo e muita reflexão. A escolha das temáticas precisa emergir do contexto dos sujeitos que estão em processo de aprendizagem. A análise de questões sociais, que aparentemente não interessariam aos estudantes, poderá ser inserida desde os anos iniciais de escolarização, contribuindo para a formação de cidadãos mais conscientes do papel que desempenham na sociedade.

Além disso, destacamos que não basta apenas introduzir esses conteúdos nas aulas de Matemática. É preciso analisar e relacionar criticamente os dados apresentados, ponderando até mesmo a veracidade deles. Fazer essa análise é o que nos permitirá desenvolver o pensamento estatístico. Como ressalta Lopes (2010a, p. 60), "não é suficiente ao aluno desenvolver a capacidade de organizar e representar uma coleção de dados, faz-se necessário interpretar e comparar esses dados para tirar conclusões".

Na próxima sessão, apresentaremos algumas reflexões sobre o pensamento combinatório e o probabilístico, que são igualmente importantes na construção do pensamento estocástico.

4.4 O pensamento combinatório

Ao trabalharmos com as ideias de multiplicação, uma delas refere-se ao pensamento combinatório, que muitas vezes encontra apoio metodológico em desenhos e pinturas. Um problema bastante comum é aquele que se refere às possibilidades de "combinar" camisetas e bermudas e que é colocado aos estudantes em início de escolarização. Por exemplo, "no armário de Mariana há três blusas de cores diferentes e duas calças também de cores diferentes. De que maneira Mariana pode escolher a roupa para se vestir?".

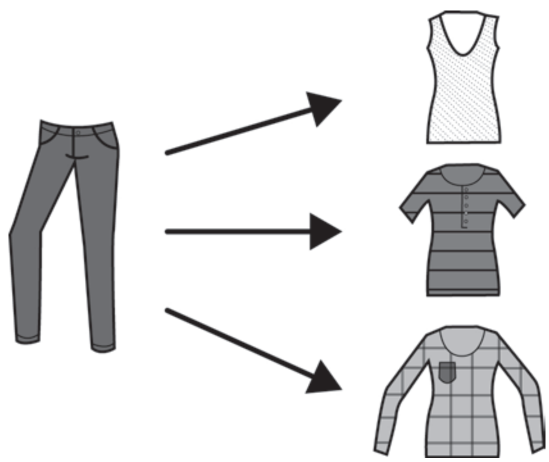


Figura 46 A calça mais escura com cada uma das blusas forma três possibilidades para Mariana se vestir.

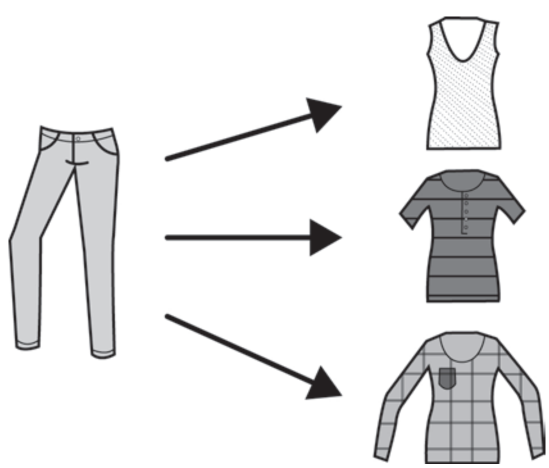


Figura 47 A calça mais clara combinada com cada uma das blusas forma três possibilidades para Mariana se vestir.

Depois de explorar a situação problema, utilizando o desenho das peças de roupas, geralmente os estudantes são questionados sobre o número de maneiras diferentes que Mariana pode se vestir. A sucessão de tarefas semelhantes à apresentada será promotora do desenvolvimento do pensamento combinatório e auxiliará na organização e apresentação de dados antes da introdução formal da multiplicação. Além disso, os problemas de raciocínio combinatório contribuem para o desenvolvimento de conceitos de probabilidade e estatística.

4.5 O pensamento probabilístico

O conhecimento informal, ou intuitivo, da probabilidade de ocorrência de acontecimentos faz parte das decisões que tomamos todos os dias. Mas é na escola que esse conhecimento precisa ser trabalhado para que possamos tomar essas decisões de maneira mais bem fundamentada. Tal conteúdo é tão importante quanto os outros estudados na escola, como Geometria ou Aritmética.

A resolução de problemas é um bom começo para o trabalho com probabilidade na escola. Vamos supor a seguinte situação-problema:

a) Lançar uma moeda 100 vezes. Mas, antes de iniciar os lançamentos, responda: quantas vezes você espera que saia “cara”?

b) Faça as jogadas. Registre os resultados em um tabela semelhante ao apresentado a seguir:

Tabela 4 Tabela de registro dos lançamentos do dado.

Face	Tabulação das jogadas	Total de vezes
Cara		
Coroa		

c) Analise sua predição inicial (item a). Ela se confirmou ou não?

A situação apresentada coloca em xeque o que pode ocorrer mesmo que a probabilidade de um evento esteja correta. Se uma moeda tem duas faces, a probabilidade de sair “cara” é igual a probabilidade de sair “coroa”, ou seja, 50% de chance para cada uma. A ocorrência de 50 eventos com cada face pode não acontecer de fato.

Essa discussão inicial pode ser trazida para os anos iniciais no bloco Tratamento de Informações, considerando que cada vez mais contextos como esse têm entrado no nosso cotidiano, tais como o controle de qualidade de peças, dados relativos a nascimentos e à expectativa de vida, entre outros. Além disso, os princípios probabilísticos têm se tornado instrumento de trabalho para muitas áreas do conhecimento. Muitos fenômenos são tratados matematicamente mediante simulações aleatórias.

O desafio que temos está em como introduzir esse conteúdo na Matemática escolar. Há a necessidade de se romper com a visão determinista que essa disciplina constrói. Não é um tema fácil de ser aprendido nem ensinado.

Lidar com o acaso e o azar não é tarefa fácil, nem intuitiva. Estudos apontam que as pessoas não têm intuição probabilística da mesma forma que têm a intuição geométrica ou visual, por exemplo.

Santos (2010) explica que não é difícil para um estudante aceitar que a probabilidade de obter cara no lançamento de uma moeda é a mesma de obter coroa; no entanto, durante a realização do experimento, a incerteza se torna um conflito. Ocorrem muitas dúvidas sobre quantos seriam os lançamentos mínimos para que o experimento seja confiável.

Uma proposta que a autora sugere consiste em colocar os estudantes diante de experimentos, possibilitando-os de realizar alguns deles, em que suas crenças a respeito de um evento sejam explicitadas. O papel do professor nesse processo será o de propiciar os experimentos, ouvir o que os estudantes têm a dizer e confrontar pontos de vista. A ele cabe ainda promover a troca de opiniões e ponderar sobre as respostas dos estudantes. O importante é que todos entrem no movimento proposto pela atividade e que as crianças possam se desenvolver em um ambiente de desafios, problematizador, em que a curiosidade possa ser trabalhada de forma intencional pelo professor.

4.6 Algumas considerações

Nesta unidade, apresentamos uma discussão sobre o desenvolvimento do pensamento estocástico. E, como sempre, há muito ainda a ser estudado e investigado. Fica aqui o convite para conhecer mais a respeito desse campo da Educação Matemática.

4.7 Estudos complementares

No artigo de Souza (2008), o leitor poderá conhecer uma experiência muito interessante de uma proposta didático-pedagógica para a abordagem de estatística realizada com crianças de 5 e 6 anos de uma escola municipal.

SOUZA, A. C. A análise das etapas de uma proposta didático-pedagógica para a abordagem de algumas idéias estatísticas com alunos de Educação Infantil. In: LOPES, C. E.; CURI, E. (Orgs.). *Pesquisas em Educação Matemática*: um encontro entre a teoria e a prática. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008. p. 21-42.

Lopes & Moura (2002) propõem, numa linguagem simples, diferentes possibilidades de desenvolver o estudo de estocástica com as crianças.

LOPES, C. E. A.; MOURA, A. R. L. (Orgs.). *Encontro das crianças com o acaso, as possibilidades, os gráficos e as tabelas*. Campinas: Editora Gráfica FE/Unicamp, Cempem, 2002. v. 1.

Em outro livro de Lopes & Moura (2003), o leitor poderá ampliar seu conhecimento sobre a temática apresentada.

LOPES, C. E. A.; MOURA, A. R. L. (Orgs.). *As crianças e as idéias de número, espaço, formas, representações gráficas, estimativa e acaso*. Campinas: FE/Unicamp, 2003.

UNIDADE 5

A Matemática na Educação Infantil

5.1 Primeiras palavras

A Educação Infantil é uma etapa importante da escolarização desde que os profissionais desenvolvam com as crianças trabalhos compatíveis com o desenvolvimento físico, intelectual, afetivo e social. Nesta unidade, ideias e aspectos da Matemática serão analisados e discutidos na perspectiva de identificar trabalhos promissores com as crianças envolvendo essa área do conhecimento.

5.2 Problematizando o tema

Na Educação Infantil, aspectos intuitivos, rigor relativo e representações informais deveriam prevalecer no trabalho docente com os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos como uma condição necessária para que os conteúdos fossem compreendidos significativamente pelas crianças e, posteriormente, sistematizados e formalizados. Mais do que apenas preparar as crianças para o Ensino Fundamental, a Educação Infantil, especialmente o trabalho com a Matemática, deve desenvolver atividades que atendam as necessidades imediatas dessas crianças na tentativa de interpretar e dar sentido à realidade em que vivem e interagem.

5.3 O trabalho docente na Educação Infantil: algumas considerações

Para o trabalho com a Matemática nos últimos anos da Educação Infantil, é fácil encontrar propostas curriculares oficiais, bem como textos didáticos em que os conteúdos matemáticos, assim como sugestões metodológicas sobre a forma de desenvolvê-los, são sugeridos. Nesta unidade, propomos algumas considerações sobre essa etapa da escolarização, a qual julgamos essencial para um trabalho docente significativo a partir de especificidades próprias dessa faixa etária (de 4/5 anos) e suas repercussões para as práticas educativas com o conhecimento matemático.

De início, devemos considerar que as crianças vivem, interagem, questionam e tentam interpretar a realidade que as cerca. Assim, mais do que prepará-las para o Ensino Fundamental, é preciso que os trabalhos com a Matemática as motivem, desafiem e despertem ainda mais as suas curiosidades tanto para situações imediatas de suas vidas quanto para situações imaginativas.

Nessa perspectiva, antes de dominar os nomes ou os signos numéricos, as crianças dessa faixa etária precisam associar os números naturais por meio de situações do dia a dia ou de atividades diversas, relacionando quantidades e agrupamentos e a necessidade de se comparar ou contar os elementos de um ou de vários conjuntos, coleções ou grupos. Antes de nomear os sólidos geométricos, o importante é identificar e descrever suas formas a partir de suas características específicas. Perceber a necessidade de medições por meio de comparações e depois com a utilização de padrões é necessário para mostrar a utilidade prática da Matemática. Verificar que podemos inferir informações e conhecimentos sobre uma população a partir de dados de uma amostra significativa desta é outro conteúdo importante, pois, na atualidade, o raciocínio probabilístico predomina sobre o determinístico nos mais variados campos científicos. A Estatística, que pode ser trabalhada desde a Educação Infantil, pode preparar a criança para pensar fatos, fenômenos e eventos em termos de suas possibilidades de ocorrência ou não.

Para um trabalho significativo com a Matemática na Educação Infantil, devemos partir de alguns pressupostos. Para Tancredi (2006), o primeiro deles certamente é conhecer o assunto a ser trabalhado para que ideias e aspectos mais qualitativos do conhecimento matemático predominem sobre os formalismos, simbolismos e vocabulários que têm o seu momento adequado para serem ensinados. Assim, em atividades lúdicas ou de rotina que as crianças participam, os professores precisam problematizar essas experiências e explorá-las matematicamente para que as crianças tomem consciência, ainda que de forma mais intuitiva, de ideias e aspectos envolvendo essa área do conhecimento. Ideias matemáticas são relações que elaboramos em nossa mente a partir da interação com a realidade. Então, elas são abstratas e também complexas e as crianças precisam apreendê-las, mas não a partir de definições ou representações formais e sim por meio de relações mais qualitativas. Por exemplo, a operação adição pode, em um primeiro momento, ser trabalhada a partir das ideias de reunir, unir, juntar, acrescentar, agrupar, entre outras.

Um segundo pressuposto é que na Educação Infantil trabalhamos com crianças. Se, por um lado, questionamos que as atividades da Educação Infantil apenas preparam para o Ensino Fundamental, por outro lado o trabalho docente com a Matemática necessita levar em conta alguns elementos para que ele tenha repercussões positivas no desenvolvimento intelectual dessas crianças.

Assim, o trabalho docente na área de Matemática precisa ser adaptado ao nível de desenvolvimento das crianças, sob pena de que práticas precoces ou inadequadas coloquem empecilhos para o aprendizado de ideias e aspectos matemáticos que podem se estender em outras etapas da escolarização.

Pensamos que, a partir dessas considerações presentes em pesquisas e propostas sobre como desenvolver trabalhos com o conhecimento matemático na Educação Infantil, os professores precisam buscar práticas diferenciadas para essa etapa de escolarização a fim de que nossas crianças tenham, em especial na Matemática, uma iniciação significativa que contemple o prazer de fazer essa ciência sem, no entanto, deixar de explicitar a necessidade também de esforço e de persistência. Professores de classes de Educação Infantil relatam que alguns pais chegam a reclamar quando os filhos apenas brincam ou jogam em suas aulas. Querem ver os cadernos cheios de atividades, assim como tarefas para casa. Que pena! Quantas ideias e aspectos da Matemática podem ser trabalhados com uma brincadeira ou com um jogo.

Assim, na Educação Infantil, o trabalho docente deve ter características próprias e, nesta unidade, vamos sugerir alguns elementos que podem fundamentar práticas promissoras com a Matemática para as crianças e que podem evitar que estas, com idade próxima aos seis anos, já não suportem mais a escola.

Quando abordamos o trabalho docente em uma determinada etapa de ensino, quase sempre identificamos os conteúdos a serem trabalhados, assim como as mais diversas metodologias relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem desses conteúdos.

Entretanto, na Educação Infantil e, particularmente, com a Matemática, mais do que listar esses conteúdos e as maneiras de como ensiná-los, pensamos que antes de trabalharmos os conceitos e princípios matemáticos, atividades envolvendo e problematizando contextos em que as crianças vivem ou outros ainda não vivenciados seriam extremamente importantes de serem trabalhadas para que, posteriormente, as primeiras sistematizações e formalizações pudessem ter significado e ser compreendidas. Por meio de jogos, brinquedos, brincadeiras e materiais manipulativos, assim como situações do dia a dia, a criança vivenciará ou recordará contextos para aprender a raciocinar, e esta é a condição necessária para posteriormente aprender conceitos e princípios matemáticos.

E mais, no trabalho docente com a Matemática na Educação Infantil, alguns aspectos dessa área do conhecimento deveriam ser analisados e discutidos levando-se em conta que estamos trabalhando com crianças. Por isso, o respeito à infância é fundamental.

Por exemplo, aspectos mais intuitivos dos conteúdos matemáticos precisariam predominar nas atividades docentes, o rigor das definições e das propriedades poderia ser relativizado e as representações das ideias e dos aspectos da Matemática deveriam incluir diferentes maneiras de serem expressas.

Assim, antes de iniciarmos algumas sugestões para um trabalho com a Matemática na Educação Infantil, seria importante que alguns aspectos do conhecimento matemático fossem explicitados para que pudessem justificar alguns caminhos promissores para um trabalho diferenciado com as crianças de 4/5 anos.

Primeiramente, consideraremos que aprender é dar significado. Então, quando aprendemos algo, os contextos (como já dissemos) servem tanto para a problematização e elaboração de modelos quanto para sua aplicação e significação, permitindo assim uma maior e melhor compreensão dos conceitos e princípios matemáticos.

Nessa perspectiva, a elaboração de conceitos e princípios matemáticos precisa que as crianças tenham vivenciado situações em contextos diversos em que esses conceitos e princípios estão presentes. Crianças que observam, manipulam, contam e comparam objetos podem estar se preparando para as ideias de quantidade, medida e forma, que são as primeiras noções relacionadas aos conceitos aritméticos, geométricos e métricos. E essas mesmas experiências são necessárias à compreensão das primeiras elaborações ou sistematizações envolvendo esses mesmos conceitos e princípios.

Pensamos, então, que o trabalho essencial da Educação Infantil é oferecer e trabalhar com as crianças uma diversidade de experiências para que elas se apropriem dos dados ou dos elementos que serão necessários para a elaboração ou sistematização de conceitos e princípios matemáticos, dando significados a eles.

Nesse sentido, os conteúdos matemáticos desenvolvidos na Educação Infantil deveriam ser estruturantes para os trabalhos no Ensino Fundamental, e não apenas preparatórios.

Um segundo aspecto a ser considerado no trabalho com a Matemática na Educação Infantil refere-se à sistematização de conceitos e princípios. Devemos entender que a sistematização pode ser feita por etapas. A compreensão das ideias matemáticas é um processo e pode ser conseguida, inicialmente, de forma mais intuitiva ou experimental para posteriormente ser abstraída. Jogos, brinquedos, brincadeiras, situações do dia a dia ou materiais manipulativos podem propiciar uma primeira compreensão de ideias e aspectos da Matemática para que, em momentos posteriores, a formalização ocorra.

A maioria dos textos didáticos traz as definições e as propriedades matemáticas expressas, desde o início, de maneira rigorosa, e sabemos que o rigor matemático também pode ser trabalhado por meio de elementos mais intuitivos, nem tão precisos, ou até mesmo parciais, para que, em um momento posterior, prevaleçam os aspectos mais formais.

Por fim, outro aspecto a ser considerado na Educação Matemática para crianças está na representação Matemática. Muitas ideias e aspectos da Matemática têm suas representações com vocabulário e formalismo bem precisos. Mas, no processo de ensinar e aprender Matemática, a representação pode se utilizar de gestos, falas, desenhos e materiais manipulativos. O importante é que as crianças consigam expressar suas ideias, relações ou procedimentos utilizados na resolução de situações-problema ou no "fazer matemática". Se pedirmos a uma criança para representar a quantidade "cinco" e ela agrupar cinco objetos ou fizer cinco rabiscos ou ainda mostrar uma de suas mãos, por exemplo, podemos ter certeza de que ela tem a ideia dessa quantidade.

Como afirma Moura (1996), mais adiante o signo "5" deverá ser utilizado como uma expressão matemática, mas ao seu tempo, ou seja, a criança constrói o conceito de número comunicando sua ideia de número, seja desenhando, fazendo risquinhos, ou escrevendo o numeral correspondente à quantidade.

Em outro exemplo, as ideias de adição e subtração podem ser explicitadas por desenhos, e essas representações permitem que os professores avaliem se as crianças estão pensando matematicamente ou não.

Em momentos posteriores, devemos chegar às representações da comunidade matemática, mas na iniciação ao pensamento matemático, em muitas oportunidades, são as representações mais particulares que garantem a plena compreensão dos conceitos, princípios e procedimentos matemáticos.

Em resumo, o desenho é uma das primeiras formas de comunicação que a criança utiliza para se expressar a partir da interação com a realidade, devendo ser incentivada pelos professores, pois os desenhos possibilitam que ela registre algo que vivenciou, como uma brincadeira, um jogo, uma atividade, enfim, alguma coisa significativa, e assim tenha a oportunidade de tomar consciência de suas percepções, seus pensamentos e as relações que elaborou.

Essa oportunidade de representar experiências, assim como trocar registros dessas experiências com seus colegas e professores, vai mostrando a necessidade de formas mais precisas e consensuais de expressão e comunicação, que serão importantes para a elaboração e compreensão da representação matemática.

5.4 Retomando alguns elementos

Como já ressaltamos, na Educação Infantil devemos considerar que as crianças estão imersas em uma realidade e, desde o seu nascimento, tentam compreendê-la interagindo com ela a todo o momento. Assim, a função do professor na Educação Infantil não seria tanto ensinar conteúdos às crianças, mas sim propiciar oportunidades para que elas façam observações, manipulações, explorações, comparações e, por fim, classificações de fenômenos e de objetos dessa realidade.

Temos também que a Matemática está presente nas artes, nos esportes, na música, na maneira como organizamos nosso pensamento, assim como nas brincadeiras, nos brinquedos, nos jogos e histórias infantis. Uma criança aprende muitas ideias e aspectos da Matemática sem que o adulto precise ensiná-la diretamente. Elas descobrem coisas iguais e diferentes; observam, brincam e comparam as formas e os tamanhos dos objetos; organizam, classificam e elaboram coleções; estabelecem relações e conexões; ocupam um espaço e assim fazem matemática.

As crianças devem paulatinamente ser capazes de pensar e discutir sobre as relações numéricas utilizando-se de convenções, tendo contato com números e desenvolvendo capacidades matemáticas que possibilitem o seu envolvimento com atividades do dia a dia, assim como a compreensão sobre as mais diversas informações matemáticas. A noção de número para as crianças envolve avanços e recuos, pois o número natural é uma síntese de relações lógicas: classificação, ordem e inclusão. Assim, simplesmente escrever sequências de números pode ser um trabalho inútil para as crianças, pois antes desses signos (convenções), os símbolos (desenhos) podem prepará-las melhor para a ideia de quantidade, que é a noção de número natural.

Para Moura (1996), os mais variados objetos tridimensionais, semelhantes aos sólidos geométricos, fazem parte da vida das crianças desde a mais tenra idade. No entanto, não devemos supor que elas vão adquirir conhecimento sobre eles apenas pela convivência. Para observar e descrever as propriedades desses mais diversos objetos, é necessário um trabalho intencional, a partir de problemas práticos que levem as crianças a interagir (observando, manipulando, comparando, classificando, construindo e descrevendo) e a refletir (interpretando, conjecturando, prevendo) sobre objetos e figuras. Saber antes de fazer, antecipar o resultado, planejar e prever são capacidades que se formam nas crianças que desenvolvem o pensamento geométrico. Dessa forma, podemos dizer que trabalhar Matemática na Educação Infantil é, sobretudo, colocar o pensamento da criança em movimento. Isso implica na necessidade de organização da ação da criança pelo professor, que pode ser feita propondo e trabalhando situações motivadoras ou desafiadoras.

As primeiras noções geométricas devem privilegiar as relações topológicas, ou seja, relações em que a posição, a forma e o tamanho dos objetos não são tão rígidos quanto as relações euclidianas que, por exemplo, envolvem a noção de medidas padronizadas. Então, uma criança entre quatro e seis anos pode representar um quadrado desenhando uma figura fechada próxima a um quadrilátero. Com mais idade, deve chegar a um desenho em que os quatro lados sejam iguais e os quatro ângulos sejam retos.

Nas primeiras atividades com a Geometria, o vocabulário matemático deve ser trabalhado para que as crianças se apropriem de uma oralidade que será necessária para o trabalho docente com a Matemática. Palavras como longe e perto, grande e pequeno, dentro e fora, antes e depois, ao lado, fronteira, vizinho, entre e próximo vão adquirindo significados matemáticos para, em seguida, serem articulados com o vocabulário matemático. Nesse sentido, a face de uma lata de refrigerante assim como uma bola podem ser chamadas de redondas para, em um momento posterior, serem caracterizadas como um círculo ou uma superfície esférica respectivamente.

É necessário considerar que a criança constrói o espaço a partir de seu próprio corpo, da interação com objetos presentes na realidade e de seus deslocamentos, para depois construir ou adquirir noções e princípios geométricos mais abstratos. O espaço perceptivo é construído na presença dos objetos para em seguida ser construído o espaço representativo. As crianças percebem as formas características dos objetos antes de serem capazes de representá-los.

O trabalho com grandezas e medidas propicia que as crianças estabeleçam relações entre os objetos, comparando-os inicialmente para depois perceber a necessidade de uma padronização que pode, em um primeiro momento, não ser convencional nessa etapa de escolarização. Assim, cabe ao professor organizar situações nas quais a utilização de medidas seja uma necessidade para as crianças. Por exemplo, a própria marcação do tempo, por meio de diferentes padrões de medida (chegando até a um calendário, por exemplo), constitui um importante momento de reflexão para elas.

Mesmo as crianças pequenas podem coletar, organizar, divulgar e analisar dados sobre a realidade em que vivem. Uma pesquisa sobre gostos e preferências pode possibilitar que elas discutam as ideias estatísticas. Na representação dos dados pesquisados, desenhos, símbolos ou outras formas de comunicação podem e devem ser utilizados pelas crianças.

Resumindo, ressaltamos que o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (BRASIL, 1998), os textos didáticos, assim como pesquisas sobre o aprendizado nessa faixa etária, fazem sugestões para o trabalho docente com o conhecimento matemático para as crianças da Educação Infantil. O que procuramos discutir foram alguns elementos da Matemática que poderiam ser considerados em relação às crianças pequenas no sentido de que o *fazer matemática* fosse iniciado de maneira competente com esses aprendizes, a fim de que a natureza dessa ciência fosse apreendida e de que os primeiros conceitos, princípios e procedimentos matemáticos fossem compreendidos e não apenas memorizados.

5.5 Considerações finais

Nessa perspectiva, pensamos que um trabalho com a Matemática para as crianças pequenas precisa ser analisado, discutido e avaliado, levando-se em conta os elementos que identificamos nesta unidade. Tais elementos podem fazer a diferença entre uma boa iniciação ao pensamento matemático ou criar sérias dificuldades para os estudos futuros com essa área do conhecimento.

Não deve existir uma preocupação inicial com a apreensão formal dos conceitos e princípios matemáticos pelas crianças, mas a elaboração de ideias e aspectos que favoreçam essa aquisição, que se dará pouco a pouco durante a escolarização, quando da resolução de situações simples do dia a dia ou até mesmo da relação com outros desafios, mas sempre de maneira segura e autônoma.

Ao longo dessas cinco unidades que compõem o livro, enfatizamos a importância do trabalho do professor, de modo que tenha condições de ajudar seus estudantes a envolverem-se com conceitos matemáticos importantes para sua formação intelectual. Tratamos aqui de conteúdos para além da Aritmética e que muitas vezes são pouco trabalhados com estudantes dos anos iniciais.

Nossa expectativa é que a partir do que discutimos neste livro o leitor aceite o convite para se colocar como um investigador da própria prática, de modo a tomar para si o papel central de responsável pela iniciação matemática das crianças da Educação Infantil e dos estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Como comentamos em cada unidade, os temas não se esgotaram, o que comprova que uma obra como esta, que se destina à formação inicial de professores que ensinam Matemática, é sempre incompleta.

Esperamos que este livro contribua para reflexões sobre a Matemática e o papel que o professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental tem de assumir para proporcionar um ambiente de aprendizagem, no qual professor e estudante envolvam-se intelectualmente na atividade, em que todos ensinam e todos aprendem.

5.6 Estudos complementares

São muitas as publicações que tratam da Matemática na Educação Infantil que contribuem para a formação de professores que ensinam Matemática nesse segmento.

No livro de Grando, Toricelli & Nacarato (2008), há a mescla de narrativas individuais e textos teóricos sobre o conhecimento matemático que contribuem para o debate sobre a inserção da Matemática nos currículos da Educação Infantil.

GRANDO, R. C.; TORICELLI, L.; NACARATO, A. M. (Orgs.). *De professora para professora*: conversas sobre iniciAção Matemática. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

Kamii (1986) discorre sobre as implicações educacionais da teoria de Piaget com crianças de 4 a 7 anos sobre a descoberta do número e suas consequências.

KAMII, C. *A criança e o número*: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos. Campinas: Papirus, 1986.

Lopes (2003) aborda, em uma linguagem bastante acessível, vários projetos em que a Matemática se faz presente na Educação Infantil.

LOPES, C. A. E. *Matemática em projetos*: uma possibilidade. Campinas: Editora Gráfica FE/Unicamp – Cempem, 2003.

O livro de Lorenzato (2006), direcionado a educadores e pais, responde a questões fundamentais sobre Educação Infantil, tais como: que relação existe entre percepção Matemática e Educação Infantil? Como desenvolver o senso matemático na criança pré-escolar?

LORENZATO, S. *Educação infantil e percepção Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

No livro de Moura & Lopes (2002), as autoras apresentam narrativas de professoras que realizaram interessantes projetos com crianças da Educação Infantil.

MOURA, A. R. L.; LOPES, C. A. E. (Orgs.). *Encontro das crianças com o acaso, as possibilidades, os gráficos e as tabelas*. Campinas: Editora Gráfica FE/Unicamp – Cempem, 2002. v. 1.

Em mais uma publicação de Moura & Lopes (2003), são encontradas várias situações de ensino em que as crianças da Educação Infantil se deparam com a estocástica.

MOURA, A. R. L.; LOPES, C. A. E. (Orgs.). *As crianças e as idéias de número, espaço, formas, representações gráficas, estimativa e acaso*. Campinas: Editora Gráfica FE/Unicamp – Cempem, 2003. v. 2.

No seguinte volume publicado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, são apresentadas considerações sobre o jogo na construção do conhecimento matemático.

MOURA, M. O. O jogo e a construção do conhecimento matemático. *Revista Série Idéias*, São Paulo: FDE, v. 10, p. 45-53, 1991.

Nos três livros sugeridos a seguir, os professores poderão encontrar exemplos de atividades e considerações teóricas da Matemática na Educação Infantil:

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; CÂNDIDO, P. *Matemática de 0 a 6*: Brincadeiras Infantis nas aulas de Matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000a.

______. *Matemática de 0 a 6*: Resolução de Problemas. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000b. v. 2.

______. *Matemática de 0 a 6*: Figuras e formas. Porto Alegre: Artmed, 2003. v. 3.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C.; GODINO, J. D. Estocástica y su Didáctica para Maestros. *Proyecto Edumat-Maestros.* Granada, 2002. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>. Acesso em: 02 mar. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Referencial curricular nacional para a educação infantil*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHARLOT, B. *Relação com o saber, formação dos professores e globalização*: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed, 2005.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

FISCHIBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. *Education Studies in Mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, n. 24, p. 139-162, 1993.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1973.

GODINHO, J. D.; RUÍZ, F. Geometría y su Didáctica para Maestros. *Proyecto Edumat-Maestros*. Granada, 2002. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>. Acesso em: 02 mar. 2010.

GOLDENBERG, E. P. Hábitos de pensamento: um princípio organizador para o currículo. Tradução de Eduardo Veloso. *Revista Educação & Sociedade*, Lisboa: APM, n. 47-48, 1999. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ48/educ48_6.htm>. Acesso em: 17 fev. 2010.

HILBERT, D. *Fundamentos da Geometria*. Tradução de A. J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva, 2003.

LOPES, C. A. E. *A probabilidade e a estatística no ensino Fundamental*: uma análise curricular. 1998. 139 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

______. *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil*. 2003. 290 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

______. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Caderno Cedes*, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: <http://www.cedes.unicamp.br>. Acesso em: 20 fev. 2010a.

______. Crianças e professoras desvendando as idéias probabilísticas e estatísticas na educação de infância. *Profmat*, Ilha da Madeira, 2000. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~lem/publica/ce_lopes/cri_prof.pdfSTROS>. Acesso em: 05 mar. 2010b.

MACHADO, N. J. *Medindo comprimentos*. São Paulo: Editora Scipione, 1988. (Coleção Vivendo a Matemática).

MARTINS, M. E. G.; LOURA, L. C. C.; MENDES, M. F. *Análise de Dados*: texto de apoio para professores do 1º Ciclo. Lisboa: MEC, DGIDC, 2007.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. *O ensino da Matemática no primeiro grau*. São Paulo: Atual, 1986.

MONTEIRO, C.; COSTA, C. Dificuldades na aprendizagem dos números fracionários. *Revista Educação e Matemática*, Lisboa: APM, n. 40, p. 60-63, 1996.

MOORE, D. S. Teaching Statistics as a respectable subject. In: GORDON, F.; GORDON, S. (Eds.). *Statistics for the Twenty-First Century*. Mathematical Association of America, 1991. p. 14-25.

MOURA, M. O. (Org.). *Controle da variação de quantidades*: atividades de ensino. São Paulo: Feusp, 1996.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. *A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. *Aprender a aprender*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1996.

RANGEL, A. C. S. *Educação Matemática e a construção do número pela criança*: uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos. Porto Alegre: Artmed, 1992.

ROMANATTO, M. C. *Número racional*: relações necessárias à sua compreensão. 1997. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

SANTOS, J. A. F. L. *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental*. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade São Francisco, Itatiba, 2010.

TANCREDI, R. M. S. P. A Matemática na Educação Infantil. In: PIROLA, N. A.; TAXA-AMARO, F. O. S. (Orgs.). *Pedagogia Cidadã*: cadernos de formação: Educação Matemática. 2. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2006. p. 21-38.

WHEELER, D. Imagem e pensamento geométrico. CIEAEM. *Comtes Rendus de la 33e Rencontre Internationale*, Pallanza, p. 351-353, 1981.

SOBRE OS AUTORES

Mauro Carlos Romanatto

Possui graduação em Licenciatura em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar, 1974), especialização em Metodologia do Ensino na área de Ciências pela Associação de Escolas Reunidas (1975), mestrado em Educação pela UFSCar (1987) e doutorado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp, 1997). Atualmente, é Professor Assistente Doutor da Faculdade de Ciências e Letras da Universidade Júlio de Mesquita (Unesp), *campus* de Araraquara. Atua na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática e Formação de Professores. É pesquisador do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UFSCar e do Grupo de Estudos e Propostas sobre a Formação do Educador Contemporâneo da Unesp, *campus* de Araraquara.

Cármen Lúcia Brancaglion Passos

É doutora em Educação Matemática pela Faculdade de Educação da Unicamp. Desde 2002 é docente do Departamento de Metodologia do Ensino da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), atuando nos cursos de graduação de Matemática e de Pedagogia e de Pós-Graduação em Educação. Desde 2008 atua também no curso de Pedagogia EaD. Coordena o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEM) vinculado ao PPGE da UFSCar e é pesquisadora do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores de Matemática, sediado na Faculdade de Educação da Unicamp. Desde 2007 é coordenadora do GT 7: Formação de Professores que Ensinam Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Este livro foi impresso em 2015 pelo Departamento de Produção Gráfica – UFSCar.