

... Coleção UAB–UFSCar

..... Engenharia Ambiental

..... Física 2

: Odila Florêncio

: Sérgio de Aguiar Monsanto

: Sérgio Mergulhão

: **Fundamentos de Física 2**



Fundamentos de Física 2



Reitor

Targino de Araújo Filho

Vice-Reitor

Pedro Manoel Galetti Junior

Pró-Reitora de Graduação

Emília Freitas de Lima



Secretária de Educação a Distância - SEaD

Aline Maria de Medeiros Rodrigues Reali

Coordenação UAB-UFSCar

Claudia Raimundo Reyes

Daniel Mill

Denise Abreu-e-Lima

Joice Otsuka

Marcia Rozenfeld G. de Oliveira

Sandra Abib

Coordenador do Curso de Engenharia Ambiental

Luiz Márcio Poiani

UAB-UFSCar

Universidade Federal de São Carlos

Rodovia Washington Luís, km 235

13565-905 - São Carlos, SP, Brasil

Telefax (16) 3351-8420

www.uab.ufscar.br

uab@ufscar.br

Odila Florêncio
Sérgio de Aguiar Monsanto
Sérgio Mergulhão

Fundamentos de Física 2

© 2012, dos autores

Concepção Pedagógica

Daniel Mill

Supervisão

Douglas Henrique Perez Pino

Assistente Editorial

Letícia Moreira Clares

Equipe de Revisão Linguística

Daniela Silva Guanais Costa

Francimeire Leme Coelho

Jorge Ialanji Filholini

Lorena Gobbi Ismael

Luciana Rugoni Sousa

Marcela Luisa Moreti

Paula Sayuri Yanagiwara

Rebeca Aparecida Mega

Sara Naime Vidal Vital

Equipe de Editoração Eletrônica

Edson Francisco Rother Filho

Izis Cavalcanti

Equipe de Ilustração

Eid Buzalaf

Jorge Luís Alves de Oliveira

Nicole Santaella

Priscila Martins de Alexandre

Capa e Projeto Gráfico

Luís Gustavo Sousa Sguissardi

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	11
UNIDADE 3: Eletricidade e Magnetismo	
3.1 Primeiras palavras	15
3.2 Problematizando o tema	15
3.3 Cargas elétricas: uma introdução	15
3.3.1 Carga elétrica	17
3.3.2 Condutores e Isolantes	18
3.3.3 A Lei de Coulomb	19
3.3.3.1 O princípio de superposição	20
3.3.3.2 A quantização da carga elétrica	20
3.3.3.3 A conservação da carga elétrica	20
3.3.3.4 Dois teoremas importantes	21
3.3.4 Densidades de carga elétrica	21
3.3.4.1 Densidade linear de carga elétrica: λ	21
3.3.4.2 Densidade superficial de Carga Elétrica: σ	22
3.3.4.3 Densidade Volumétrica de Carga Elétrica: ρ	23
3.4 Campo elétrico	24
3.4.1 Introdução	24
3.4.2 O campo elétrico	25
3.4.2.1 Campo Estacionário	26
3.4.2.2 Campo Conservativo	26
3.4.3 O campo de uma carga puntual	26
3.4.4 O dipolo elétrico	26

3.4.4.1	A aproximação de campos distantes.	27
3.4.4.2	O momento de dipolo elétrico.	28
3.4.4.3	Ação de um campo elétrico sobre o momento de dipolo elétrico	28
3.4.4.4	A energia de um dipolo elétrico.	29
3.4.5	Campos elétricos de distribuições contínuas de cargas	30
3.4.6	Campo devido a uma carga elementar	30
3.4.7	Exemplos.	30
3.4.7.1	A linha de cargas.	30
3.4.7.2	O anel de cargas	32
3.4.7.3	O disco de cargas	34
3.5	Potencial elétrico.	35
3.5.1	Introdução.	35
3.5.2	Energia potencial elétrica.	36
3.5.3	Energia potencial em um ponto.	37
3.5.4	O Potencial elétrico	38
3.5.4.1	Superfícies Equipotenciais	39
3.5.4.2	Algumas famílias equipotenciais.	39
3.5.5	O Potencial elétrico criado por uma carga puntiforme:	40
3.5.6	Potencial elétrico devido a uma distribuição de cargas pontuais.	42
3.5.7	Potencial elétrico devido a um dipolo elétrico	42
3.5.8	Potencial elétrico devido a uma distribuição contínua de cargas.	43
3.5.9	Diferença de potencial.	43
3.5.10	Relação entre campo elétrico e diferença de potencial	44
3.5.10.1	Cálculo do campo elétrico \mathbf{E} a partir do potencial elétrico V	44
3.5.11	Um condutor carregado e isolado	46
3.5.12	O poder das pontas.	47
3.5.13	O efeito corona ou descarga corona	47
3.6	Capacitores.	47
3.6.1	Calculando a capacitância	49

3.6.1.1	Capacitor de placas paralelas	49
3.6.1.2	Capacitor cilíndrico	50
3.6.1.3	Capacitor esférico	51
3.6.1.4	Uma esfera isolada	52
3.6.2	Associações de capacitores	53
3.6.2.1	Capacitores em série	53
3.6.2.2	Capacitores em paralelo	54
3.6.3	Armazenando energia num capacitor	55
3.6.4	Dielétricos: sob um ponto de vista microscópico	56
3.6.4.1	Dielétrico polar	56
3.6.4.2	Dielétrico apolar	56
3.6.5	Lei de Gauss com dielétrico	57
3.6.6	Esfera condutora isolada	58
3.7	Corrente elétrica	59
3.7.1	Introdução	59
3.7.2	Eletrodinâmica	59
3.7.3	Força eletromotriz: Σ	60
3.7.4	Corrente elétrica: i	61
3.7.5	Corrente de deslocamento	62
3.7.6	Resistência elétrica	63
3.7.7	Lei de Ohm	65
3.7.8	Lei de Joule	66
3.7.9	Densidade de corrente e condutividade	67
3.8	Circuitos de corrente elétrica contínua e alternada	70
3.8.1	Introdução	70
3.8.2	Corrente e fem	70
3.8.2.1	Forma alternativa de obter a corrente	71
3.8.3	Resistores em série	72
3.8.4	Resistores em paralelo	72
3.8.5	Circuitos multimalhas e regras de Kirchhoff	73

3.8.6	Regras de Kirchhoff	74
3.8.7	Princípio da superposição	76
3.8.8	O voltímetro	80
3.8.9	O amperímetro	81
3.8.10	A ponte de Wheatstone	83
3.8.11	Circuito RC em corrente contínua	83
3.8.11.1	Processo de carga do capacitor	83
3.8.11.2	Processo de descarga do capacitor sobre a resistência	85
3.9	Campo magnético	87
3.9.1	Introdução	87
3.9.2	Linhas de campo	89
3.9.3	O movimento de uma partícula carregada em um campo magnético	90
3.9.4	A garrafa magnética	91
3.9.5	Os cinturões de Van Allen	92
3.9.6	O vento solar	92
3.9.7	A aurora boreal	93
3.9.8	A lei de força de Lorentz	93
3.9.8.1	Aplicação: o filtro de velocidade de partículas carregadas	93
3.9.9	A Força magnética em um condutor carregando corrente	94
3.9.10	O efeito Hall	95
3.10	Indução magnética e transformadores	97
3.10.1	Indutor	97
3.10.2	Autoindutância	97
3.10.3	O cálculo da indutância	99
3.10.4	Energia magnética armazenada num indutor	99
3.10.5	Circuito RL em corrente contínua	100
3.10.5.1	Processo de carga	101
3.10.5.2	Processo de descarga	103
3.11	Propriedades magnéticas da matéria	104
3.11.1	O magnetismo na matéria	104

3.11.2 O paramagnetismo	104
3.11.3 O ferromagnetismo	105
3.11.4 O diamagnetismo	105
3.11.5 Magnetização e susceptibilidade magnética	105
3.11.6 Momentos magnéticos atômicos	108
3.11.7 Paramagnetismo	110
3.11.8 Ferromagnetismo	112
3.11.9 Diamagnetismo	116
3.12 Referências bibliográficas	118

APRESENTAÇÃO

Este material foi desenvolvido com a finalidade de auxiliar os alunos da disciplina de Fundamentos de Física para Engenharia Ambiental 2 (FFEA-2), oferecida no curso de Engenharia Ambiental da Universidade Aberta do Brasil – UFSCar.

A disciplina será desenvolvida em cinco ciclos, durante três meses, dentro do 2º Semestre do curso de Engenharia Ambiental. O objetivo da disciplina é fornecer conhecimentos básicos de Física, indispensáveis para a formação do engenheiro ambiental.

Serão apresentados nove unidades envolvendo os temas: cargas elétricas (três capítulos), capacitores e resistores (três capítulos) e magnetismo (três capítulos).

Ao final do curso, o aluno deverá ser capaz de entender e resolver problemas de física relacionados ao eletromagnetismo, além de relacionar estes conhecimentos com a formação básica de um engenheiro ambiental.

Convém ressaltar que este livro não deve ser utilizado como único meio, mas sim como um guia, para se obter o conhecimento necessário sobre os temas abordados na disciplina Fundamentos de Física para Engenharia Ambiental 2.

UNIDADE 3

Eletricidade e Magnetismo

3.1 Primeiras palavras

Na natureza existem 4 forças, ou interações, fundamentais. São elas: a **interação gravitacional**, a **interação eletromagnética**, a **interação forte** e a **interação fraca**. No livro anterior, estudamos detalhadamente a força gravitacional. Nesta unidade estaremos dedicando nossos estudos à força eletromagnética envolvendo a eletricidade e o magnetismo.

3.2 Problematizando o tema

Quando dois objetos são carregados eletricamente, uma força de repulsão (ou de atração, dependendo das cargas elétricas) é observada entre eles. Um exemplo desta interação ocorre quando em um dia muito seco você desce de um carro e ao tocar uma superfície metálica sente uma pequena descarga elétrica. Trata-se de um efeito causado pelas partículas carregadas que passam do seu corpo carregado, para o objeto metálico, como, por exemplo, a fechadura do portão. A corrente elétrica que alimenta uma lâmpada acesa é o movimento de partículas carregadas dentro de um fio. As ideias básicas do eletromagnetismo são bastante simples, mas exigem um nível de conhecimento matemático, que estaremos estudando nesta unidade.

3.3 Cargas elétricas: uma introdução

Primeiras observações sobre atração de corpos eletrizados:

Tales de Mileto (**640 – 546 a.C.**), filósofo grego, observou que o âmbar (uma resina amarelada, seiva de árvore solidificada ao longo de séculos) quando atritado com peles de animais, atrai partículas leves, como sementes ou fragmentos de palha ou de penas.

Âmbar em grego é “elektron”, daí os nomes elétron e eletricidade.

Primeiras observações sobre magnetismo:

Os gregos também realizaram as primeiras observações dos fenômenos magnéticos, através da atração de pequenos grãos de ferro pela magnetita (ímã natural).

A eletricidade e o magnetismo se desenvolveram de forma lenta e isolada – como duas ciências distintas – até o século **XVI**, quando o médico da corte da Inglaterra, William Gilbert (**1540 – 1603**), estudou de forma sistemática os fenômenos elétricos e magnéticos, conseguindo identificar a diferença entre a atração elétrica e a magnética, publicando em **1600** os resultados no tratado “De Magnete”.

Em **1733**, Charles du Fay (**1698 – 1739**) descobriu a existência de dois tipos diferentes de carga elétrica.

As experiências realizadas por Benjamin Franklin (**1706 – 1790**) o convenceram de que o processo de eletrização não cria cargas, apenas as transfere de um corpo para outro. Normalmente um corpo é neutro por ter igual quantidade de carga positiva e negativa, quando ele transfere carga de um dado sinal a outro corpo, ele fica carregado com carga de mesmo valor absoluto e sinal contrário. Esta hipótese de Franklin constitui a mais antiga formulação de um princípio fundamental da Física: a lei de conservação da carga elétrica.

Hans Christian Oersted (**1777 – 1851**) observou uma conexão entre as duas ciências, em **1820**, uma corrente elétrica afeta a agulha imantada de uma bússola. Nascia o eletromagnetismo!

Michael Faraday (**1791 – 1867**) foi um dos mais importantes pesquisadores desta nova ciência.

Usando resultados importantes de vários pesquisadores, James Clerk Maxwell (**1831 – 1879**) formulou a leis do eletromagnetismo, por intermédio de quatro equações – as equações de Maxwell. Elas estão para o eletromagnetismo assim como as leis do movimento e da gravitação de Newton estão para a mecânica.

Maxwell descobriu ainda que a luz tem **natureza eletromagnética** e que sua velocidade pode ser determinada por meio de medidas puramente elétricas e magnéticas, mostrando uma relação muito íntima da óptica com a eletricidade e o magnetismo.

A extensão das aplicações das equações de Maxwell é notável, abrangendo os princípios fundamentais de todos os aparelhos de óptica e eletromagnetismo, como motores, cíclotrons, computador, rádio, televisão, radar, microscópios, telescópios etc.

O físico inglês Oliver Heaviside (**1850 – 1925**) e o físico holandês H. A. Lorentz (**1853 – 1928**) muito contribuíram para o esclarecimento da teoria de Maxwell.

Vinte anos depois de Maxwell estabelecer sua teoria, Heinrich Hertz (**1857 – 1894**) deu um grande avanço quando produziu em laboratório as “ondas Maxwellianas”, que hoje são chamadas de ondas curtas de rádio.

O interesse atual do eletromagnetismo se concentra em dois aspectos:

a) **Aplicações à engenharia** – as equações de Maxwell são constante e universalmente utilizadas na solução de uma grande variedade de problemas práticos, gerando avanços tecnológicos.

b) **Fundamentos da teoria** – há um esforço contínuo no sentido de generalizá-la de modo que o eletromagnetismo seja obtido como um caso particular de uma teoria mais geral, que incluiria também as teorias da gravitação e da física quântica.

São conhecidas **4** (quatro) forças na natureza:

- **Gravitacional.**
- **Eletromagnética.**
- **Forte** – interações entre as partículas elementares.
- **Fraca** – interações entre as partículas elementares.

As interações fortes e fracas decaem muito rapidamente com o aumento da distância entre as partículas, sendo quase imperceptíveis numa escala macroscópica. Mas para as distâncias da ordem de grandeza dos núcleos atômicos (**10^{-3} cm**) elas são muito importantes.

A interação forte é a mais forte de todas. Dentro dos núcleos dos átomos ela é centenas de vezes maior do que a força eletromagnética. É esta força que mantém o núcleo coeso e o impede de se dividir por causa da repulsão eletrostática mútua dos prótons dentro do núcleo.

A interação fraca é bastante significativa nos processos responsáveis pela transformação radioativa de núcleos radioativos que decaem pela emissão de um elétron. Ela também desempenha um papel importante nas teorias de fissão e fusão nucleares.

Considerando a **força gravitacional como unidade**, podemos comparar a grandeza de cada uma das forças em relação a esta:

- **Forte** – 10^{41} – Sempre atrativa
- **Eletromagnética** – 10^{39} – Atrativa ou Repulsiva
- **Fraca** – 10^{27} – Sempre Atrativa
- **Gravitacional** – 10^0

3.3.1 Carga elétrica

Existem dois tipos de cargas elétricas:

- **positiva** $q = + e$
- **negativa** $q = - e$

A carga elétrica é uma propriedade fundamental da matéria.

A carga elétrica de um próton é (+ e) e a carga elétrica de um elétron é (- e), com

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

Um objeto macroscópico possui carga elétrica igual a q , se apresentar um desequilíbrio entre suas populações de prótons e elétrons, dada por:

$$q = (N_p - N_e)e \quad (1.1)$$

Objetos carregados interagem exercendo forças uns sobre os outros, cargas iguais se repelem e cargas diferentes se atraem.

- Uma barra de vidro esfregada com seda fica **positivamente** carregada.
- Uma barra de plástico esfregada com pele fica **negativamente** carregada.

É impossível definir carga elétrica, mas pode-se enumerar suas propriedades:

- a) algumas partículas elementares possuem carga elétrica. A carga elétrica do próton e a do elétron são exatamente iguais, mas possuem sinais opostos;
- b) é impossível encontrar ou medir uma quantidade de carga menor do que a do elétron (ou a do próton), a carga destas partículas é a unidade fundamental de carga elétrica no universo;
- c) a carga destas partículas é independente da orientação do referencial em que são feitas as observações, isto é, a carga elétrica é um escalar;
- d) há uma razão indireta para crer (mesmo que seja difícil imaginar uma experiência para demonstrar isto diretamente) que a quantidade total de carga elétrica no universo (soma algébrica das cargas positivas com as negativas) é constante, e que para qualquer porção finita V_0 do universo, qualquer variação da carga total dentro de V_0 deve ser contrabalançada pela passagem de cargas através da fronteira da região V_0 .

3.3.2 Condutores e Isolantes

Condutores: São materiais em que cargas negativas podem mover-se livremente.

Ex: metais, água de torneira, corpo humano etc.

Isolantes: São materiais em que as cargas não podem mover-se livremente.

Ex: vidro, plástico, água quimicamente pura etc.

Semicondutores: São materiais intermediários entre os condutores e os isolantes cuja capacidade de gerar elétrons livres é fortemente influenciada pelo nível de impurezas e aumento da temperatura.

Ex: Silício, germânio, GaAs etc.

Supercondutores: São materiais que apresentam ausência de resistência elétrica ao movimento de cargas elétricas em temperaturas abaixo de um valor crítico característico do material.

Ex: mercúrio (Hg) → **T = 4,2 K (– 269,1 °C)**

3.3.3 A Lei de Coulomb

A força de interação entre duas cargas elétricas se expressa proporcionalmente ao produto das cargas e inversamente ao quadrado da distância entre elas.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.2)$$

Definindo:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \quad (1.3)$$

A constante de permissividade elétrica do vácuo é:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \quad (1.4)$$

Esta expressão é válida em todos os testes sem exceção, inclusive no interior dos átomos em que as leis da mecânica clássica são substituídas pela mecânica quântica.

A unidade de carga elétrica no **SI** (sistema internacional de unidades) é o **Coulomb (C)**:

Um Coulomb é uma quantidade de carga que atravessa uma seção transversal de um fio metálico durante o período de um segundo, quando este é percorrido por uma corrente de um **Ampère**.

Exemplo 1: Encontrar a razão entre a força repulsiva de Coulomb e a força gravitacional atrativa entre dois prótons separados de uma distância r .

Solução:

A força repulsiva de Coulomb é a força elétrica:

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \cdot e}{r^2} \hat{r}$$

e a força atrativa gravitacional, entre dois prótons:

$$\vec{F}_g = G \frac{m_p \cdot m_p}{r^2} \hat{r}$$

A razão fica:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2)(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2)(1,672 \times 10^{-27} \text{ kg})^2}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = 1,24 \times 10^{36}$$

3.3.3.1 O princípio de superposição

Se n partículas interagem, a força resultante sobre qualquer das cargas, por exemplo q_1 , será:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots + \vec{F}_{1n} \quad (1.5)$$

3.3.3.2 A quantização da carga elétrica

Um fluido elétrico é composto de múltiplos da carga elementar que pode ser medida diretamente:

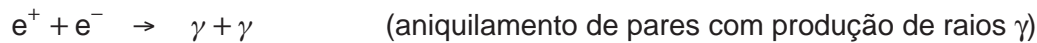
$$q = n \cdot e \quad \text{com } n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\mathbf{e} \text{ é uma constante fundamental da natureza})$$

3.3.3.3 A conservação da carga elétrica

Em todo processo de eletrização de corpos sempre aparecem as duas cargas de sinais opostos, mesmo que em corpos diferentes. Adicionalmente, cargas

elétricas só se criam ou desaparecem aos pares, de modo que a carga total não se altera.



3.3.3.4 Dois teoremas importantes

1. Uma casca (superfície) uniformemente carregada atrai ou repele uma partícula carregada que está fora da casca como se toda a carga da casca estivesse concentrada no seu centro.
2. Uma casca de cargas uniformes não exerce nenhuma força eletrostática sobre uma partícula carregada que está localizada no seu interior.

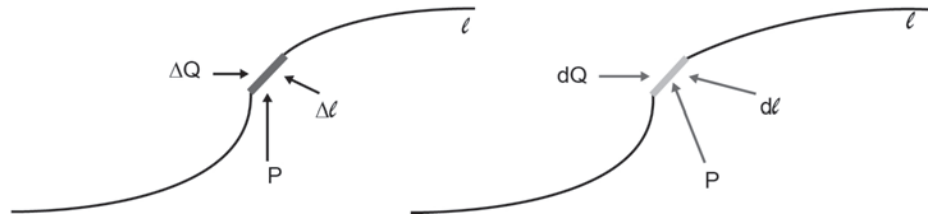
3.3.4 Densidades de carga elétrica

Considerando que, em muitos casos de interesse, o número de cargas elétricas \mathbf{N} é muito grande e que estas cargas se encontram distribuídas de modo quase contínuo, quando as dimensões de átomos e moléculas são comparadas com as dimensões dos objetos carregados usados nos problemas práticos, pode-se entender com facilidade o conceito de carga elétrica puntiforme (tal como é aceito o conceito de ponto material na Mecânica); bem como pode-se aceitar com naturalidade a extensão do conceito de carga elétrica para o de densidade de carga elétrica linear, superficial ou volumétrica, por meio da noção de carga elétrica elementar $\Delta\mathbf{Q}$ distribuída num elemento de linha $\Delta\ell$, de superfície $\Delta\mathbf{s}$ ou de volume $\Delta\mathbf{V}$.

3.3.4.1 Densidade linear de carga elétrica: λ

Seja uma distribuição linear de carga, representada por uma linha ℓ qualquer, eletrizada com carga total \mathbf{Q} . Então um trecho da linha de comprimento $\Delta\ell$ contém uma carga $\Delta\mathbf{Q}$.

Por definição, a densidade linear de carga elétrica no ponto \mathbf{P} é a carga por unidade de comprimento na vizinhança do ponto \mathbf{P} :



$$\lambda_{\text{media}} = \frac{\Delta Q}{\Delta \ell} \Rightarrow \lambda = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \ell} = \frac{dQ}{d\ell} \quad \text{ou,} \quad \lambda = \frac{dQ}{d\ell} \quad (1.6)$$

$d\ell$ – é um trecho elementar da linha, ou seja, uma vizinhança elementar do ponto **P**, que contém a parcela elementar dQ de carga elétrica. Se a distribuição da carga **Q** for uniforme ao longo da linha ter-se-á uma densidade linear uniforme de carga elétrica com valor de λ constante, coincidindo com o valor da densidade linear média λ_m .

Em qualquer um dos casos, se a função $\lambda = \lambda(x, y, z)$ for conhecida e bem comportada, pode-se determinar a carga total **Q** da linha calculando uma integral de linha, realizada ao longo da linha ℓ .

$$\lambda = \frac{dQ}{d\ell} \Rightarrow Q = \int_{\ell} \lambda d\ell \quad (1.7)$$

Obs.: Para existir coerência teórica tanto física quanto matemática, adota-se por definição que **a carga em um ponto é nula**.

3.3.4.2 Densidade superficial de Carga Elétrica: σ

Seja uma superfície **S** qualquer, carregada com uma carga total **Q**. Seja ΔS uma porção elementar desta superfície **S**, que contém a parcela ΔQ da carga total **Q**.

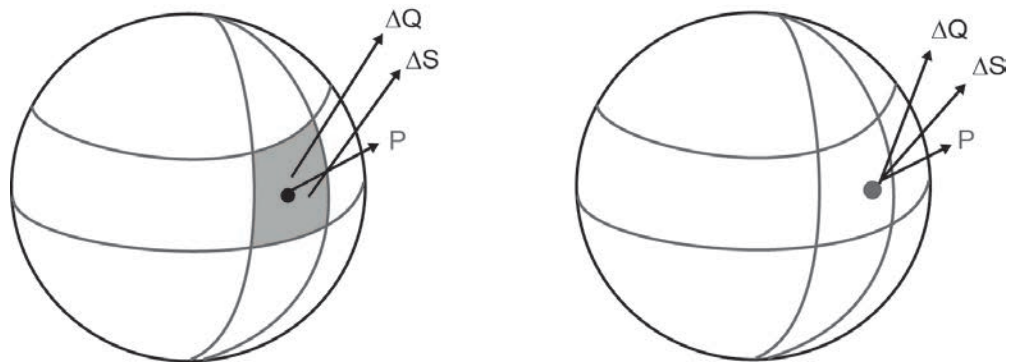


Figura 1

Então, por definição, a **Densidade superficial de Carga Elétrica** no **ponto P** é a carga por unidade de área na vizinhança do ponto **P**:

$$\sigma_{\text{media}} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \Rightarrow \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad \text{ou,} \quad \sigma = \frac{dQ}{dS} \quad (1.8)$$

dS é uma superfície de área elementar pertencente à superfície **S**, ou seja, uma vizinhança elementar (de área **dS**) do ponto **P**, que contém a parcela de carga elementar **dQ** da carga elétrica total **Q**. Neste caso também se pode ter a função $\sigma = \sigma(x, y, z)$.

Se a distribuição da carga total **Q** sobre a superfície **S** for uniforme, a densidade superficial de carga será uniforme e terá um valor σ constante coincidindo com o valor da densidade superficial média de carga elétrica σ_m .

Se a distribuição da carga total **Q** sobre a superfície **S** não for uniforme, ter-se-á um valor diferente de **(dQ / dS)** para cada ponto **P** da superfície **S**, isto é, **(dQ / dS)** depende das coordenadas do ponto **P**. Observar que a densidade superficial média de carga σ_m também dependerá da parcela ΔS considerada.

Em qualquer um dos casos, se a função $\sigma = \sigma(x, y, z)$ for conhecida e bem comportada, pode-se determinar a carga total **Q** da superfície **S** calculando uma integral de superfície, sobre a superfície **S**:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \Rightarrow Q = \int_S \sigma dS \quad (1.9)$$

Obs.: Para a **densidade superficial de carga elétrica**, define-se que a **carga elétrica** em um **ponto** ou em uma **linha é igual a zero**.

3.3.4.3 Densidade Volumétrica de Carga Elétrica: ρ

Seja um volume **V** qualquer, carregado com uma carga elétrica total **Q**.

Seja ΔV uma porção elementar do volume **V**, que contém uma parcela elementar de carga ΔQ , da carga total **Q**.

Então por definição, a **densidade volumétrica de carga elétrica** no **ponto P** é a **carga por unidade de volume** na vizinhança do **ponto P**:

$$\rho_{\text{media}} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \Rightarrow \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad \text{ou,} \quad \rho = \frac{dQ}{dV} \quad (1.10)$$

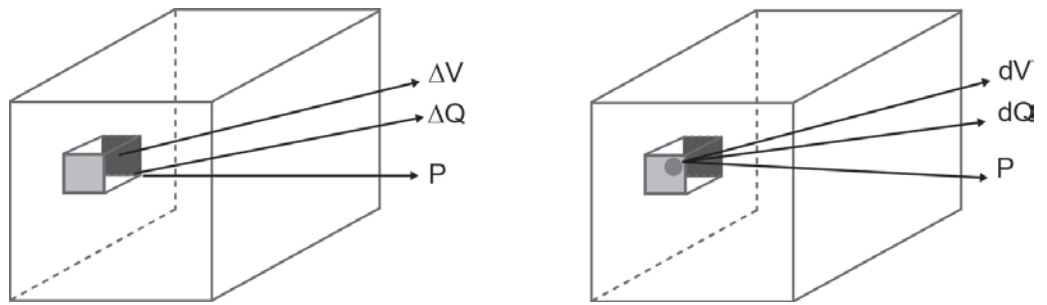


Figura 2

Então, o volume elementar dV em torno do ponto P contém a carga elementar dQ . Como nos casos anteriores, também se pode ter $\sigma = \sigma(x, y, z)$. Se a carga Q estiver uniformemente distribuída em V , tem-se uma densidade volumétrica uniforme de carga elétrica, com ρ constante coincidindo com ρ_m , definida porção ΔV . Se a carga Q estiver distribuída de modo não uniforme, tem-se um valor de (dQ / dV) para cada ponto P e uma vez conhecida a função $\sigma = \sigma(x, y, z)$ para qualquer um dos casos, pode-se determinar a carga total Q por meio de uma integral de volume, realizada por todo o volume V .

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow Q = \int_V \rho dV \quad (1.11)$$

Obs.: Aqui também se tem que: **a carga elétrica num ponto, numa linha ou numa superfície é nula**, pelos mesmos motivos anteriores.

As unidades para as densidades de carga elétrica no **S.I.** de unidades são:

$$[\lambda] = \frac{C}{m}; [\sigma] = \frac{C}{m^2}, [\rho] = \frac{C}{m^3}$$

3.4 Campo elétrico

3.4.1 Introdução

O conceito de campo elétrico é similar ao de outros campos já conhecidos. Associado ao conceito de força gravitacional tem-se que:

O campo gravitacional é definido como a força que uma dada massa m faz atuar sobre uma massa de teste m_0 colocada num certo ponto distante r de m , dividida pela massa de teste m_0 :

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0} = \left(\frac{Gm}{r^2} \right) \hat{r} \quad (2.1)$$

ou então,

$$\vec{F} = m_0 \vec{g} \quad (2.2)$$

com unidades: $[g] = N / Kg$.

3.4.2 O campo elétrico

Por definição, o campo elétrico produzido por uma carga Q num certo ponto P é a razão entre a força elétrica de interação \vec{F} de Q com uma carga de teste q_0 colocada em P :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (2.3)$$

ou então,

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (2.4)$$

com unidades: $[E] = N / C$

O campo elétrico \vec{E} desempenha o papel de transmissor da interação entre as cargas elétricas, e a sua visualização é facilitada pelo conceito das linhas de força.

A **linha de força** é um artifício introduzido por Michael Faraday para auxiliar na representação do campo elétrico. As relações entre as linhas de força e o vetor campo elétrico são:

1. As linhas de força são desenhadas na direção de força que seria exercida sobre uma carga de prova positiva em cada ponto do espaço;
2. A tangente a uma linha de força, num dado ponto, dá a direção de \vec{E} neste ponto;
3. As linhas de força são traçadas de forma que o número de linhas que atravessa a unidade de área de uma seção perpendicular à direção das mesmas é proporcional ao módulo de \vec{E} ;
4. As linhas de força são representações tridimensionais e se originam sempre nas cargas positivas e terminam em cargas negativas. As cargas positivas são como fontes e as negativas como sumidouros das linhas de campo elétrico;
5. Nas regiões com linhas próximas, o valor de \vec{E} é grande;
6. Nas regiões com linhas afastadas, o valor de \vec{E} é pequeno;

7. As linhas de força são distribuídas simetricamente quando abandonam ou chegam a uma carga puntiforme;
8. As linhas de campo não podem se cruzar.

Algumas propriedades de campos vetoriais: um campo genérico \vec{B} .

3.4.2.1 Campo Estacionário

Se $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, \vec{B} não varia com o tempo, logo o campo vetorial \vec{B} é estacionário.

3.4.2.2 Campo Conservativo

É todo campo vetorial tal que sua circuitação seja nula, qualquer que seja o contorno C a ele pertencente. Então, se:

$$\oint_C \vec{B} \times d\vec{\ell} = 0 \quad (2.5)$$

o campo vetorial \vec{B} é conservativo.

3.4.3 O campo de uma carga puntual

Uma carga puntual q_0 colocada a uma distância r de uma carga q experimenta um campo elétrico dado por:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = k \left(\frac{Q}{r^2} \right) \hat{r} \quad (2.6)$$

3.4.4 O dipolo elétrico

É uma configuração com duas cargas elétricas de mesmo módulo, mas sinais opostos, separadas espacialmente por uma distância $2a$, e que tem aplicação em um grande número de casos práticos.



Figura 3

Exemplo 1: Considerar um **dipolo elétrico** alinhado ao longo do eixo **y** como indicado na Figura 3. Encontrar a intensidade e a direção do campo elétrico em **P**, a uma distância arbitrária **x** ao longo do eixo **x**.

Solução:

- seja **2a** a separação entre as cargas;
- **E₊** o campo devido à carga **(+)** e **E₋** o campo devido à carga **(-)**;
- a distância de **q₊** ou **q₋** ao ponto **P** é $r = (a^2 + x^2)^{1/2}$;
- as intensidades dos campos elétricos em **P** são:

$$E_+ = E_- = \frac{kq}{a^2 + x^2} \quad (2.7)$$

somando **E₊** com **E₋**, vetorialmente, as componentes **x** se cancelam, resultando só a componente **y**.

$$E_y = \left(\frac{kq}{a^2 + x^2} \right) \cos \phi \quad (2.8)$$

em que

$$\cos \phi = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \quad (2.9)$$

substituindo o valor de **k** e **cos φ** resulta, para o campo elétrico no ponto **P**:

$$\vec{E} = k \left(\frac{2aq}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{j} \quad (2.10)$$

3.4.4.1 A aproximação de campos distantes

Em geral interessa determinar o campo em pontos distantes do dipolo. Como a grande maioria destes são de natureza atômica ou molecular, é comum usar a aproximação $x \gg 2a$, de modo que o termo a^2 fica desprezível diante de x^2 . Assim, o valor do campo será:

$$E \cong k \frac{2aq}{x^3} \quad (2.11)$$

Então, para grandes distâncias no eixo x , o campo decai com o **cu**bo da distância ao dipolo. Se o ponto P estiver sobre o eixo y e for usada a aproximação $y \gg 2a$, resultará numa expressão semelhante à anterior com y no lugar de x .

Se o ponto P estiver em qualquer lugar do espaço, distante r do centro do dipolo, vale a expressão idêntica e genérica para o **campo distante do dipolo**:

$$E \cong k \frac{2aq}{r^3} \quad (2.12)$$

3.4.4.2 O momento de dipolo elétrico

Na expressão para o campo distante se a carga q for duplicada ($2q$) e a distância $2a$ for dividida ao meio (a), o valor do campo não se altera. Ou seja, o que determina o valor do campo a grandes distâncias é o produto $2aq$. Por definição,

$$p = 2aq \rightarrow \text{momento de dipolo elétrico.} \quad (2.13)$$

3.4.4.3 Ação de um campo elétrico sobre o momento de dipolo elétrico

O torque

Um dipolo elétrico quando colocado em um campo elétrico, por ação das forças de interação de suas cargas com o campo, tende a se alinhar com o campo, resultando num torque sobre o dipolo.

A força F_+ em q_+ é igual e oposta a F_- em q_- e a força líquida no dipolo é nula. Assim pode-se calcular o torque que atua sobre a carga $+q$ com o ponto de referência em o , como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.14)$$

cujos módulos são dados pela expressão seguinte com $F = qE$ e $r = a\hat{p}$:

$$\tau = aF_+ \sin\theta$$

e para as duas cargas

$$\tau = 2aF_+ \sin\theta$$

que tende a fazer as cargas $+q$ e $-q$ girar em torno do ponto o , diminuindo o valor de θ . Em notação vetorial pode-se escrever:

$$\vec{\tau} = 2aq\hat{p} \times \vec{E}$$

em que o termo $(2aq)$ é o momento de dipolo elétrico \vec{p} dirigido da carga negativa para a positiva

$$\vec{p} = 2aq\hat{p}$$

Assim, quando o dipolo está sob a ação de um campo elétrico externo \vec{E} , tem-se um torque dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.15)$$

3.4.4.4 A energia de um dipolo elétrico

A energia de um dipolo elétrico é mínima quando este está alinhado com o campo elétrico,

$$U(\theta = 0^\circ) = -pE$$

isto é, quando \vec{p} e \vec{E} estão na mesma direção e sentido, e a energia potencial é máxima quando o ângulo $\theta = 180^\circ$, isto é, \vec{p} e \vec{E} são antiparalelos, então

$$U(\theta = 180^\circ) = pE$$

Mas, como em qualquer situação, pode-se definir a configuração correspondente à energia potencial zero de um modo perfeitamente arbitrário, porque sempre se está interessado só nas **variações de energia potencial**, pois só elas têm **significado físico**. É comum usar

$$U(\theta = 90^\circ) = 0.$$

Quando o dipolo estiver com energia mínima $U < 0$, para aumentar sua energia é necessário realizar trabalho sobre ele. A variação da energia obtida é igual ao trabalho realizado. Então, para qualquer orientação de θ :

$$U(\theta) = W = - \int_{90^\circ}^{\theta} \tau d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin\theta d\theta$$

W é o trabalho realizado pelo agente externo para girar o dipolo de sua posição de referência até o ângulo θ , resultando em

$$U(\theta) = -pE \cos\theta$$

que na forma vetorial pode ser escrito como

$$U(q) = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{é a energia de um dipolo.} \quad (2.16)$$

$U = -pE \rightarrow$ mínimo (negativo), quando \vec{p} aponta no sentido do campo \vec{E} , ($\theta = 0^\circ$)

$U = pE \rightarrow$ máximo (positivo), quando \vec{p} aponta no sentido oposto ao de \vec{E} , ($\theta = 180^\circ$).

3.4.5 Campos elétricos de distribuições contínuas de cargas

Na prática, arranjos de cargas pontuais isoladas raramente existem.

Ao contrário, usualmente cargas elétricas se distribuem em regiões ou em objetos que podem ser aproximados como **suavemente contínuos**.

Em cada caso tem-se que determinar um elemento de carga dq e então calcular um elemento de campo $d\vec{E}$ que é produzido no ponto P .

O campo total \vec{E} é o vetor soma de todos os campos elementares naquele ponto.

3.4.6 Campo devido a uma carga elementar

campo devido a uma
carga elementar dq

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

cargas ao longo
de uma **linha**:

$$dq = \lambda dx$$

cargas em uma
superfície:

$$dq = \sigma dA$$

campo total devido a todos
os elementos de carga

$$\vec{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

cargas através de
um **volume**:

$$dq = \rho dV$$

Os elementos diferenciais devem ser escolhidos de modo a facilitar as simplificações com as simetrias das distribuições de carga.

3.4.7 Exemplos

3.4.7.1 A linha de Cargas

Seja uma linha uniforme de cargas $\lambda \left(\frac{C}{m} \right)$ ao longo do eixo x desde $x = -a$ até $x = +a$, como na Figura 4. Encontrar o campo elétrico \vec{E} no ponto P a uma distância y ao longo do bissetor perpendicular.

Solução: Determinar um elemento de carga dq e então calcular um elemento de campo $d\vec{E}$ que é produzido no ponto P . O campo total \vec{E} naquele ponto é o vetor soma de todos os campos elementares $d\vec{E}$ naquele ponto.

Simetria:

- os elementos infinitesimais de carga dq , simétricos em relação à origem no eixo x , geram campos $d\vec{E}_x$ que se cancelam mutuamente, aos pares. Resultam só as componentes $d\vec{E}_y$.

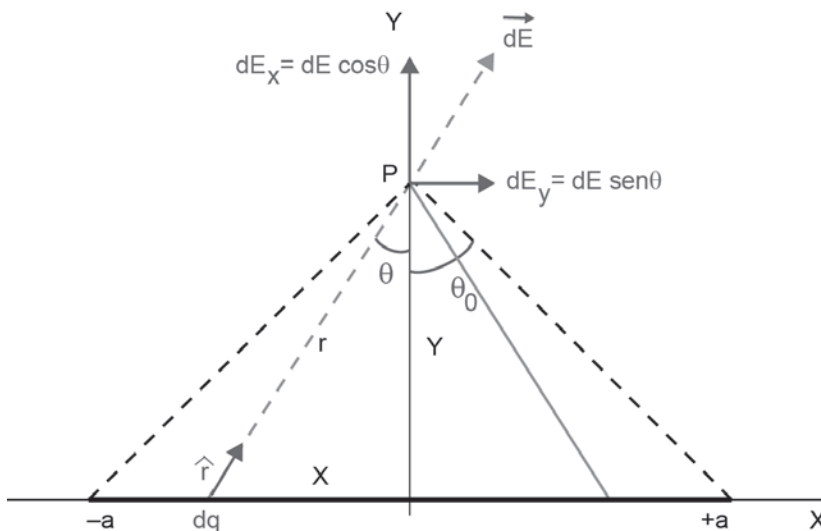


Figura 4

Assim, como $dq = \lambda dx$, vem

$$dE = k \frac{dq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{r^2} \text{ e então, } dE_y = dE \cos \theta = \frac{k\lambda \cos \theta dx}{r^2}$$

Tem-se três variáveis: x , r e θ . Escolher θ como uma variável e escrever as outras em função dela. Deste modo, fica-se com uma integração só em θ .

$$r = \frac{y}{\cos \theta}; \quad x = y \operatorname{tg} \theta; \quad dx = y \sec^2 \theta d\theta = y \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

substituindo na equação para $d\vec{E}_y$,

$$dE_y = \frac{k\lambda y \cos \theta}{\left(\frac{y}{\cos \theta}\right)^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right) d\theta = \frac{k\lambda}{y} \cos \theta d\theta$$

Os limites de integração são de $-\theta_0$ até $+\theta_0$.

Devido à simetria este limite pode ser substituído por duas vezes (2x) o limite de 0 até $+\theta_0$.

$$E_y = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} dE_y = \frac{2k\lambda}{y} \int_0^{\theta_0} \cos\theta d\theta = \left| \frac{2k\lambda}{y} \sin\theta \right|_0^{\theta_0} = \frac{2k\lambda \sin\theta_0}{y}$$

entretanto, $\theta_0 = (a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ e $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, resultando em

$$E_y = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\lambda a}{y\sqrt{a^2 + y^2}}$$

No limite quando $y \gg a$, a linha de carga torna-se uma carga puntual, resultando:

$$E \Rightarrow \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q}{r^2}$$

(\vec{E} diminui com r^2)

3.4.7.2 O anel de cargas

Uma carga total positiva Q é distribuída uniformemente através de um anel fino circular e não condutor de raio a . Encontrar o campo elétrico em um ponto P ao longo do eixo do anel, a uma distância x do centro como mostra a Figura 5.

Solução:

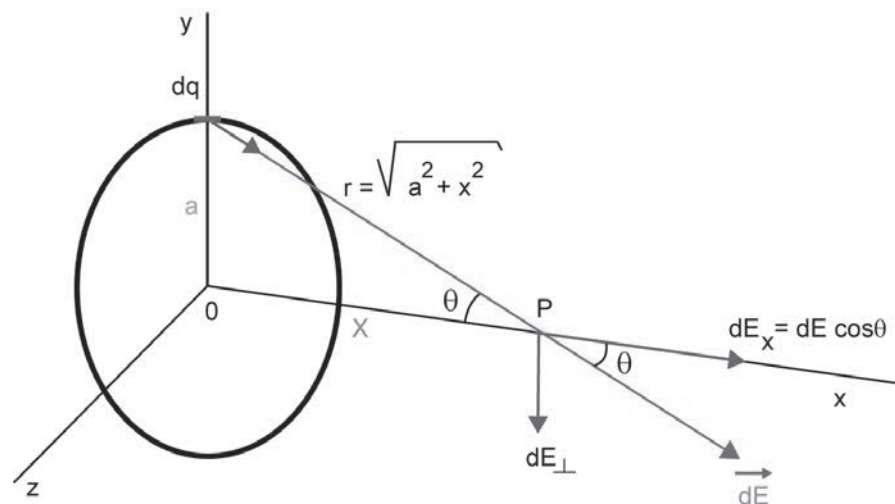


Figura 5

Escolher dq de modo a calcular $d\vec{E}$ produzido no ponto de interesse.

Somar então todos os elementos para determinar o campo total \vec{E} naquele local.

Simetria:

Devido à simetria, cada elemento dq pode formar par com um elemento similar no lado oposto do anel.

Todo componente $d\vec{E}_\perp$ perpendicular ao eixo x é cancelado pelo componente $d\vec{E}_\perp$ do lado oposto. \Rightarrow A soma de todos os componentes $d\vec{E}_\perp$ resulta em zero.

Como só ficam as componentes na direção x , da Lei de Coulomb pode-se escrever:

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \hat{r} \text{ ou ainda, } dE = \frac{kdq}{(a^2 + x^2)}$$

cuja componente x é:

$$dE_x = \frac{kdq}{(a^2 + x^2)} (\cos \theta) = \frac{kdq}{(a^2 + x^2)} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)$$

somando, para obter o campo total:

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{kxdq}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a integral é realizada sobre a carga, cujo valor total é conhecido, pois, $\int dq = Q$, resultando em

$$E_x = \frac{kx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dq = \frac{kxQ}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dois casos limites:

1. Se $x \rightarrow 0$. Quando se move P para o centro do anel o campo $E \rightarrow 0$ devido à simetria.
2. Se $x \gg a$. O anel se transforma gradativamente em uma carga puntual de modo que o campo elétrico no limite decai com r^2 .

$$E \Rightarrow \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } x \gg a)$$

3.4.7.3 O disco de cargas

Um disco circular plano não condutor de raio r tem uma carga uniforme por unidade de área σ em um de seus lados. Encontrar o campo elétrico em um ponto P ao longo do eixo do disco, a uma distância x do centro do disco.

Solução:

Usando a solução do exemplo anterior, considerar o disco como feito de um conjunto de anéis concêntricos com raio r e espessura dr .

Simetria:

O campo elétrico $d\vec{E}$ em cada ponto x para cada anel é dirigido ao longo do eixo $+x$. Somando os dE 's para todos os anéis resulta no campo E_x .

Escrever uma expressão para o campo dE_x devido a um anel elementar de raio r e espessura dr :

$$\text{Área do anel} \rightarrow A = 2\pi r dr.$$

$$\text{Carga elementar do anel} \rightarrow dq = \sigma dA = 2\pi\sigma r dr$$

Da equação para o campo E_x produzido pelo anel de cargas dq (trocando $a \rightarrow r$ e ainda $Q \rightarrow dq$), vem

$$dE_x = \frac{kx dq}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{kx 2\pi\sigma r dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

O campo total é a soma dos campos devido a todos os anéis desde $r = 0$ até $r = R$.

$$E_x = kx 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Consultando uma tabela de integrais, a solução fica:

$$E_x = kx 2\pi\sigma \left(\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_0^R \right)$$

Substituindo os limites de integração e rearranjando, resulta

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

Dois casos limites:

1. Se $x \rightarrow 0$ ou, o que é análogo, $R \rightarrow \infty$: tem-se um campo próximo a uma superfície infinitamente plana e grande de cargas, o que resulta em

$$E_x \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (muito próximo do disco).}$$

O que mostra que o campo é uniforme e independente da distância x da placa de cargas.

2. Se $x \gg R$: para pontos muito distantes do disco, ao longo de seu eixo obtém-se uma aproximação para o campo, mudando a expressão acima e fazendo uma expansão em série,

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\frac{R^2}{x^2} + 1}} \right) \text{ e como}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \cong 1 - \frac{b^2}{2} \text{ quando } b^2 \ll 1,$$

$$E_x \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2x^2} \right) = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi \epsilon_0 x^2} = \left(\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right) \frac{Q}{x^2} \text{ (muito longe do disco).}$$

3.5 Potencial elétrico

3.5.1 Introdução

O **campo eletrostático**, tal como o **campo gravitacional**, é **conservativo** e isto permite simplificar sua descrição, através de uma única função escalar, definida como **potencial elétrico V**:

O potencial elétrico V é a energia potencial elétrica U por unidade de carga.

Para entender o conceito de **potencial elétrico V** é necessário usar a analogia do **campo elétrico \vec{E}** com o **campo gravitacional terrestre \vec{g}** .

Para deslocar um corpo de massa m da superfície da Terra até uma altura h , o trabalho W realizado é armazenado na forma de energia potencial gravitacional ΔU no sistema físico Terra-pedra, com $\Delta U = mgh$.

Se a pedra for abandonada com velocidade inicial $\vec{v}_0 = \mathbf{0}$, num ponto situado a uma altura h da superfície terrestre, a energia potencial inicial do sistema Terra-pedra será transformada continuamente, durante a queda, em energia cinética de translação da pedra em relação à Terra, executando um movimento uniformemente acelerado.

Quando a pedra atingir a superfície, toda a energia potencial gravitacional inicial ter-se-á transformado totalmente em energia cinética, que no instante do choque poderá se transformar em energia térmica (ou em outras formas de energia).

3.5.2 Energia potencial elétrica

Seja o trabalho realizado pela força elétrica quando uma partícula de teste, positiva, de carga q_0 , se move de um ponto i para um ponto f , num campo elétrico \vec{E} .

Por definição:

A diferença de energia potencial elétrica ΔU da carga de teste q_0 , entre os pontos i e f , é o negativo do trabalho W_{if} realizado pela força eletrostática \vec{F}_e , via o campo elétrico \vec{E} , sobre a carga durante o seu deslocamento.

$$\Delta U \equiv U_f - U_i \equiv -W_{if} \quad (3.1)$$

A força eletrostática, tal como a gravitacional, é conservativa. Por isto, ΔU independe do caminho usado na integração para calcular o trabalho W_{if} .

Já foi visto em mecânica que, sendo C um caminho qualquer entre dois pontos i e f , orientado de i para f , o trabalho realizado por uma força \vec{F}_e ao longo deste caminho é definido por:

$$W_{i \rightarrow f}^{(C)} \equiv \int_i^f \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} \quad (3.2)$$

em que o elemento de linha $d\vec{\ell}$ tem a mesma orientação de C .

Em particular, se a curva C é a trajetória descrita por uma partícula de massa m , com velocidade $\vec{v}(t)$, sob a ação de uma força \vec{F}_e , vale:

$$W_{i \rightarrow f}^{(C)} \equiv K_f - K_i \quad (3.3)$$

em que

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

é a energia cinética da partícula. O trabalho realizado é igual à variação da energia cinética, entre os dois pontos.

Se \vec{F}_e é uma força central,

$$\vec{F}_e = F_e(r)\hat{r}$$

em que \hat{r} é o versor da direção radial, com origem no centro de forças, então

$$W_{i \rightarrow f}^{(C)} \equiv \int_{i(C)}^f \vec{F}(r)\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr \quad (3.4)$$

esta integral não depende do caminho C , só depende dos pontos inicial e final. Pode-se escrever:

$$\int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = -[U(r_2) - U(r_1)] \quad (3.5)$$

em que

$$U(r) \equiv -\int_{r_0}^r F(r')dr' \quad (3.6)$$

r_0 é um ponto arbitrariamente escolhido, em que se considera $U \equiv 0$.

Na equação que exprime a conservação da energia, a função $U(\mathbf{r})$ é a energia potencial, K é a energia cinética e E é a energia total do sistema. Assim,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = E \quad (3.7)$$

3.5.3 Energia potencial em um ponto

Só as diferenças de energia potencial têm significado físico. Por isto pode-se, por convenção, considerar a energia potencial de um ponto i , qualquer, igual a zero, quando este ponto i estiver localizado a uma distância infinita de qualquer carga elétrica.

Então, se $i \rightarrow \infty \Rightarrow U(i) \equiv 0$.

Logo,

$$\Delta U \equiv U_f - U_i \equiv -W_{if},$$

e

$$U(f) = -W_{\infty f} \quad (3.8)$$

A energia potencial U de uma carga elétrica de teste q_0 , em qualquer ponto f , é igual ao negativo do trabalho realizado ($W_{\infty f}$) sobre a carga de teste q_0 pelo campo elétrico, enquanto a carga se move do infinito até o ponto f em questão.

3.5.4 O Potencial elétrico

A energia potencial elétrica U por unidade de carga elétrica q_0 é independente do valor para cada ponto em um campo elétrico \vec{E} .

$$V \equiv \frac{U}{q_0} \quad (3.9)$$

Para a situação da **Equação (3.1)**, vale:

$$\Delta U \equiv U_f - U_i \equiv -W_{if} = -\int_i^f \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = -q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

que, com a definição **(3.9)**, fica

$$\Delta V \equiv V_f - V_i \equiv \frac{U_f - U_i}{q_0} = -\frac{W_{if}}{q_0} = -\int_i^f \frac{\vec{F}_e}{q_0} \cdot d\vec{\ell} = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.10)$$

e usando a definição de energia potencial num ponto f :

$$\Delta V(f) = -\frac{W_{\infty f}}{q_0} = -\int_{\infty}^f \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.11)$$

A **Equação (3.11)** só envolve as cargas da fonte que efetivamente contribuem para produzir o campo elétrico \vec{E} .

Unidades:

$$[U] = N \cdot m = J; [V] = \frac{J}{C}.$$

Um elétron-Volt (**eV**) é uma energia igual ao trabalho necessário para mover uma única carga elementar (**e**) de um elétron ou de um próton para vencer uma diferença de potencial elétrico de exatamente **1V**.

Pela **Equação (3.10)**, vem

$$\Delta V(f) = -\frac{W_{if}}{q_0} \quad \therefore W_{if} = -q_0 \Delta V \quad \therefore 1\text{eV} = e \cdot 1\text{V}$$

$$1\text{eV} = (1,60 \times 10^{-19} \text{ C}) \left(1 \frac{\text{J}}{\text{C}} \right) = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J.}$$

3.5.4.1 Superfícies Equipotenciais

Uma superfície equipotencial é aquela sobre a qual, em todos os seus pontos, o potencial elétrico possui um único valor.

Nenhum trabalho é realizado para mover uma carga q_0 de um ponto i até um ponto f , por qualquer que seja a trajetória (mesmo que ela não permaneça todo o percurso sobre uma mesma superfície), se os pontos i e f pertencerem a uma mesma superfície equipotencial.

$W_{if} > 0$ se $V_f > V_i$; $W_{if} < 0$ se $V_f < V_i$ mas $W_{if} = 0$ se $V_f = V_i$.

Então, W_{if} e $V_f - V_i$ são independentes da trajetória percorrida pela carga q_0 desde i até f . Se não fosse assim, não seria possível associar um único valor ao potencial elétrico de cada ponto, e o conceito de potencial elétrico não teria sentido físico e nem utilidade prática.

As superfícies equipotenciais são sempre normais às linhas de campo elétrico, em qualquer ponto.

3.5.4.2 Algumas famílias equipotenciais

Carga elétrica puntiforme ou esférica \Rightarrow Superfícies esféricas concêntricas

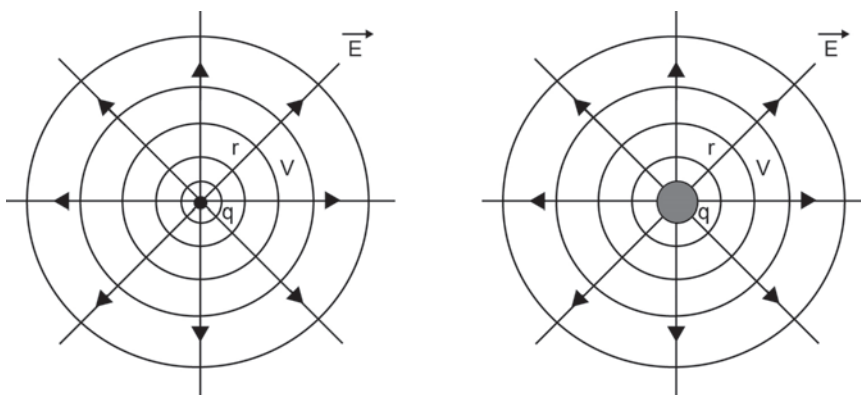


Figura 6

(a)

(b)

Campo elétrico uniforme \Rightarrow Planos perpendiculares às linhas do campo elétrico

Carga elétrica linear retilínea \Rightarrow Superfícies cilíndricas com eixo na linha de cargas

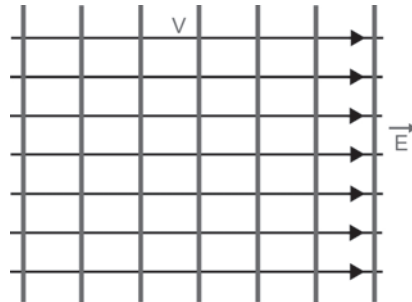


Figura 7

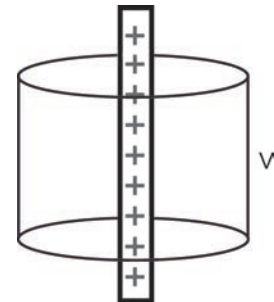


Figura 8

Vantagens importantes:

Quando se conhece o potencial elétrico V associado a uma distribuição de cargas em todos os pontos do espaço:

- Conhecendo a **ddp** entre dois pontos quaisquer, pode-se obter a **variação da energia potencial** $\Delta U \equiv U_f - U_i \equiv -W_{if}$ e o **trabalho realizado** W_{if} .
- Conhecendo a função **potencial elétrico** $V(\mathbf{r})$ é possível determinar o **campo elétrico** $\vec{E}(\mathbf{r})$, calculando certas **derivadas** da função **potencial elétrico** $V(\mathbf{r})$.

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = -\vec{\text{grad}}V = -\vec{\nabla}V \quad (3.12)$$

- A construção de superfícies de nível, sobre as quais o **potencial elétrico** $V(\mathbf{r})$ tem um mesmo valor em todos os pontos (sobre as superfícies equipotenciais), dá uma visualização do padrão do **campo elétrico** $\vec{E}(\mathbf{r})$ no espaço. E o vetor **campo elétrico** $\vec{E}(\mathbf{r})$, é normal às superfícies equipotenciais, em qualquer ponto, sempre.

3.5.5 O Potencial elétrico criado por uma carga puntiforme

Uma **carga elétrica** $(+q)$ cria um **campo elétrico** $\vec{E}(\mathbf{r})$. Qual o **potencial elétrico** $V(\mathbf{r})$ num ponto P , distante r da carga?

1ª Solução: usando

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.13)$$

$d\vec{\ell}$ aponta para a carga q , portanto, em sentido oposto ao de $\vec{E}(r)$.

Assim, na **Equação (3.13)** fica:

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E \cos 180^\circ d\ell = -E d\ell.$$

Então, r é medido tomando q como origem e o deslocamento $d\ell$ se dá no sentido decrescente de r , logo, $d\ell = -dr$. Então,

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E dr.$$

Com isto, a **Equação (3.13)** fica:

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^r E dr = -Kq \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -Kq \left(\frac{1}{r} \right)_{\infty}^r = Kq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right)$$

$$V(r) = \frac{Kq}{r} \quad (3.14)$$

2ª Solução: usando

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.13)$$

\vec{r}' e também $d\vec{r}'$ crescem no sentido de afastamento da carga q .

$d\vec{\ell}$ aponta para a carga q , portanto, $d\vec{\ell} = -d\vec{r}'$.

Então,

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E} \cdot (-d\vec{r}') = -\vec{E} \cdot d\vec{r}' = -E dr' \cos 0^\circ = -E dr'$$

e a **Equação (3.13)**, observando a inversão dos limites de integração, fica:

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot (-d\vec{r}') = -\int_r^{\infty} -E \cdot dr' = -Kq \int_r^{\infty} \frac{dr'}{r'^2} = -Kq \left(\frac{1}{r'} \right)_r^{\infty}$$

$$V(r) = \frac{Kq}{r} \quad (3.14)$$

Logo,

Se $q > 0 \Rightarrow V(r) > 0 \Rightarrow$ Próximo à carga q , há um **pico** de V .

Se $q < 0 \Rightarrow V(r) < 0 \Rightarrow$ Próximo à carga q , há um **poço** de V .

3.5.6 Potencial elétrico devido a uma distribuição de cargas pontuais

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = K \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r} \quad (3.15)$$

Esta é uma soma fácil de efetuar porque a função **potencial elétrico $V(\mathbf{r})$** é um escalar.

3.5.7 Potencial elétrico devido a um dipolo elétrico

Um **dipolo elétrico** é formado por duas **cargas elétricas $+q$ e $-q$** separadas por uma distância **$2a$** , com **momento de dipolo elétrico**:

$$\vec{p} = 2aq\hat{p} \quad (3.16)$$

$V(r, \theta) = ?$ O **potencial $V(r, \theta)$** será obtido pela soma de dois potenciais, **V_1** , devido à **carga $+q$** e **V_2** devido à **carga $-q$** :

$$V(r) = \sum_{i=1}^n V_i = V_1 + V_2 = K \frac{q}{r_1} - K \frac{q}{r_2} \quad \text{ou} \quad V = Kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.17)$$

A **Equação (3.17)** é um resultado exato. Considerando o ponto **P** distante do dipolo, pode-se fazer **$r \gg a$** , então, $r_2 - r_1 \cong 2a \cos \theta$ e $r_1 \cdot r_2 \cong r^2$.

Com estas aproximações, a **Equação (3.17)** fica:

$$V = Kq \frac{2a \cos \theta}{r^2} = Kp \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (3.18)$$

Na **Equação (3.18)** nota-se que:

Quando $\theta = 90^\circ \Rightarrow V = 0$ o ponto **P** está sobre o plano normal ao eixo **z** ;

Quando $\theta = 0^\circ \Rightarrow V = V_{\text{máx}}$ o ponto **P** está sobre o eixo **z** ;

Quando $\theta = 180^\circ \Rightarrow V = V_{\text{mín}}$ o ponto **P** está sobre o eixo **z** .

Com $V_{\text{mín}} = -V_{\text{máx}}$

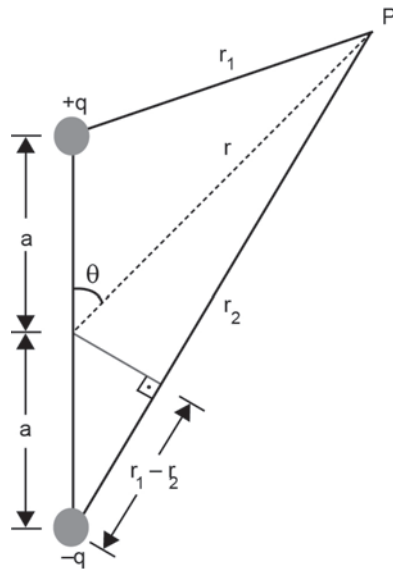


Figura 9

V não depende separadamente de q ou de $2a$, só do produto $p = 2aq$.

3.5.8 Potencial elétrico devido a uma distribuição contínua de cargas

Seja um elemento infinitesimal de carga elétrica $+ dq$, que será tratado como se fosse uma carga puntual, o potencial elétrico V num ponto P a uma distância r fica:

$$dV = K \frac{dq}{r^2} \quad (3.19)$$

integrando sobre todos os elementos de carga

$$V = \int_{\text{stoec}} dV = K \int_{\text{stoec}} \frac{dq}{r^2} \quad (3.20)$$

3.5.9 Diferença de potencial

A definição de potencial elétrico V num ponto P se baseia numa posição de referência escolhida para ter a energia potencial $U = 0$ em $r = \infty$. Então, $V_\infty = 0$.

Só variações na energia potencial, $U_b - U_a$, possuem sentido físico, como só uma diferença de potencial elétrico tem sentido físico:

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} \quad (3.21)$$

q_0 é a carga de teste, tão pequena quanto se queira. Então,

$$U_b - U_a = -q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.22)$$

dividindo a **Equação (3.22)** por q_0 , a diferença de potencial, definida pela **Equação (3.21)**, fica:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.23)$$

3.5.10 Relação entre campo elétrico e diferença de potencial

Considerando o ponto **a** em $r = \infty$, tem-se que $V_a = V_\infty = 0$ e o ponto **b** correspondendo à posição **P** em que o potencial **V** é calculado, vem:

$$V = - \int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.24)$$

3.5.10.1 Cálculo do campo elétrico \vec{E} a partir do potencial elétrico V

A Figura 10 mostra seções retas de uma família de superfícies equipotenciais com espaçamento dr , sendo a diferença de potencial entre cada par de superfícies adjacentes dV .

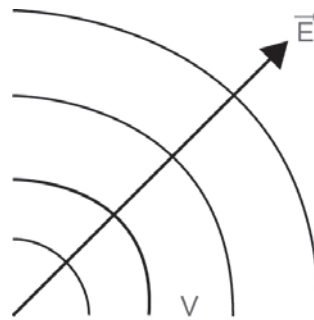


Figura 10

O campo elétrico \vec{E} é normal às superfícies equipotenciais. Então,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3.25)$$

A **Equação (3.25)** dá a variação em **ddp**, **dV**, sobre um deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$.

A função potencial elétrico pode ser expressa em termos das coordenadas cartesianas como $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, o que significa que se dV for interpretada como a variação para ir do ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ para o ponto $(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{y} + d\mathbf{y}, \mathbf{z} + d\mathbf{z})$, então dV pode ser escrito em termos de derivadas parciais:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (3.26)$$

mas,

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (3.27)$$

substituindo as **equações (3.26) e (3.27)** na **Equação (3.25)**:

$$\left(E_x + \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \left(E_y + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy + \left(E_z + \frac{\partial V}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (3.28)$$

os deslocamentos $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$, $d\mathbf{z}$ podem ser escolhidos independentes uns dos outros e em geral não são nulos. Por exemplo, $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{y}$ poderiam ser escolhidos como nulos, porém $d\mathbf{z}$ teria que ser $\neq 0$, neste caso,

$$E_z + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

analogamente, sendo escolhidos, $dy = dz = 0$ e $dx \neq 0 \Rightarrow E_x + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$

ou ainda, $dx = dz = 0$ e $dy \neq 0 \Rightarrow E_y + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$

Portanto, para garantir que o lado esquerdo da **Equação (3.28)** seja nulo, quaisquer que sejam $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$, $d\mathbf{z}$, é necessário ter:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (3.28)$$

em qualquer ponto \mathbf{P} arbitrário do espaço.

O vetor campo elétrico pode ser escrito como:

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \quad (3.29)$$

ou

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad (3.30)$$

ou

$$\vec{E} = -\text{grad}V = -\vec{\nabla}V \quad (3.31)$$

Logo, \vec{E} aponta na direção em que V diminui. Pois a **Equação (3.31)** é o negativo do gradiente de V , com

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (3.32)$$

3.5.11 Um condutor carregado e isolado

Um condutor carregado e isolado, em equilíbrio eletrostático tem **toda a sua carga** depositada na superfície externa. Por isto, o potencial elétrico dentro deste condutor, assim como na superfície, possui um mesmo valor $V = \text{constante}$.

Então, a **superfície do condutor** é uma **superfície equipotencial**.

Se for uma esfera condutora de raio R , carregada com uma carga total q , vem:

$$\text{Em } r < R \Rightarrow V = K \frac{q}{R}; \quad \vec{E} = 0$$

$$\text{Em } r > R \Rightarrow V = K \frac{q}{r}; \quad \vec{E} = K \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\text{E, em } r = R \Rightarrow V = K \frac{q}{R}; \quad \vec{E} = K \frac{q}{R^2} \hat{r}$$

Os gráficos ficam:

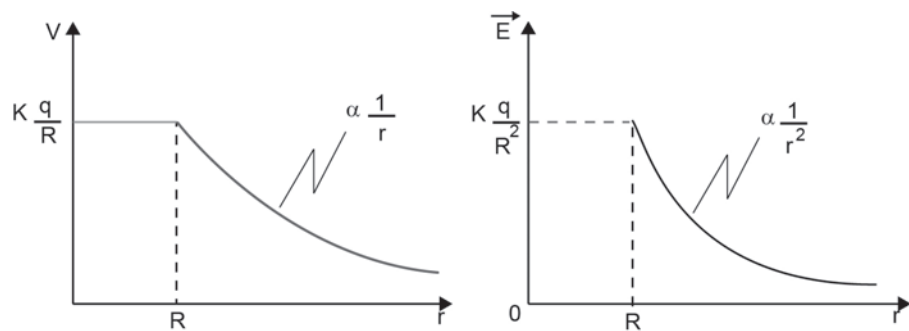


Figura 11

(a)

(b)

Obs: Estes gráficos valem para esferas condutoras de raio R , carregadas, maciças ou ocas (cascas esféricas condutoras).

3.5.12 O poder das pontas

Em um condutor isolado, a densidade superficial de cargas tende a ser maior nas regiões de menor raio de curvatura; e menor nas regiões de maior raio de curvatura.

$$\sigma_1 > \sigma_2$$



Figura 12

3.5.13 O efeito corona ou descarga corona

Um condutor com potencial elétrico elevado pode descarregar-se no ar, que normalmente é isolante - mas possui alguns íons negativos, formados, por exemplo, pelos raios cósmicos, na atmosfera. Então, um condutor carregado positivamente atrairá estes íons negativos.

Com uma ponta fina (pequeno raio de curvatura), um condutor possui um campo elétrico \vec{E} grande, que atrai os íons negativos. Estes, por sua vez, são bastante acelerados, o que provoca colisões e cria novos íons, resultando em descargas elétricas do ar para o condutor, descarregando-o.

Este é o princípio utilizado no para-raios.

3.6 Capacitores

Qualquer arranjo de dois condutores isolados entre si e de suas vizinhanças, carregados com **cargas iguais e opostas**, é chamado de **capacitor**.

A Figura 13 mostra dois condutores com cargas iguais e de sinais opostos q , um com potencial elétrico V_1 e o outro V_2 .

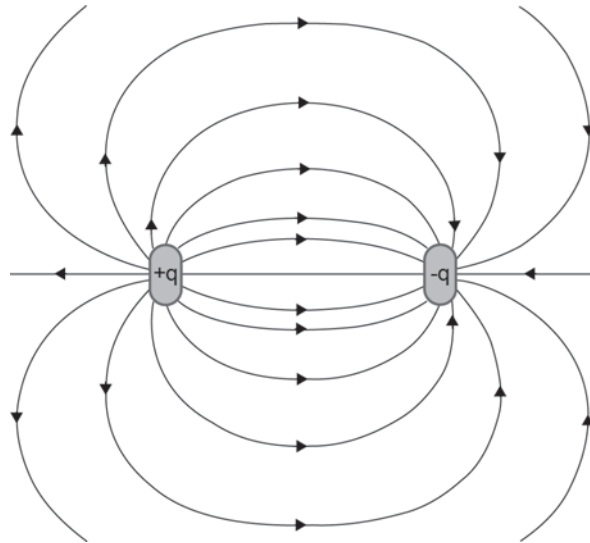


Figura 13

A **diferença de potencial** entre os dois condutores é $V = V_2 - V_1$.

Em circuitos elétricos se usa V no lugar de ΔV para representar a **ddp** aplicada a um componente elétrico do circuito.

Em geral $V \propto q$, e a constante de proporcionalidade é escrita como $\frac{1}{C}$, em que C é a **capacitância** dos dois condutores. Então,

$$V = \frac{q}{C}; \quad C = \frac{q}{V}; \quad q = CV \quad (4.1)$$

Unidade no S.I.:

$$[C] = 1C/1V = 1F \text{ (FARAD)}$$

Subunidades:

$$\mu F = 10^{-6} F \text{ microFarad}$$

$$\eta F = 10^{-9} F \text{ nanoFarad}$$

$$p F = 10^{-12} F \text{ picoFarad}$$

A capacitância **independe** da carga q nos condutores.

A capacitância só depende:

1. Da **geometria** dos condutores: tamanho, forma, espaçamento entre eles e também de suas relações uns com os outros.
2. Do **meio** no qual os condutores estejam imersos.

3.6.1 Calculando a capacitância

Para calcular a capacitância de um capacitor do qual se conhece a geometria:

1. Considera-se uma carga q sobre as placas.
2. Calcula-se o campo elétrico \vec{E} entre as placas em termos de sua carga, usando a lei de Gauss:

$$\epsilon_0 \oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = q \quad (4.2)$$

3. Conhecido o \vec{E} , calcula-se a diferença de potencial V entre as placas, usando:

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\ell \quad (4.3)$$

4. Calcula-se a capacitância C usando a **Equação (4.1)**:

$$C = \frac{q}{V}$$

3.6.1.1 Capacitor de placas paralelas:

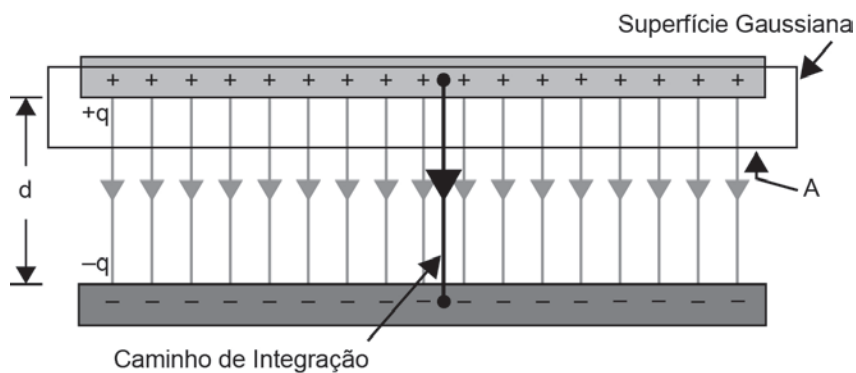


Figura 14

Um **capacitor de placas planas e paralelas** é constituído por duas placas planas e paralelas (Figura 14), de área A e distância entre as placas d , com carga $+q$ numa das placas e $-q$ na outra. Normalmente $A \gg d$. Qual é a capacitância?

Solução:

1. O campo elétrico é dado pela lei de Gauss, aplicada a uma superfície gaussiana **S**. Só o fluxo pela área **A** entre as placas é **diferente** de zero. Então,

$$\oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_A \sigma da = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad (4.4)$$

2. A diferença de potencial fica:

$$V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ aqui, } d\vec{l} = -d\vec{r} \text{ então, } \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

logo,

$$V = V_B - V_A = Ed \text{ que substituindo na equação } C = \frac{q}{V}, \text{ vem:}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (4.5)$$

3.6.1.2 Capacitor cilíndrico

Um **capacitor cilíndrico** é constituído de dois cilindros coaxiais de raios **a** e **b**, condutores e isolados, de comprimento **L** (Figura 15). Normalmente **L >> b**, de tal modo que podem ser desprezados os efeitos de borda nas extremidades do capacitor. Cada placa contém uma carga **q**. Qual é a capacitância?

Solução:

1. Só interessa o campo elétrico na região entre os cilindros. Como superfície gaussiana escolhe-se uma superfície cilíndrica de raio **a < r < b** e comprimento **L**, coaxial com as placas.

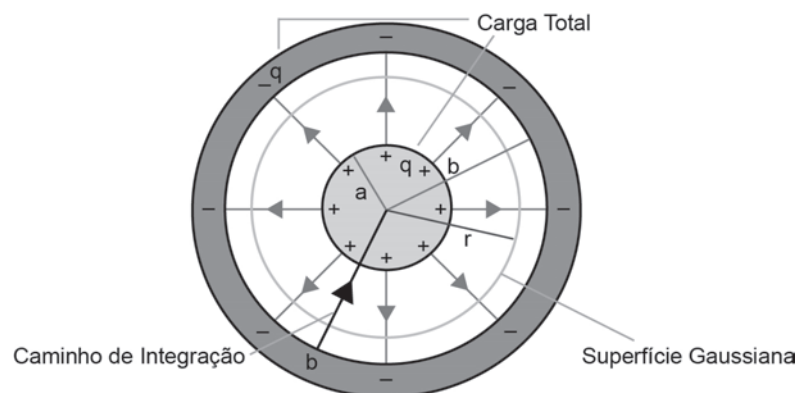


Figura 15

Nas bases da superfície gaussiana $\vec{E} \perp \hat{n}$, logo o fluxo por estas bases é nulo.

O fluxo total pela superfície gaussiana será o fluxo pela superfície cilíndrica de área:

$$A = 2\pi rL.$$

A lei de Gauss fica:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{A=2\pi rL} E da = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 2\pi rL = \frac{q}{\epsilon_0}$$

e o campo elétrico:

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi rL\epsilon_0} \hat{r} \quad (4.6)$$

2. A diferença de potencial fica:

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow V = -\int_b^a E \cos 180^\circ d\ell = \int_b^a E d\ell = \int_a^b E dr, \quad d\vec{\ell} = -d\vec{r}$$

$$V = \frac{q}{2\pi L\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi L\epsilon_0} [\ln r]_a^b \Rightarrow V = \frac{q}{2\pi L\epsilon_0} \left(\ln \frac{b}{a} \right) \quad (4.7)$$

3. A capacitância, usando $C = \frac{q}{V}$, fica:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (4.8)$$

3.6.1.3 Capacitor esférico

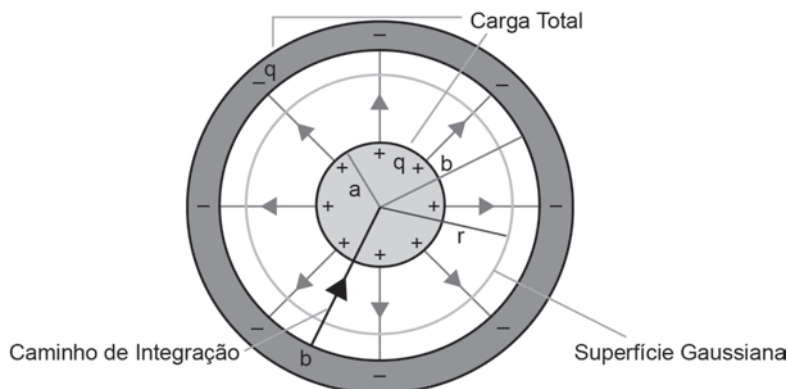


Figura 16

Um **capacitor esférico** é constituído de duas cascas condutoras esféricas, concêntricas, de raios **a** e **b**, (com **b > a**), sendo que a interna pode ser maciça (Figura 16). A carga total em cada casca é **q**.

Calcular a capacitância.

Solução:

1. Escolhendo uma superfície gaussiana **S** esférica de raio **a < r < b**, usando a lei de Gauss, o **campo elétrico** fica:

$$\int_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{4\pi r^2} E da = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

2. A **ddp** entre as placas fica:

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow V_a - V_b = \int_a^b E dr = kq \int_a^b \frac{dr}{r^2} = kq \left(-\frac{1}{r} \right)_a^b$$

$$V = V_a - V_b = kq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (4.9)$$

3. A **capacitância** fica:

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (4.10)$$

3.6.1.4 Uma esfera isolada

A capacitância de uma esfera isolada pode ser calculada considerando que a outra placa seja uma casca esférica condutora de raio infinito.

Calcular a capacitância de uma esfera condutora isolada de raio **R** e carga **q**.

Solução:

Basta considerar o raio **b** $\rightarrow \infty$ na equação da **ddp** para o capacitor esférico:

$$V = V_a - V_\infty = V_a = kq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{kq}{a}$$

E a capacitância fica, substituindo **a** por **R**:

$$C = 4\pi \epsilon_0 R$$

3.6.2 Associações de capacitores

Se um circuito contém uma combinação de capacitores, é possível substituir esta combinação por um capacitor equivalente que terá a mesma capacitância da combinação.

3.6.2.1 Capacitores em série

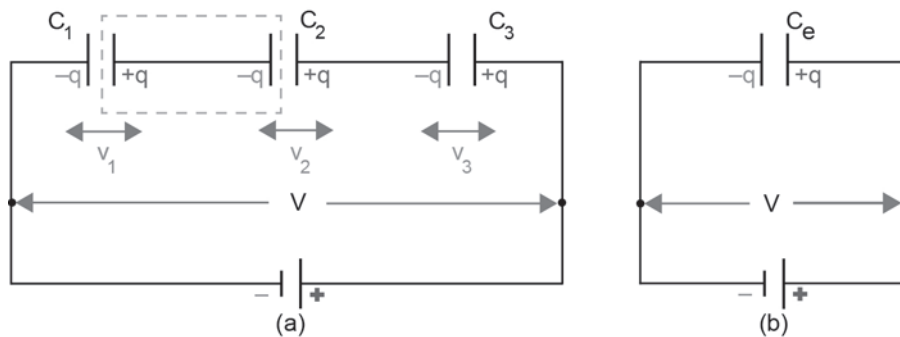


Figura 17

A Figura 17(a) mostra uma combinação de três capacitores em série, inicialmente descarregados. Ao se ligar uma bateria aos pontos extremos da combinação, os capacitores vão ser carregados.

As placas **2** e **3** possuem carga total nula, antes de se ligar a bateria; elas formam um único condutor junto com o fio que as liga, totalmente isolado das outras placas. Logo, depois de carregar os capacitores, a carga total deste condutor (placas **2** e **3** **mais o fio** que as liga) deve permanecer nula. O mesmo ocorre com as placas **4** e **5** **mais o fio** que as liga. A placa **1** fica com carga $-q$, atraindo carga $+q$ para a placa **2**, o que resulta numa carga $-q$ na placa **3**. A placa **4** fica com carga $+q$ e a placa **5** com $-q$.

Por conservação de energia, a placa **6** fica com $+q$.

Nesta situação os capacitores C_1 , C_2 , C_3 **estão em série**, suas ddp's devem satisfazer

$$V_1 = \frac{q}{C_1}; \quad V_2 = \frac{q}{C_2}; \quad V_3 = \frac{q}{C_3}$$

A **ddp** total é:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

Da Figura 17(b),

$$C_{\text{eq}} = \frac{q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (4.11)$$

Para um número **n** de capacitores em **série**:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (4.12)$$

36.2.2 Capacitores em paralelo

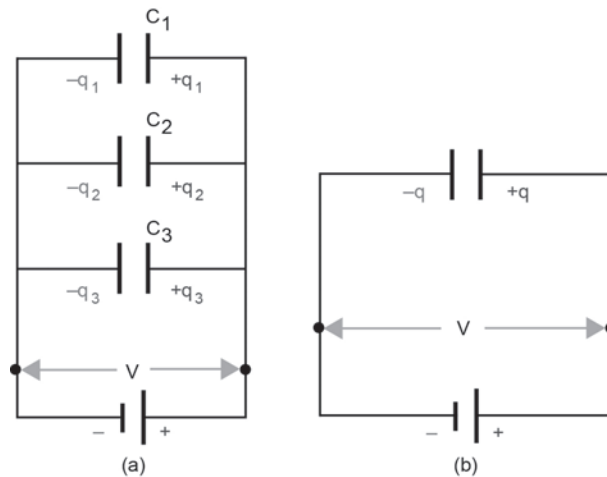


Figura 18

A Figura 18(a) mostra uma associação de três capacitores em **paralelo** inicialmente descarregados. Ao se ligar a bateria, todos são submetidos a uma mesma **ddp**, ficando com cargas:

$$q_1 = C_1 V; \quad q_2 = C_2 V; \quad q_3 = C_3 V$$

A carga total fica:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3) V$$

Mas, pela Figura 17(b),

$$C_{\text{eq}} = \frac{q}{V} \Rightarrow C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (4.13)$$

Para n capacitores em paralelo:

$$C_{eq} = \sum_{j=1}^n C_j \quad (4.14)$$

3.6.3 Armazenando energia num capacitor

Um capacitor é útil para armazenar energia em seu volume sob a forma de um campo elétrico.

O **trabalho W** , realizado para carregar um capacitor, é armazenado na forma de **energia potencial elétrica U** no **campo elétrico \vec{E}** entre as placas.

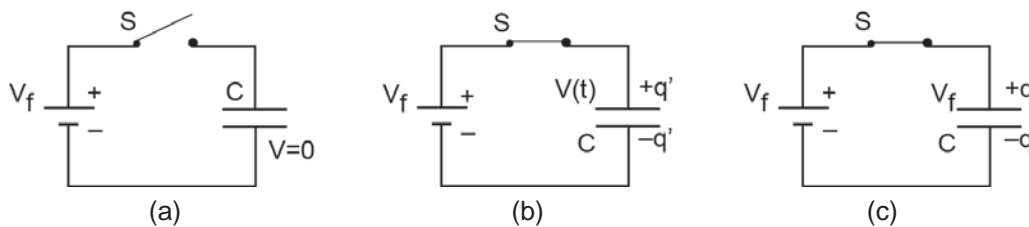


Figura 19

A Figura 19(a) mostra um capacitor descarregado. Ao ser ligada a chave **S**, o capacitor começa a ser carregado eletricamente.

A Figura 19(b) mostra um estado intermediário deste processo de carga no instante t . Neste instante t , uma placa tem carga $+q'$ e a outra $-q'$ que são funções do tempo. A **ddp no capacitor, $V(t)$** , é:

$$V(t) = \frac{q'}{C}$$

após mais um instante dt , a **carga** aumenta por dq' .

O trabalho para transferir a carga dq' é dW , dado por:

$$dW = V dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Este processo continua até transferir uma carga q (partindo das placas descarregadas) e o trabalho total realizado pode ser posto sob a forma de variação da energia potencial elétrica:

$$\Delta U = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}. \text{ Mas, } q = CV \text{ logo:}$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.15)$$

Esta é a **energia potencial elétrica** acumulada sob a forma de **campo elétrico** entre as placas do **capacitor**.

A **densidade de energia potencial elétrica** u também é uma constante, dada por:

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \text{ usando } C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ vem, } u = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d}\right)^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.16)$$

A **Equação (4.16)** vale para qualquer capacitor.

3.6.4 Dielétricos: sob um ponto de vista microscópico

O que ocorre em termos atômicos e moleculares quando um dielétrico é submetido à ação de um campo elétrico \vec{E}_1 ?

3.6.4.1 Dielétrico polar

As moléculas do dielétrico possuem momentos de dipolo permanente – Figura 20(a).

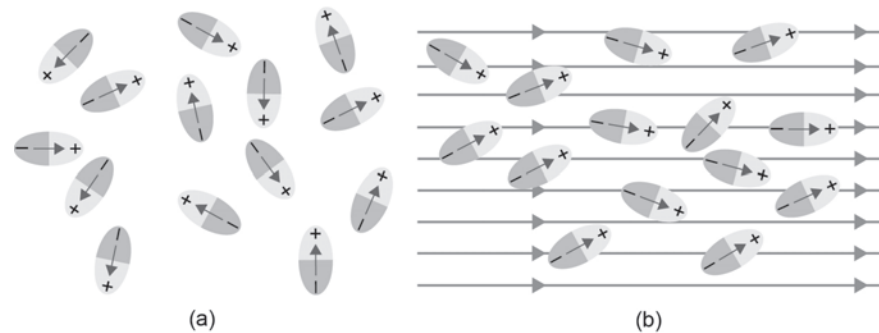


Figura 20

Estes dipolos elétricos tendem a se alinhar com um campo elétrico externo, como na Figura 20(b). Este alinhamento só não é completo porque as moléculas estão em agitação térmica constante. O alinhamento aumenta com a intensidade do campo elétrico aplicado ou quando a temperatura diminui.

3.6.4.2 Dielétrico apolar

Poucas ou nenhuma molécula possui momentos de dipolo elétrico permanentes. A aplicação de um campo \vec{E}_1 externo **cria** momentos de dipolo elétrico induzidos.

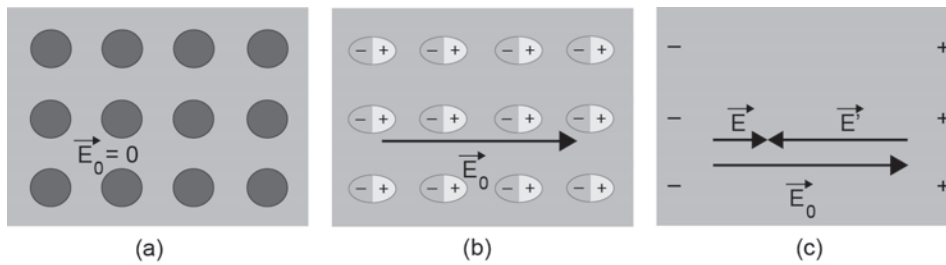


Figura 21

A Figura 21(a) mostra um dielétrico **apolar** sem campo elétrico externo aplicado. Na Figura 21(b), um campo elétrico \vec{E}_0 é aplicado, “esticando” as moléculas e separando os centros de carga positiva e negativa. A Figura 21(c), mostra o efeito total, em que a polarização do dielétrico cria um campo elétrico \vec{E}' contrário ao campo \vec{E}_0 externo, resultando um campo \vec{E} dentro do dielétrico dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \text{ que em módulo fica: } E = E_0 - E'$$

Isto explica como um bastão carregado atrai um pedaço de papel?

3.6.5 Lei de Gauss com dielétrico

Nas Figura 22(a) e Figura 22(b), considerar as cargas iguais.

Para a situação (a), a lei de Gauss fica:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \epsilon_0 E_0 A = q \Rightarrow E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad (4.17)$$

Com o **dielétrico**, situação **(b)**, se tem:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \epsilon_0 EA = q - q' \Rightarrow E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} \quad (4.18)$$

em que $-q'$ é a carga elétrica induzida (ligada) na superfície do dielétrico;

q é a carga livre;

$q - q'$ é a carga líquida dentro da superfície gaussiana.

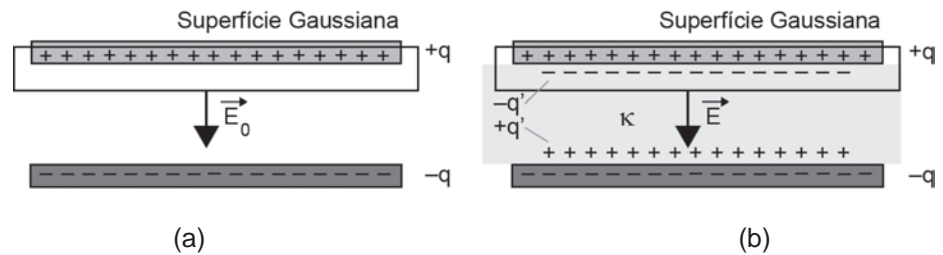


Figura 22

O efeito do dielétrico é enfraquecer o campo elétrico \vec{E}_0 original, por um fator κ :

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A} \quad (4.19)$$

e

$$q - q' = \frac{q}{\kappa} \Rightarrow q' = q \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) \quad (4.20)$$

e a lei de Gauss com dielétrico fica:

$$\epsilon_0 \oint_s \kappa \vec{E} \cdot \hat{n} da = q \quad (4.21)$$

Vale para qualquer capacitor com dielétrico.

O vetor

$$\vec{D} = \epsilon_0 \kappa \vec{E} \quad (4.22)$$

é chamado **vetor deslocamento elétrico \vec{D}** .

E a equação da lei de Gauss pode ser escrita:

$$\oint_s \vec{D} \cdot \hat{n} da = q \quad (4.23)$$

3.6.6 Esfera condutora isolada

Uma esfera condutora isolada, de raio R , no vácuo, com uma carga q .

a) Calcular a energia potencial elétrica total acumulada no espaço que circunda a esfera.

b) Qual o raio R_0 de uma superfície esférica tal que metade da energia U do item (a) está no seu interior?

Solução:

A **densidade de energia elétrica** fora da esfera é:

$$u = \frac{\epsilon_0 E}{2} = \frac{\epsilon_0 k^2 q^2}{2r^4} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

3.7 Corrente elétrica

3.7.1 Introdução

No estudo da Eletrostática só foram consideradas cargas elétricas em repouso. O campo elétrico no interior de um condutor, carregado ou não, em equilíbrio é sempre zero.

Já no estudo da **Eletrodinâmica**, as **cargas elétricas** estão em **movimento** e o **campo elétrico** no **interior** de **condutores** pode ser, agora, **diferente de zero**.

3.7.2 Eletrodinâmica

É o estudo do fluxo de cargas elétricas – a **corrente elétrica**.

Tipo e Natureza das correntes elétricas:

- Descargas elétricas na atmosfera → raios.
- Correntes elétricas nervosas → regulam nossa atividade muscular.
- Correntes nas instalações elétricas residenciais e em lâmpadas incandescentes.
- Canhão de elétrons num tubo de raios catódicos → TV e osciloscópio.
- Partículas carregadas **(+)** e **(-)** fluem em gases ionizados de lâmpadas fluorescentes, em baterias e pilhas elétricas e em baterias de carros.
- Correntes percorrem semicondutores em calculadoras e em chips que controlam fornos de micro-ondas e lavadoras de louça etc.
- Numa escala global, partículas carregadas aprisionadas na faixa de radiação (cinturão) de Van Allen agitam-se de um lado para outro acima da atmosfera, entre os Polos Magnéticos Norte e Sul.
- Numa escala do Sistema Solar, enormes correntes de prótons, elétrons e íons voam radialmente para fora do Sol como Vento Solar.

- Numa escala galáctica, raios cósmicos, que são prótons com energias cinéticas muito altas, fluem através de nossa galáxia, a Via Láctea.

Corrente elétrica, é um **feixe de cargas em movimento**, mas isto não quer dizer que **todo fluxo de carga se movendo** forme uma **corrente elétrica**.

Para haver **corrente elétrica** é necessário um **fluxo líquido de cargas de um mesmo sinal, atravessando uma região num certo sentido, durante algum tempo**.

3.7.3 Força eletromotriz: ε

Para haver um **fluxo estacionário de cargas elétricas**, ou **corrente**, em um condutor, o trajeto deve ser **fechado**, formando um circuito completo.

Uma carga positiva sempre se move de um local com potencial mais alto para um local com potencial mais baixo. Após viajar através de um trajeto completo na direção do decréscimo do potencial, ela volta ao ponto inicial, com o mesmo potencial do início do trajeto.

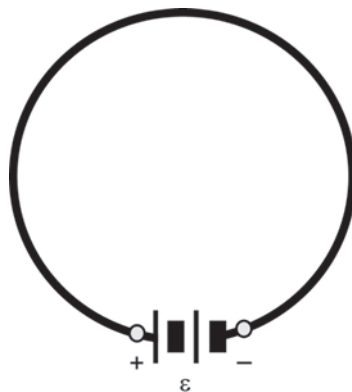


Figura 23

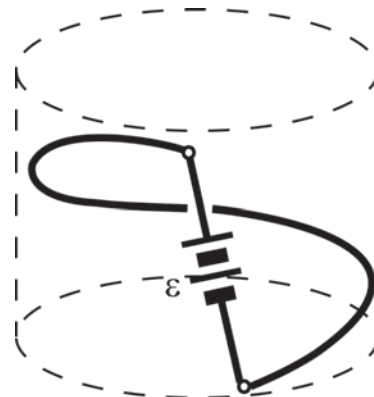


Figura 24

Em algum lugar do circuito deve haver um dispositivo que realize trabalho sobre a carga e aumente o seu potencial, Figura 23.

Uma fonte de energia que realiza este trabalho sobre a carga aumentando seu potencial é chamado um provedor de força eletromotriz, **fem**, Figura 24. Um provedor ou **fonte de força eletromotriz**: é qualquer dispositivo que transforma qualquer fonte de energia em uma **fonte de energia elétrica**.

Exemplos de provedores de fem:

1. Acumuladores, baterias de automóvel, pilhas de lanternas etc;

2. Geradores, tais como estações geradoras de potência por turbina à água, alternador de automóvel que produz uma corrente alternada;
3. Células solares que transformam energia radiante do sol em energia elétrica;
4. Células biológicas que utilizam energia química para manter **ddp's** em células nervosas e musculares de organismos vivos.

3.7.4 Corrente elétrica: i

A **corrente elétrica** é um **fluxo de cargas** em um **sentido definido**.

Um condutor metálico é composto de um arranjo de íons positivos fixos, com igual número de elétrons livres que se movem através do arranjo de íons.

Conectando as extremidades de um fio metálico aos terminais de uma bateria, devido à diferença de potencial V entre os terminais, um campo elétrico \vec{E} se estabelece através de todos os pontos do fio, quase com a velocidade da luz:

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (5.1)$$

Se o fio for uniforme, o campo será constante desde uma extremidade até a outra.

O campo elétrico exerce uma força sobre os elétrons de condução,

$$\vec{F} = -e\vec{E}. \quad (5.2)$$

As cargas positivas não se movem devido às forças elásticas entre elas, mas as cargas negativas movem-se através do fio num sentido oposto ao sentido do campo.

Ao ser acelerado pelo campo o elétron se move até sofrer uma colisão com um íon positivo perdendo parte da energia ganha. Novamente é acelerado até que nova colisão aconteça, e assim por diante. Na média os elétrons se deslocam com uma “**velocidade de deslocamento média, v_d** ”.

A distância média entre colisões, ou livre caminho médio, é em torno de **220** diâmetros iônicos para o cobre.

As colisões entre elétrons são raras e têm efeito desprezível na resistividade.

A **Corrente elétrica** é definida como a **quantidade de cargas por segundo** que passa através de uma **seção do condutor**:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \text{ ou } i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad i = \frac{dq}{dt} \quad (5.3)$$

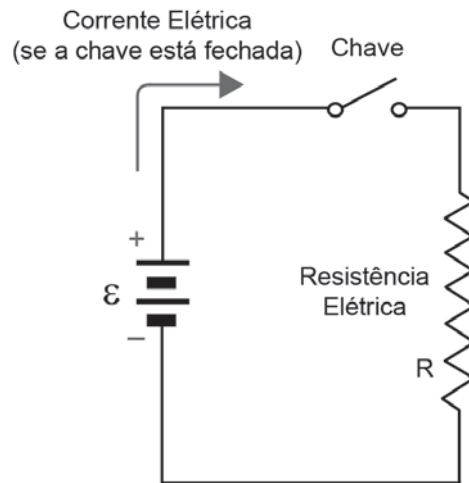


Figura 25

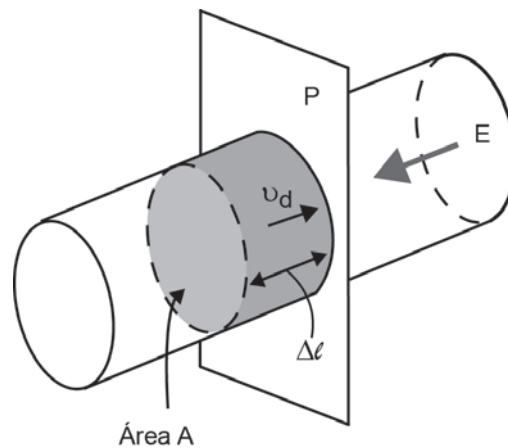


Figura 26

A unidade **SI** de corrente é **Coulomb / segundo (C / s)** ou **ampère (A)**.

A direção da corrente é aquela em que as **cargas positivas** se movem em resposta ao campo elétrico. Isto é uma convenção.

3.7.5 Corrente de deslocamento

Seja o segmento de fio mostrado na Figura 26. Todos os elétrons dentro do volume assinalado passam pelo plano perpendicular ao fio em P no tempo Δt . O comprimento $\Delta \ell$ do volume é:

$$\Delta \ell = v_d \Delta t$$

em que v_d é a velocidade média de deslocamento dos elétrons. A carga total no volume $A \Delta \ell$ é:

$$\Delta q = neA \Delta \ell \quad (5.4)$$

Em que n é o número de elétrons de condução por unidade de volume movendo-se no fio, e é a carga do elétron e A é a área da seção reta do fio. Combinando as duas equações anteriores obtém-se a quantidade de carga que passa no ponto por unidade de tempo:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = ne v_d A \quad (5.5)$$

3.7.6 Resistência elétrica

Quando portadores de carga são submetidos a uma ddp de V volts através do material, surge uma velocidade de deslocamento que depende da mobilidade dos elétrons quando eles ricocheteiam sucessivamente nos íons positivos do material. Esta mobilidade depende da força dirigente das cargas,

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

O campo elétrico \vec{E} acelera os elétrons entre as colisões, mas o resultado líquido é a velocidade terminal v_d .

A velocidade de deslocamento é tal que, o trabalho realizado pelo campo elétrico iguala-se com a energia cinética perdida nas colisões. Desse modo, $v_d \propto E$.

Pode-se escrever a **Equação (5.5)** em outra forma:

Seja um material condutor que tenha um comprimento L e uma área de seção reta constante A , através do qual se aplica uma ddp V (Figura 27).

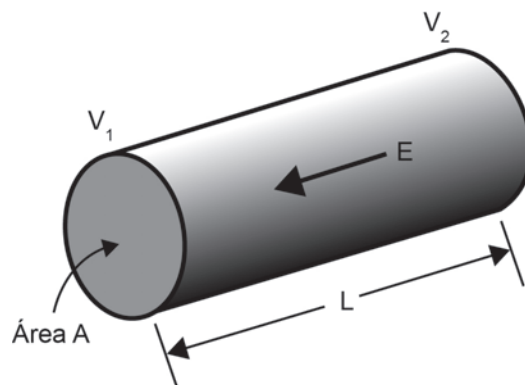


Figura 27

Com a **Equação (5.1)**:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

o campo elétrico fica:

$$E = \frac{V}{L}. \quad (5.6)$$

Mas $\mathbf{v}_d \propto \mathbf{eE}$, então

$$v_d \propto \frac{V}{L}$$

substituindo a **Equação (5.5)**, $i = nev_d A$, vem:

$$i \propto \frac{VA}{L}$$

A constante de proporcionalidade depende de propriedades intrínsecas do material particular envolvido. Define-se esta constante de proporcionalidade como sendo $1/\rho$:

$$i = \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{A}{L}\right) V \quad (5.7)$$

com ρ chamado de *resistividade* do material com unidades: $\left(\frac{V}{A}\right)m$.

A unidade $\left(\frac{V}{A}\right)$ é chamada **ohm** (Ω), e a **resistividade** é expressa no **SI** como ($\Omega.m$).

Em alguns casos é conveniente usar o recíproco da resistência, definida como a **condutividade**.

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \text{ (siemens) (siemens é unidade do SI)}. \quad (5.8)$$

A **resistividade** depende de vários fatores: pressão, estrutura cristalina, conteúdo da mistura e temperatura. Destas, aquela de mais fácil manipulação é a dependência com a temperatura, cuja expressão aproximada é:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \alpha(T - T_0) \quad (5.9)$$

em que α é um coeficiente de proporcionalidade chamado **coeficiente térmico de resistividade**.

Duas expressões de uso constante:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (5.10)$$

e

$$R = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (5.11)$$

A variação da resistência com a temperatura é útil na construção de termômetros.

3.7.7 Lei de Ohm

A **Equação (5.7)** implica que, se uma barra de material resistivo for submetida a uma **ddp**, a corrente através da barra será proporcional à **ddp** entre os terminais. Isto vale para muitos materiais diferentes. Se a proporcionalidade for exata a substância obedece à **lei de Ohm**.

Isto é:

$$V = IR \quad (5.12)$$

com R a resistência que é independente da corrente através da substância. Se a área da seção reta e o comprimento da barra forem uniformes entre os terminais,

$$R = \frac{\rho \ell}{A} \quad (5.13)$$

A unidade de resistência é o **ohms (Ω)**.

Na Figura 28 têm-se os gráficos de **corrente x tensão** (i versus V) que mostram o comportamento de vários dispositivos resistivos.

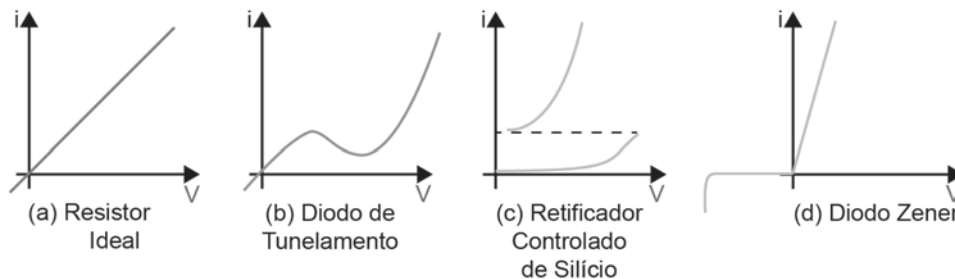


Figura 28

Somente o resistor ideal obedece à lei de **Ohm**.

3.7.8 Lei de Joule

Quando uma **ddp** é aplicada através de um resistor, elétrons são forçados a se deslocarem através do resistor, com uma velocidade de deslocamento constante na entrada igual na saída. A energia perdida pelos elétrons aparece como energia térmica no resistor.

Este efeito é chamado de **aquecimento por efeito Joule**.

Para calcular o aquecimento Joule num resistor, seja um circuito simples com um provedor de **fem** e um resistor que obedece a lei de **Ohm**:

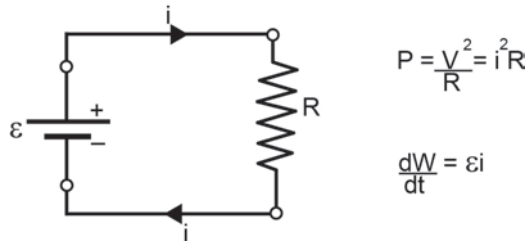


Figura 29

Fora da fonte de **fem**, a corrente i é na direção do ponto de mais alto potencial para o ponto de mais baixo potencial, ou seja, a *corrente convencional* é positiva.

Se o sistema estiver isolado, nenhuma energia entra ou sai do sistema.

Como a energia é conservada dentro do sistema, sabe-se que a energia adquirida pelas cargas devido ao trabalho sobre elas realizado quando estas se movem através da fonte de **fem**, deve ser igual à energia térmica desenvolvida no resistor.

O trabalho dW realizado pela **fem** ε sobre o elemento de carga dq é:

$$dW = \varepsilon dq \quad (5.13)$$

Potência é a taxa no tempo em que o trabalho é realizado:

$$P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} \quad (5.14)$$

ou, pela definição de corrente,

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon i \quad (5.15)$$

A conservação da energia requer que a taxa em que o trabalho é realizado $\frac{dW}{dt}$, pelo provedor de **fem**, deve ser igual à taxa com que a energia térmica é desenvolvida no resistor.

Como esta energia é irradiada e então desaparece do circuito, geralmente é chamada de “energia dissipada no resistor”, sob a forma de calor, por efeito Joule.

Se P é a potência dissipada no resistor,

$$P = \frac{dw}{dt} = \varepsilon i \quad (5.16)$$

ou, desde que $\varepsilon = V$, a **ddp** através do resistor,

$$P = Vi \quad (5.17)$$

mas como $V = R i$, pela lei de **Ohm**, resulta:

$$P = i^2 R \quad (5.18)$$

ou ainda,

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (5.19)$$

3.7.9 Densidade de corrente e condutividade

Em muitos casos as correntes elétricas não ficam confinadas em fios ou outros condutores discretos. Elas se difundem sobre regiões extensas que são mal comportadas, como a atmosfera, o oceano, gases ionizados de estrelas etc.

Nestas situações, o interesse recai na densidade de corrente definida como *a corrente por unidade de área em um dado ponto*:

$$J = \frac{i}{A} \quad (\text{forma escalar}) \quad (5.20)$$

A corrente pode ser expressa como $i = n q v_d A$, definindo o vetor densidade de corrente \vec{J} como:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (5.21)$$

em que n é o número de portadores de cargas livres por unidade de volume, e \vec{v}_d a velocidade média de deslocamento das cargas positivas (elétrons movem-se em sentido oposto).

Seja um condutor de comprimento ℓ e área de seção reta A , derivando uma forma alternativa da lei de **Ohm**,

$$i = \frac{V}{R} = \frac{E\ell}{R} = \frac{E\ell}{\rho \frac{\ell}{A}} = \frac{EA}{\rho}$$

dividindo ambos os lados pela área **A**,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (5.22)$$

σ é a **condutividade** do material definido como o inverso da resistividade

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho} \quad \text{com unidade do SI } (\Omega \cdot \text{m})^{-1} \equiv \text{siemens (S)}.$$

Existem então dois caminhos para analisar *correntes elétricas em materiais*:

A abordagem macroscópica
(para condutor de dimensões finitas)

A abordagem microscópica
(em um dado ponto dentro do material)
(dimensões infinitesimais)

$$i = \frac{V}{R}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Algumas vezes a densidade de carga varia de ponto a ponto, e consequentemente a densidade de corrente também varia. Para obter a corrente total **i** através de uma área **A**, é preciso integrar a densidade corrente sobre a área total **A**:

$$i_{\text{total}} = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} \, dA$$

em que $\hat{n} \, dA$ é o vetor de área elementar perpendicular à área considerada.

Exemplos:

1. Calcular a velocidade de deslocamento média dos elétrons, viajando através de um fio de cobre com uma área de seção reta de **1 mm²**, devido a uma corrente de **1A**. Cada átomo de cobre contribui com **1** elétron para o fluxo. O peso atômico do cobre é **63,54** e sua densidade é **8,92 g/cm³**.

Solução:

Calculando o número de elétrons livres que formam a corrente:

$$n = \left(1 \frac{\text{elétron}}{\text{átomo}} \right) \frac{N_A \rho}{M} \quad n = 8,45 \times 10^{28} \frac{\text{elétrons}}{\text{m}^3}$$

N_A é o número de Avogadro, ρ a densidade e **M** o peso atômico do cobre. Calculando agora a velocidade de deslocamento,

$$v_d = \frac{i}{neA} = \frac{1\text{A}}{\left(8,45 \times 10^{28} \frac{\text{elétrons}}{\text{m}^3}\right) \left(\frac{1,602 \times 10^{-19} \text{C}}{\text{elétrons}}\right) (10^{-6} \text{m}^2)}$$

$$v_d = 7,39 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

este valor é menor do que **0.1** milímetro por segundo. Nesta velocidade o elétron levaria **3,76 horas** para atravessar um metro.

2. Na Figura 29, se $\xi = 6 \text{ V}$ e $R = 12 \Omega$, encontrar:

- taxa na qual o provedor de **fem** trabalha;
- a potência dissipada no resistor.

Solução:

a) Como $\xi = V$

$$I = \frac{\xi}{R} = \frac{6 \text{ V}}{12 \Omega} = 0,500 \text{ A}$$

A taxa na qual o trabalho é realizado pelo provedor de **fem** é dado por

$$\frac{dW}{dt} = (6 \text{ V})(0,5 \text{ A}) = 3,00 \text{ W} = 3,00 \text{ W}$$

b) A conservação da energia requer que as respostas **(a)** e **(b)** sejam as mesmas. A potência dissipada no resistor é:

$$P = I^2 R = (0,5 \text{ A})^2 (12 \Omega) = 3,00 \text{ W}$$

3. Um feixe de elétrons emergindo de um certo acelerador de elétrons de alta energia tem uma área de seção circular reta com raio de **1 mm**.

- Se o feixe de corrente é de **8 μA** , encontrar a densidade de corrente no feixe, supondo que este seja uniforme em toda a extensão.
- A velocidade dos elétrons é tão próxima da velocidade da luz, que seu valor pode ser tomado como sendo **c**. Encontrar a densidade de elétrons no feixe.
- Quanto tempo decorre para um número de Avogadro de elétrons emergir do acelerador?

Solução:

$$\text{a) } J = \frac{I}{A} = \frac{8 \times 10^{-6} \text{ A}}{\pi (1 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 2,55 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

b) como $I = nev_d$, vem:

$$n = \frac{I}{ev_d} = \frac{2,55 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}}{(1,60 \times 10^{-19} \text{ C}) \left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} = 5,31 \times 10^{10} \text{ m}^{-3}$$

c) como $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{I} = \frac{N_A e}{I} = \frac{(6,02 \times 10^{23}) (1,60 \times 10^{-19} \text{ C})}{8 \times 10^{-6} \text{ A}} = 1,20 \times 10^{10} \text{ s}$$

em torno de 381 anos.

3.8 Circuitos de corrente elétrica contínua e alternada

3.8.1 Introdução

Um circuito de corrente contínua é aquele em que o fluxo de cargas se dá numa única direção. Serão discutidos métodos de análise de circuitos CC que formam cadeias de trajetos de condução contendo fontes de **fem**, resistores e capacitores.

Das leis de conservação da energia e conservação da carga se obtém as **leis de Kirchhoff** que simplificam a análise de circuitos.

Serão apresentados circuitos que medem corrente, **ddp** e **fem**, e no final será analisado o circuito RC no qual a corrente varia com o tempo, resultando nas **funções transientes**:

$$i(t); q(t); V_C(t); V_R(t).$$

3.8.2 Corrente e fem

Baterias, fontes de tensão contínua e geradores elétricos são capazes de manter uma **ddp V** entre **dois pontos** aos quais estejam ligados. São as **fontes de força eletromotriz (fem):** ε

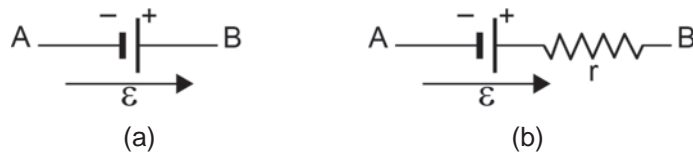


Figura 30 (a) a resistência interna r da fonte de **fem** é nula $r = 0$; (b) a resistência interna da fonte é $r \neq 0$.

Uma fonte de **fem** é capaz de realizar trabalho **W** sobre portadores de carga elétrica, fazendo-os circular por um circuito elétrico fechado, Figura 31:

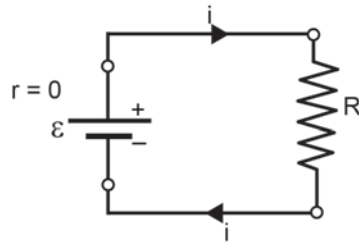


Figura 31

Analisando sob o ponto de vista de **trabalho** e **transferência de energia**:

Uma quantidade de carga **dq** atravessa uma seção reta qualquer do circuito num tempo **dt**. Para que esta carga atravessasse a fonte ε , ela realiza um trabalho **dW** sobre os portadores de carga (+) para fazer com que eles se movam na direção do **potencial mais elevado (+) da fonte, internamente**, vencendo a **força de repulsão coulombiana**.

$$\varepsilon \equiv \frac{dW}{dq} \quad \text{mas} \quad P \equiv \frac{dW}{dt} \quad \text{e} \quad p = \varepsilon i \Rightarrow dW = \varepsilon i dt \quad (6.1)$$

Pelo **princípio da conservação de energia**, o **trabalho realizado** pela fonte tem que ser igual à **energia térmica dissipada** na resistência pelo efeito Joule. Usando:

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = Ri^2 \quad \text{vem} \quad \varepsilon i dt = Ri^2 dt \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} \quad (6.2)$$

3.8.2.1 Forma alternativa de obter a corrente

Partindo do ponto 1, percorrendo o circuito no sentido anti-horário, somando-se as **ddp's** encontradas:

$$V_1 + \varepsilon - Ri = V_1 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R}$$

A **força eletromotriz** é a **energia por unidade de carga** transferida para as cargas móveis pela bateria. A quantidade iR é energia por unidade de carga transferida das cargas móveis para a energia térmica dentro do resistor.

Quando se tem associações de resistores num circuito, em **série** e/ou em **paralelo**, o primeiro passo na análise deste circuito é ver se é possível simplificar a configuração atual do circuito para uma nova configuração mais simples, utilizando resistências equivalentes a estas associações.

3.8.3 Resistores em série

A Figura 32(a) mostra um arranjo de resistores em série.

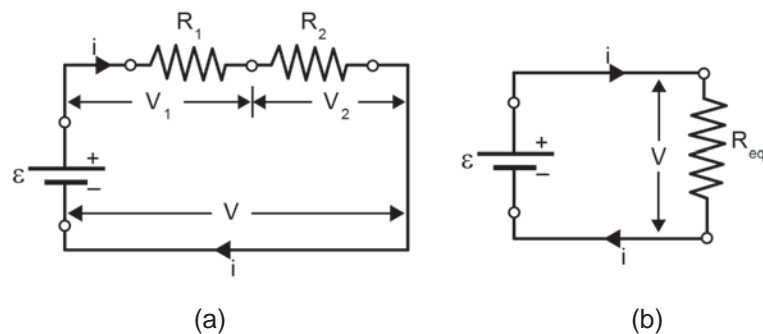


Figura 32

A **ddp** através da combinação é a soma das **ddp**'s através de cada resistor, enquanto cada um tem a mesma **corrente i**:

$$V = V_1 + V_2 \text{ e ainda, } V = Ri$$

resultando:

$$iR_{eq} = iR_1 + iR_2 \text{ ou então } R_{eq} = R_1 + R_2$$

Se dois ou mais resistores estão associados em série,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (6.3)$$

3.8.4 Resistores em paralelo

Seja a configuração da Figura 33, em que se tem dois resistores em paralelo. Para achar a resistência equivalente usa-se a conservação da carga para afirmar que em cada derivação (junção) a corrente se divide proporcionalmente à resistência oferecida pelo ramo considerado: i_1 proporcional a R_1 e i_2 a R_2 .

Em adição, cada ramo está sujeito à mesma **ddp** ($V = V_1 = V_2$), então

$$i = i_1 + i_2 \text{ ou ainda } \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}$$

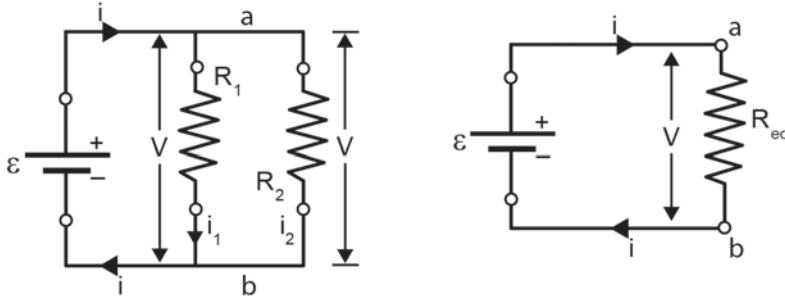


Figura 33 (a) (b)

Dividindo por V ($V = V_1 = V_2$), a resistência equivalente é:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{6.4}$$

Se duas ou mais resistências se associam em paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

3.8.5 Circuitos multimalhas e regras de Kirchhoff

Quando se analisam cadeias de circuitos com muitos elementos é conveniente reduzir ao máximo as combinações série e paralelo de resistores até uma única malha simples.

Entretanto nem sempre isto é possível, e principalmente quando há mais de uma **fem** no circuito.

O procedimento para se obter corrente e voltagem em várias partes do circuito é simplificado pelas “**regras de Kirchhoff**”.

Algumas definições, Figura 34:

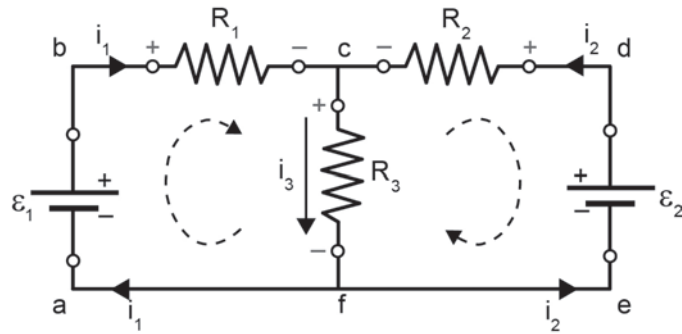


Figura 34

- **junção** ou **nó**: é onde três ou mais condutores se encontram, pontos **c** e **f**.
- **ramo** ou **seção**: é um trajeto simples entre duas junções, como os ramos de **b** a **c** e de **c** a **f**.
- **malha** ou **circulação**: é um trajeto de condução fechado, tais como **abcfa** ou **abcdefa**.

Quando uma carga se move em uma malha através de vários acréscimos e decréscimos de potencial, a conservação da energia requer que a soma dos acréscimos de voltagem deva ser igual à soma dos decréscimos de voltagem.

Atribuindo sinais **+** para acréscimos e **-** para decréscimos de voltagem tem-se a regra da malha $\Sigma V = 0$. A regra da junção aparece do fato que nenhuma carga pode se acumular num ponto junção, e as correntes que entram (**+**) na junção e as que deixam a junção (**-**) tem suas somas algébricas igual a zero: a regra da junção $\Sigma i = 0$.

3.8.6 Regras de Kirchhoff

- A **regra da malha**: $\Sigma V = 0$. A soma dos acréscimos e decréscimos de voltagem através de uma malha fechada é zero.
- A **regra da junção**: $\Sigma i = 0$. A soma algébrica de todas as correntes entrando numa junção é zero. (correntes entrando são positivas e saindo são negativas).

Aplicando estas regras ao circuito da Figura 34, seguindo um procedimento formal:

1. Rotular a polaridade de cada fonte de **fem** com **+** e **-**;
2. Desenhar uma seta mostrando a direção da corrente em cada ramo do circuito;
3. Em acordo com a direção assumida para cada corrente, nomear cada resistor com **+** no mais alto potencial e **-** no outro;
4. Estabelecer uma direção para circular em cada malha individual. Esta escolha é arbitrária. O único critério que deve ser obedecido é que cada ramo deve ser atravessado ao menos uma vez;
5. Iniciando em um ponto conveniente, girar em cada malha independente na direção escolhida, observando os acréscimos e decréscimos do potencial. Igualando a soma a zero. No circuito escolhido começar em **a** na malha esquerda e em **f** na malha direita;

São obtidas as equações:

$$\Sigma V = 0$$

$$\varepsilon_1 - i_1 R_1 - i_3 R_3 = 0 \quad (6.5)$$

$$i_3 R_3 + i_2 R_2 - \varepsilon_2 = 0 \quad (6.6)$$

6. Igualando a zero a soma das correntes entrando em cada junção independente. Para a junção **c**, vem:

$$\Sigma i = 0$$

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (6.7)$$

a junção em **f** não é uma junção independente, pois acarreta a mesma equação.

São três **Equação (6.5), (6.6) e (6.7)** e três incógnitas, **i_1 , i_2 e i_3** .

Reorganizando a escrita destas equações,

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$R_1 i_1 + 0 + R_3 i_3 = \varepsilon_1$$

$$0 + R_2 i_2 + R_3 i_3 = \varepsilon_2$$

Obtendo a solução por métodos usuais (por exemplo: **método de Cramer**) resulta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = -R_1R_2 - R_2R_3 - R_1R_3$$

$$\Delta i_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \varepsilon_1 & 0 & R_3 \\ \varepsilon_2 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = -\varepsilon_2R_3 - \varepsilon_1R_2 - \varepsilon_1R_3$$

$$\Delta i_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & \varepsilon_1 & R_3 \\ 0 & \varepsilon_2 & R_3 \end{vmatrix} = -\varepsilon_1R_3 - \varepsilon_2R_1 - \varepsilon_2R_3$$

$$\Delta i_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & R_2 & \varepsilon_2 \end{vmatrix} = -\varepsilon_1R_2 - \varepsilon_2R_1$$

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3) \varepsilon_1 + R_3 \varepsilon_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (6.8)$$

$$i_2 = \frac{(R_1 + R_3) \varepsilon_2 + R_3 \varepsilon_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (6.9)$$

$$i_3 = \frac{R_1 \varepsilon_2 + R_2 \varepsilon_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (6.10)$$

3.8.7 Princípio da superposição

Se os elementos do circuito são lineares, como as fontes de **fem** trabalham independentemente uma das outras, podem-se calcular as correntes do circuito supondo que só uma **fem** existe, de cada vez, sendo as outras substituídas por condutores de resistência zero em seus lugares. Caso elas tenham resistência interna, são substituídas por estas resistências.

Repetindo este procedimento para as outras fontes de **fem** obtém-se um conjunto de equações de correntes para cada fonte de **fem** trabalhando separadamente. A Figura 35 ilustra este procedimento.

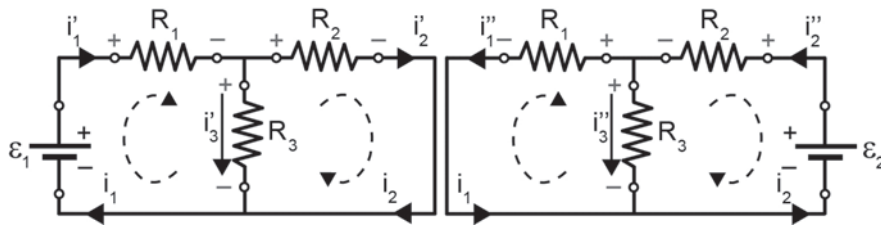


Figura 35 (a) (b)

Calcular as correntes i'_1, i'_2, i'_3 , como se só existisse a fonte ε_1 . Usar a **lei de Ohm**.

Calcular as correntes i''_1, i''_2, i''_3 , como se só existisse a fonte ε_2 .

Superpor estes dois conjuntos de correntes para obter as correntes i_1, i_2, i_3 , através de somas algébricas: $i_1 = i'_1 + i''_1$, e, analogamente para as outras duas correntes.

Exemplos:

1. Na Figura 34 encontrar as correntes, i_1, i_2, i_3 , em cada ramo do circuito.

Usar:

$$R_1 = 2\Omega; R_2 = 4\Omega; R_3 = 5\Omega; \varepsilon_1 = 10 \text{ V}; \varepsilon_2 = 6 \text{ V}.$$

Solução:

Método 1: regras de Kirchhoff

Na Figura 34 o desenho já está segundo as **regras de Kirchhoff**, assim,

$$\Sigma V = 0$$

- malha esquerda:

$$10 - 2i_1 - 5i_3 = 0$$

- malha direita:

$$-6 + 4i_2 + 5i_3 = 0$$

Usando a segunda regra de **Kirchhoff** $\Sigma i = 0$

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Reescrevendo as equações,

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$2i_1 + 0 + 5i_3 = 10$$

$$0 + 4i_2 + 5i_3 = 6$$

Resolvendo o sistema de equações lineares, por exemplo, pelo **método de Cramer**:

$$\Delta i_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 40 - 50 = -60$$

$$\Delta i_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 40 - 50 = -60 \quad i_1 = \frac{-60}{-38} = 1,58 \text{ A}$$

$$\Delta i_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 10 & 5 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 12 - 30 = 8 \quad i_2 = \frac{8}{-38} = -0,21 \text{ A}$$

A corrente i_2 tem **sentido oposto** ao **escolhido**.

$$\Delta i_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -40 - 12 = -52 \quad i_3 = \frac{-52}{-38} = 1,37 \text{ A}$$

Método 2: Princípio de superposição

Na Figura 36(a) a corrente i_1' será a corrente como se existisse somente ε_2 , e em (b) o mesmo para i_2'' como se só existisse ε_1 .

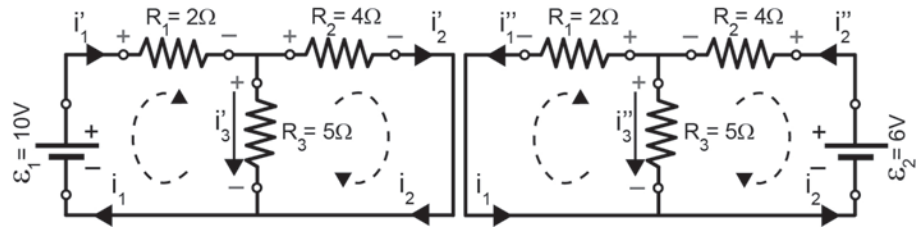


Figura 36 (a) (b)

As resistências equivalentes de R_1 com R_3 e de R_2 com R_3 ficam:

$$R_{eq,1,3} = \frac{10}{7} \Omega \quad \text{e} \quad R_{eq,2,3} = \frac{20}{9} \Omega$$

Assim, da **lei de Ohm**, no circuito (a),

$$10 \text{ V} = 2 \Omega i_1 + \frac{20}{9} \Omega i_1 \quad i_1 = \frac{90 \text{ V}}{38 \Omega} = 2,37 \text{ A}$$

assim,

$$i_2' = \frac{10 \text{ V} - 2 \Omega \cdot 2,37 \text{ A}}{4 \Omega} = 1,32 \text{ A}$$

e

$$i_3' = \frac{10 \text{ V} - 2 \Omega \cdot 2,37 \text{ A}}{5 \Omega} = 1,05 \text{ A}$$

No circuito (b),

$$6 \text{ V} = 4 \Omega i_2'' + \frac{10}{7} \Omega i_2'' \quad i_2'' = \frac{42 \text{ V}}{38 \Omega} = 1,11 \text{ A}$$

logo,

$$i_1'' = \frac{1,58 \text{ V}}{2 \Omega} = 0,79 \text{ A} \quad i_3'' = \frac{1,58 \text{ V}}{5 \Omega} = 0,32 \text{ A}$$

Somando algebricamente as correntes de mesmo índice, $i_1 = i_1' + i_1''$, $i_2 = i_2' + i_2''$ e $i_3 = i_3' + i_3''$ vem:

$$i_1 = 2,37 \text{ A} - 0,79 \text{ A} = 1,58 \text{ A}$$

$$i_2 = 1,10 \text{ A} - 1,11 \text{ A} = -0,21 \text{ A} \Rightarrow \text{esta corrente tem sentido oposto ao escolhido.}$$

$$i_3 = 1,05 \text{ A} - 0,32 \text{ A} = 1,37 \text{ A}$$

2. Verificar, no exemplo anterior, que a potência trocada entre a fonte de fem e o resto do circuito ilustra a conservação da energia.

Solução:

A corrente i_1 na fonte de fem ε_1 está na direção de crescimento do potencial V . A fonte de fem supre potência para o circuito:

$$P_1 = \varepsilon_1 i_1 = (10 \text{ V})(1,58 \text{ A}) = \underline{\underline{15,8 \text{ W}}}$$

As correntes i_1 e i_3 atuam nos resistores R_1 e R_2 .

A energia térmica é continuamente dissipada nos resistores a uma taxa $i^2 R$, de modo que a potência nos resistores é:

$$P_2 = i_1^2 R_1 + i_3 R_3 + (1,58 \text{ A})^2 (2 \Omega) + (1,37 \text{ A})^2 (5 \Omega) = \underline{\underline{14,38 \text{ W}}}$$

A corrente i_2 na fonte de **fem** ε_2 é forçada através desta **fem** na direção “para traz” (este é o processo de carga da bateria). Ocorre transferência de energia potencial para energia química armazenada no provedor de **fem**. A potência P_3 armazenada no provedor de **fem** ε_2 é:

$$P_3 = \varepsilon_2 i_2 = (6 \text{ V})(0,21 \text{ A}) = 1,26 \text{ W}$$

Observar que ε_1 supre potência para o circuito, a fonte ε_2 absorve potência, e energia térmica é dissipada nos resistores. Se há conservação de energia, então

$$\begin{array}{l} \text{taxa de energia} \\ \text{fornecida por } \varepsilon_1 \end{array} = \begin{array}{l} \text{taxa de energia} \\ \text{térmica dissipada} \end{array} + \begin{array}{l} \text{taxa de energia} \\ \text{armazenada em } \varepsilon_2 \end{array}$$

$$P_1 = P_2 + P_3$$

15,8 W = 14,38 W + 1,26 W a diferença de **0,16 W** é devida às aproximações feitas.

- **Aplicações:**

Diversos dispositivos são usados para medidas de parâmetros de um circuito. Entre eles temos o **voltímetro**, o **amperímetro**, a **ponte de Wheatstone** e o **potenciômetro**.

3.8.8 O voltímetro

É usado para medidas de diferenças de potencial através de componentes de um circuito. Usualmente tem um **sensível medidor de corrente**, o **galvanômetro**. O sensor é na verdade um medidor de corrente que provoca uma deflexão de um ponteiro na faixa de **10 μA** a **1 mA**.

O movimento do ponteiro tem uma resistência própria R_G , que é usualmente desenhada separadamente, para lembrar que ela é a parte interna do movimento do ponteiro.

Normalmente, são medidas resistências muito maiores que aquela que causa a deflexão total da escala, deste modo, é adicionada uma resistência **R** em **série** no circuito para reduzir a voltagem que aparece através do movimento do medidor.

Como calcular **R** para uma deflexão de escala completa quando uma diferença de potencial é aplicada entre os terminais **A** e **B**?

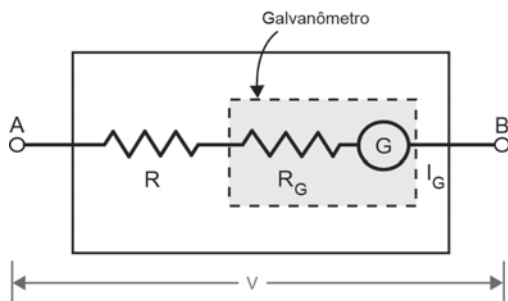


Figura 37

Se i_G é a corrente no galvanômetro que produz uma deflexão completa da escala, e R_G é a resistência interna do galvanômetro, então, da lei de **Ohm**,

$$V = i_G (R + R_G) \text{ ou então, } R = \frac{V}{i_G} - R_G \quad (6.11)$$

Para mudar a faixa de medidas do voltímetro, é necessário variar o valor da resistência em série do resistor **R**.

Exemplo: Um galvanômetro com sensibilidade de escala completa de **1mA** requer um resistor com **900Ω** para uma leitura com escala completa como voltímetro, quando se aplica **1V** através dos terminais. Qual resistor em série é necessário para o mesmo galvanômetro fazer leitura em escala completa em **50V** como voltímetro?

Solução:

$$R_G = \frac{V}{i_G} - R = \frac{1V}{0,001A} - 900 \Omega = 100 \Omega$$

Aplicando a mesma equação para um fundo de escala com **50V**,

$$R_G = \frac{V}{i_G} - R = \frac{50V}{0,001A} - 100 \Omega = 49\,900 \Omega$$

3.8.9 O amperímetro

Um galvanômetro mede correntes muito pequenas. Um **amperímetro** mede grandes correntes por derivação (ou shunt) de alguma corrente através do galvanômetro, como na Figura 38.

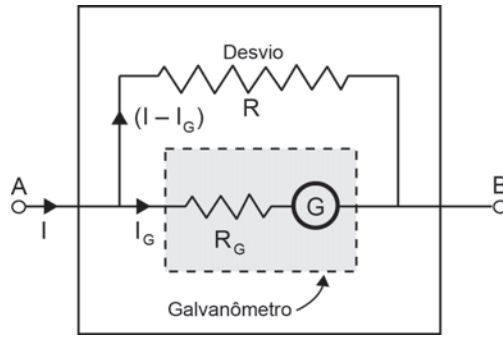


Figura 38

Da corrente i que entra no terminal **A** do instrumento, somente uma pequena parte i_G flui através do galvanômetro. A voltagem através de **R** é igual àquela através do galvanômetro.

$$V_R = V_G$$

$$(i - i_G)R = i_G R_G$$

O valor do resistor de derivação (shunt) é:

$$R = \frac{i_G R_G}{i - i_G} \quad (6.12)$$

Em um **amperímetro multi escala**, assim como em um **voltímetro**, o valor de **R** é usualmente variado por uma chave seletora.

Exemplo: Um amperímetro é construído com um galvanômetro que requer uma diferença de potencial de **50mV** através do medidor móvel e uma corrente de **1mA** para provocar uma deflexão de escala completa. Encontrar **R** que produza uma deflexão de escala completa quando a corrente é de **5A**.

Solução:

É necessário determinar R_G :

$$R_G = \frac{V_G}{i_G} \text{ obtendo então para } R:$$

$$R = \frac{i_G R_G}{i - i_G} = \frac{i \left(\frac{V_G}{i_G} \right)}{i - i_G} = \frac{V_G}{i - i_G} = \frac{50 \times 10^{-3} \text{ V}}{5 \text{ A} - 0,001 \text{ A}} = 0,010 \Omega$$

A resistência de derivação é sempre pequena para a medida de grandes correntes. Em geral um amperímetro não influencia na impedância do circuito.

Um **voltímetro** entra em **paralelo** num circuito para a medida de uma **queda de tensão**.

Um **amperímetro** entra em **série** num circuito para a medida de **corrente** num ramo.

3.8.10 A ponte de Wheatstone

O uso original da **ponte de Wheatstone** é para a medida de resistências. Circuitos do tipo ponte são usados em eletrônica para detectar pequenos desbalanceamentos elétricos.

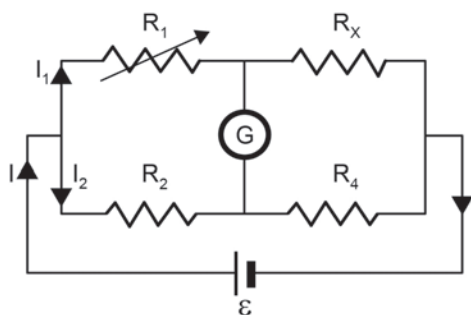


Figura 39

Para se medir o valor de R_x , o procedimento é ajustar R_1 até que nenhuma corrente mensurável passe pelo galvanômetro.

Esta condição é satisfeita quando

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_x}$$

logo:

$$R_x = \frac{R_4 R_1}{R_2} \tag{6.13}$$

3.8.11 Circuito RC em corrente contínua

3.8.11.1 Processo de carga do capacitor

O circuito da Figura 40(a) está, em $t = 0$, com o capacitor C completamente descarregado. Ao ligar a chave s ao ponto a , surge uma corrente $i(t)$ devida à **fem** ε_0 .

A fem ε_0 realiza trabalho dW sobre R e C , dado por

$$dW = \varepsilon dq \quad (6.14)$$

Este trabalho deve ser igual à soma da energia dissipada no resistor R sob a forma de calor por efeito Joule, no tempo dt ,

$$dW = P dt = E_{\text{térmica}} = Ri^2 dt \quad (6.15)$$

Com o acréscimo de energia dU acumulado no capacitor:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{C q^2}{2 C^2} = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow dU = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) \quad (6.16)$$

Usando a lei da conservação da energia:

$$\varepsilon dq = i^2 R dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right) \text{ ou } \varepsilon dq = i^2 R dt + \frac{q}{C} dq \quad (6.17)$$

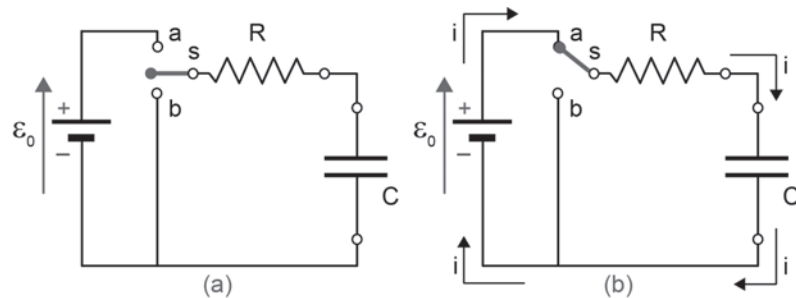


Figura 40

dividindo por dt , $\varepsilon \frac{dq}{dt} = i^2 R + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$ mas $i \equiv \frac{dq}{dt}$ então,

$$\varepsilon = iR + \frac{q}{C} \quad (6.18)$$

Este mesmo resultado pode ser obtido, usando a lei das malhas, que também sai da lei de conservação da energia. Escolhendo um ponto para iniciar uma circuitação na malha, por exemplo, abaixo da placa negativa:

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \varepsilon = iR + \frac{q}{C}$$

Pode-se obter a função $q(t)$ resolvendo a **Equação (6.18)**: $[(6.18)(xC)]$,

$$\varepsilon C = RC \frac{dq}{dt} + q \rightarrow \varepsilon C - q = RC \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{dt}{RC} = \frac{dq}{\varepsilon C - q}$$

integrando,

$$\frac{1}{RC} \int_0^t dt = - \int_0^q \frac{dq}{\varepsilon C} \rightarrow \frac{t}{RC} = -\ln(\varepsilon C - q) \Big|_0^q$$

$$[\ln(\varepsilon C - q) - \ln \varepsilon C] = -\frac{t}{RC} \rightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon C - q}{\varepsilon C}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{\varepsilon C - q}{\varepsilon C} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow q = \varepsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

lembrando que $\varepsilon C = Q$, em que Q é a carga total do capacitor e definindo $\tau = RC$ como **constante de tempo do circuito**, com unidades **[t]**.

$$q = Q \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{6.19}$$

mas, $i \equiv \frac{dq}{dt} \Rightarrow i = \frac{\varepsilon C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$, então

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6.20}$$

As **ddp's**, V_R em R e V_C em C , no instante t , são

$$V_R = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6.21}$$

$$V_C = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{6.22}$$

3.8.11.2 Processo de descarga do capacitor sobre a resistência

Depois de um tempo $t \gg 5\tau$, o capacitor está totalmente carregado. No instante $t = 0$ muda-se a chave s para a posição b , obtendo o circuito da Figura 40(b).

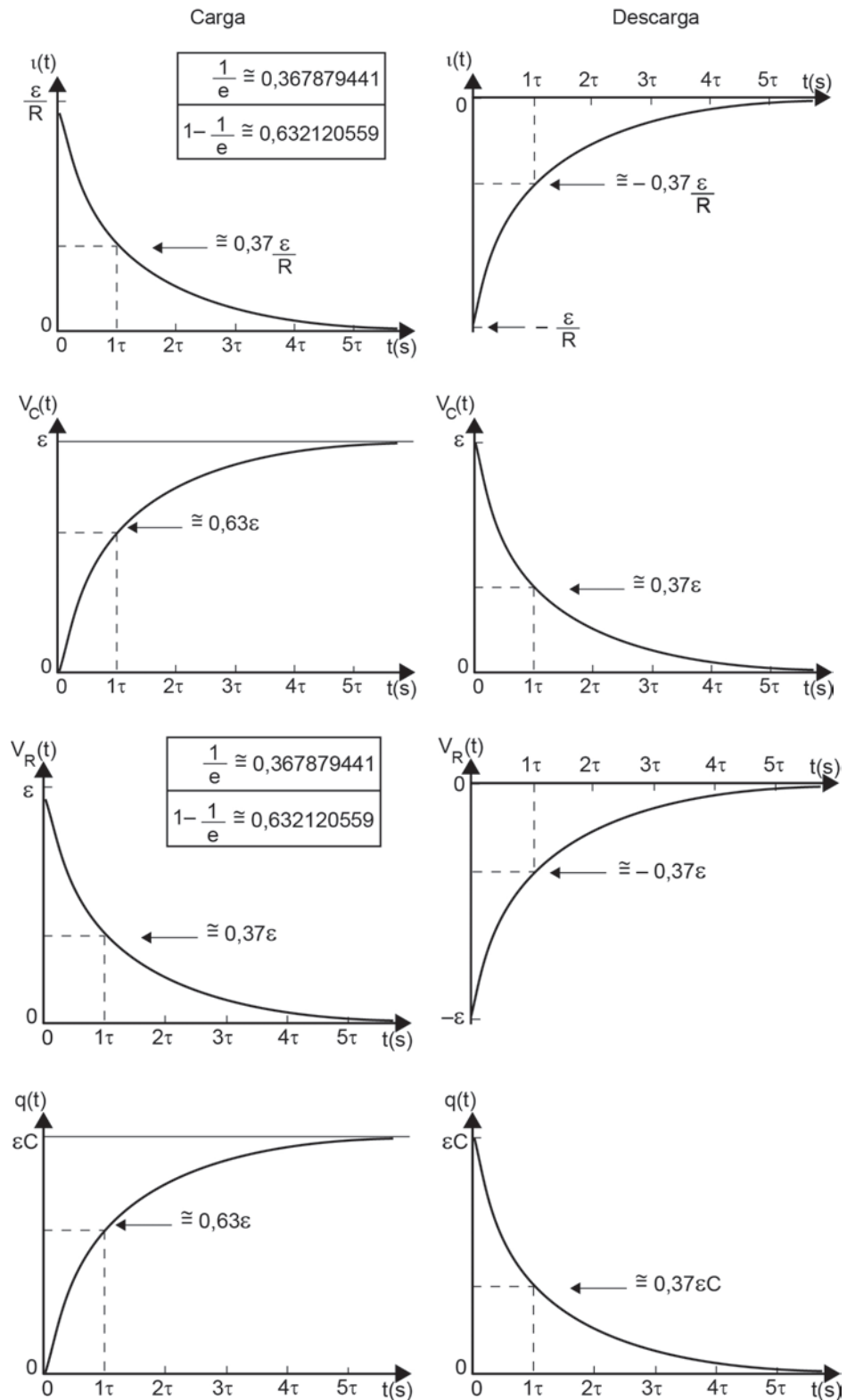


Figura 41 Curvas transientes de carga e descarga de capacitores. Com $1\tau = RC$.

Em $t = 0$, o capacitor começa a descarregar sobre a resistência, criando uma corrente $i' = -i$, porque agora $\frac{dq}{dt} < 0$. Pela lei das malhas:

$$-i'R + \frac{q}{C} = 0$$

para representar i' no mesmo eixo de i , usa-se $i' = -i$.

$$\text{Então, } iR + \frac{q}{C} = 0 \text{ ou } R \frac{dQ}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \int_{\varepsilon C}^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\ln q \Big|_{\varepsilon C}^q = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln \frac{q}{\varepsilon C} = -\frac{t}{RC}$$

$$q = \varepsilon C e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6.23}$$

$$i = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6.24}$$

$$V_R = -\varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6.25}$$

$$V_C = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6.26}$$

A constante $RC = \tau$, chamada **constante de tempo capacitiva** do circuito, tem dimensão de tempo.

Ela é igual ao tempo necessário para que a carga do capacitor aumente até atingir uma fração igual a $(1 - e^{-1}) \cong 63\%$ do seu valor de equilíbrio (**carga máxima: $Q = \varepsilon C$**)!

O sinal ($-$) na Equação (6.21), indica inversão da corrente em relação à da Equação (6.20).

O sinal ($-$) na Equação (6.25) – **processo-de-descarga** – indica inversão da **ddp** na resistência, em relação ao **processo de carga**.

No processo de carga $\frac{dq}{dt} > 0$. No de descarga, $\frac{dq}{dt} < 0$.

3.9 Campo magnético

3.9.1 Introdução

Já foram discutidas as forças: Gravitacional e de Coulomb, que variam com o inverso do quadrado da distância e não dependem do movimento relativo das massas ou cargas. Neste capítulo serão discutidas as forças que dependem do movimento das cargas elétricas.

Se duas cargas elétricas estão em movimento, em adição às forças coulombianas, elas exercem uma força magnética mútua. Devido a esta complicação adicional este estudo pode ser separado em duas partes:

1. Uma carga móvel q , com velocidade \vec{v} , gera um campo magnético \vec{B} .
2. Em seguida, uma segunda carga q' , movendo-se na presença deste campo magnético \vec{B} , interage com ele e experimenta uma força magnética \vec{F} .

Em síntese, se quer descrever o efeito que um campo magnético \vec{B} tem sobre uma carga móvel q' .

Uma breve história: A palavra magnetismo é de origem grega – magnetis lithos – um tipo de pedra que contém óxido de ferro (Fe_3O_4) encontrado em Magnésia, um distrito no norte da Grécia. Esta pedra pode exercer forças em pedras similares e em pedaços de ferro, além de transferir parte destas propriedades para o ferro após ser mantido em contato com ele por um certo tempo. Foram os chineses, entretanto, os primeiros a descobrir que se fosse pendurada uma lasca desta pedra por um fio, esta se alinhava com a direção norte-sul da terra, caracterizando a terra com a mesma qualidade da pedra da magnésia, a de ser um grande magneto. Como fazer para determinar a existência de um campo magnético numa região?

Colocando uma carga de teste q_0 nesta região. Se existe uma força atuando na carga quando esta estiver em repouso, pode-se afirmar que há um **campo eletrostático** presente. Se outra força aparecer quando a carga estiver se movendo com velocidade \vec{v} , pode-se concluir que há um **campo magnético** nesta região.

Resultados experimentais permitem concluir o seguinte:

- A intensidade da força é proporcional ao módulo da carga de teste.
- A direção da força é sempre perpendicular à direção do movimento.
- Quando a carga está se movendo em uma dada direção, a força é proporcional à velocidade, mas para uma dada velocidade, a força varia com a direção do movimento (o campo magnético é um vetor).

A **indução magnética** ou a **densidade de fluxo magnético** ou mais simplesmente o **campo magnético** \vec{B} é definido através da expressão:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.1)$$

a unidade para o campo \vec{B} é $[\vec{B}] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}}$ ou tesla (**T**).

3.9.2 Linhas de campo

Similarmente ao campo elétrico \vec{E} , o campo magnético \vec{B} pode ser representado por linhas de campo cuja densidade é proporcional à intensidade do campo.

A Figura 42 ilustra um magneto com seus polos norte e sul. As linhas de campo são desenhadas de modo que estas linhas saem do polo norte e penetram pelo polo sul.

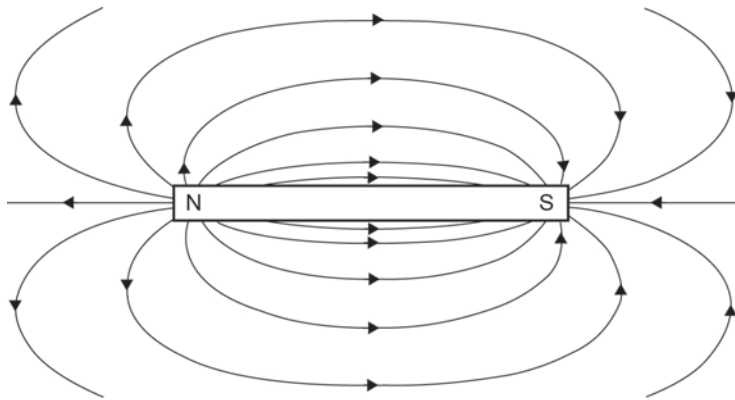


Figura 42

A relação entre força \vec{F} , velocidade \vec{v} e vetor campo magnético \vec{B} expresso na **Equação (7.1)**, pode ser visualizada na Figura 43 pela **regra da mão esquerda**.

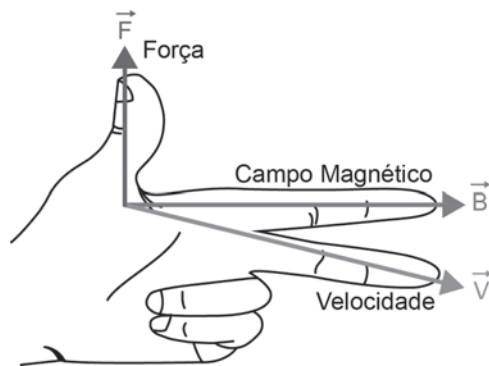


Figura 43

Posicionando o **dedo médio** no sentido da velocidade \vec{v} , e o **dedo indicador** no sentido de \vec{B} , o **polegar** apontará na direção da força resultante \vec{F} , que é perpendicular ao plano formado pelos dedos médio e indicador.

Quando é aplicada a regra da mão esquerda, a carga q é suposta positiva. Se q é negativa determina-se \vec{F} e então inverte-se o sentido da força.

3.9.3 O movimento de uma partícula carregada em um campo magnético

Se uma partícula carregada move-se na presença de um campo magnético, a força magnética será sempre perpendicular à velocidade da partícula. Assim, a força magnética não realiza trabalho sobre a partícula, e sua velocidade permanece constante, embora sua direção varie em resposta à força de deflexão lateral do campo magnético.

Se a velocidade \vec{v} da partícula é perpendicular ao vetor \vec{B} a sua trajetória será circular com uma velocidade constante com a força magnética sendo a força centrípeta necessária para provocar a aceleração centrípeta. Na Figura 44(a), como \vec{v} e \vec{B} estão a 90° , o módulo da força magnética é:

$$\vec{F} = q |\vec{v} \times \vec{B}| = qvB \sin 90^\circ = qvB \quad (7.2)$$

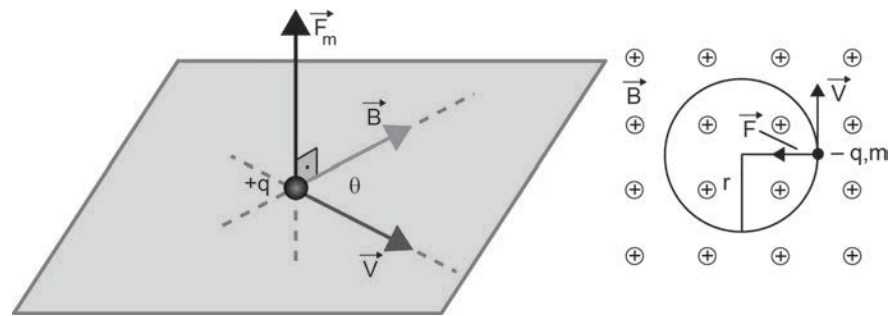


Figura 44 (a) (b)

O raio R do trajeto circular pode ser encontrado da **2ª lei de Newton**. Para uma direção radial, Figura 44(b),

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ qvB &= m \left(\frac{v^2}{R} \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (7.4)$$

o momento $m\vec{v}$ da partícula é relacionado com a sua energia cinética K por

$$mv = \sqrt{2mk} \quad (7.5)$$

Combinando as duas equações prévias, resulta:

$$R = \frac{\sqrt{2mK}}{qB} \quad (7.6)$$

A frequência rotacional do movimento circular é chamada **frequência ciclotrônica** (oriunda do ciclotron, máquina que acelera partículas carregadas). Esta frequência é:

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \quad (7.7)$$

para um movimento circular, $v = 2\pi f R$. Substituindo na **Equação (7.7)**,

$$f = \frac{B}{2\pi} \left(\frac{q}{m} \right) \quad (7.8)$$

que é a **frequência ciclotrônica**.

Para o movimento com um ângulo arbitrário entre \vec{v} e \vec{B} ($\neq 90^\circ$) o movimento será do tipo helicoidal como na Figura 45. Como a velocidade pode ser decomposta em duas componentes, paralela v_{\parallel} e perpendicular v_{\perp} ao campo, esta frequência é também a frequência do movimento helicoidal.

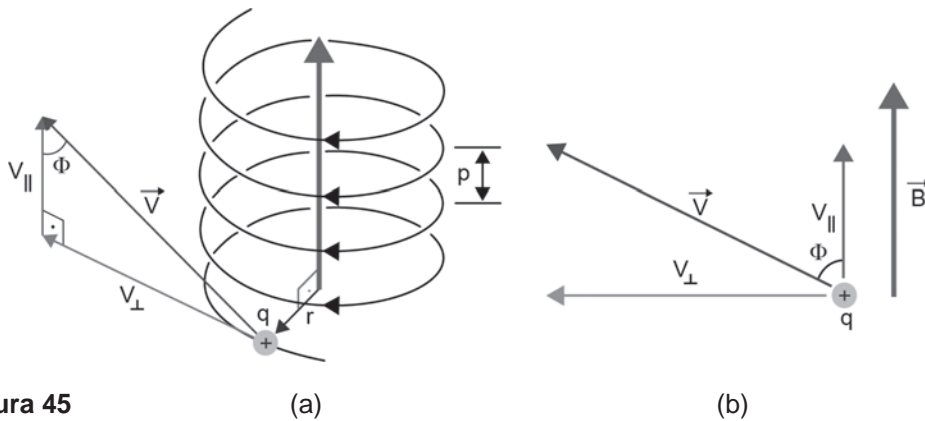


Figura 45

3.9.4 A garrafa magnética

Os movimentos de partículas carregadas em campos magnéticos não uniformes em geral podem ser bastante complexos, mas existem alguns casos simples como o da garrafa magnética.

Na Figura 46, um campo com simetria axial tem maior intensidade nas pontas do que no centro. Uma partícula carregada movendo-se helicoidalmente

para uma das extremidades experimenta uma força magnética \vec{F} com uma componente horizontal que na extremidade reflete a partícula de volta para o centro.

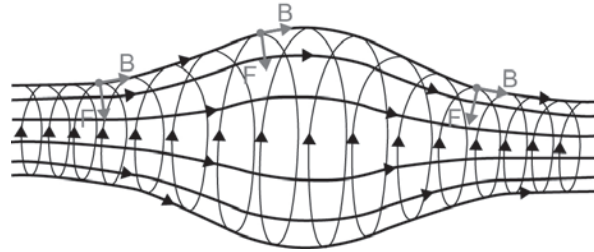


Figura 46

A partícula fica presa nesta armadilha num movimento de 'vai e vem'.

3.9.5 Os cinturões de Van Allen

A Figura 47 mostra uma imagem dos cinturões de Van Allen, que rodeiam a terra e que formam duas garrafas magnéticas, aprisionando elétrons na mais externa e aprisionando prótons na mais interna.

3.9.6 O vento solar

Na Figura 48, uma nuvem de elétrons e prótons emanantes do sol invade o campo magnético da terra, numa direção afastando-se do sol. As partículas incidem com velocidades entre **400 – 800 km/s**, criando uma onda de choque e uma longa cauda de cometa no campo magnético da terra, deformando-o, e esta deformação se estende por milhões de quilômetros.

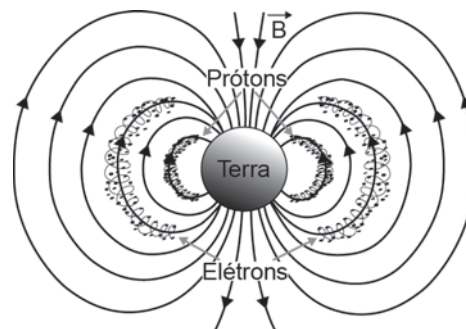


Figura 47

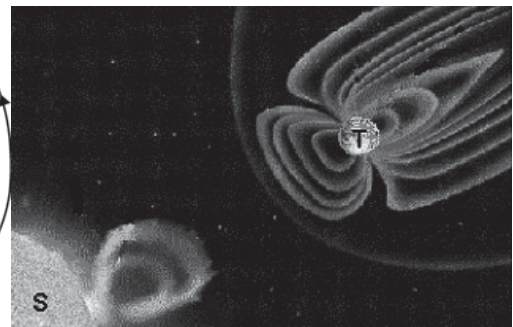


Figura 48

A magnetosfera é uma região de plasma subsônico fluindo como uma onda de choque.

Algumas partículas são capturadas pelos cinturões de Van Allen enquanto outras seguem adiante. Os ventos solares são aproximadamente estacionários, mas sofrem ocasionalmente flutuações devido à atividade solar, como por exemplo, devido às tempestades solares.

3.9.7 A aurora boreal

Devido à configuração dos cinturões de Van Allen a maior parte da aurora ocorre numa região circular com raio em torno de **2000 km**. Quando as partículas carregadas colidem com gases na atmosfera superior, excitam átomos de oxigênio e nitrogênio, produzindo emissões luminosas, coloridas e ondulantes, chamadas auroras boreais.

3.9.8 A lei de força de Lorentz

Uma partícula carregada pode simultaneamente experimentar os efeitos de um campo elétrico \vec{E} e um campo magnético \vec{B} . Como estes se somam como vetores, resulta a lei de força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.9)$$

em que \vec{F} é a força líquida numa carga q em movimento com uma velocidade \vec{v} na presença de um campo elétrico \vec{E} e de um campo magnético \vec{B} .

3.9.8.1 Aplicação: o filtro de velocidade de partículas carregadas

Seja uma partícula carregada q movimentando-se com velocidade \vec{v} numa trajetória reta através de um colimador como na Figura 49.

A partícula passa pela saída se não há força resultante atuando na partícula enquanto ela está na região entre o colimador e a abertura de saída.

Campos elétricos e magnéticos são estabelecidos na região de modo que a força magnética é igual e oposta à força elétrica. Na Figura 49 é mostrada a configuração para partículas positivas.

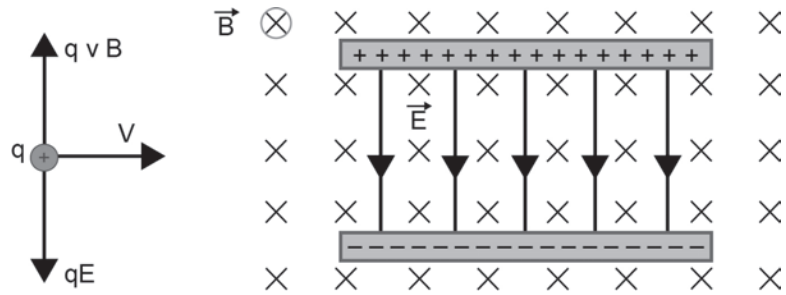


Figura 49

Aplicando a lei de força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (7.10)$$

resultando em

$$v = \frac{E}{B} \quad (7.11)$$

Somente partículas com esta velocidade emergem da saída do filtro.

Exemplo:

Uma nuvem de elétrons passa através de um filtro de velocidade quando os campos elétricos e magnéticos cruzados são respectivamente $5 \times 10^{-4} \text{ V/m}$ e $2 \times 10^{-2} \text{ T}$.

Encontrar a energia cinética dos elétrons (em eV) passando pelo filtro.

$$v = \frac{E}{B} = \frac{5 \times 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{m}}}{2 \times 10^{-2} \text{ T}} = 2,50 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

substituindo na energia cinética

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(9 \times 10^{-31} \text{ kg})\left(2,50 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\text{eV}}{1,602 \times 10^{-19} \text{ J}}\right)$$

$$K = 17,8 \text{ eV}$$

3.9.9 A Força magnética em um condutor carregando corrente

A maior parte das nossas aplicações serão de elétrons livres confinados em condutores movendo-se com velocidades de deslocamento \mathbf{v}_d .

Seja um condutor com cargas móveis na presença de um campo magnético. A força na carga será

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.12)$$

O número total de cargas móveis no fio de comprimento ℓ é o número de cargas de condução por unidade de volume n , vezes o volume do segmento do fio $A\ell$. Assim, a força total no segmento do fio será:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})nA\ell \quad (7.13)$$

com a corrente no fio igual a

$$i = nqv_d A$$

Combinando estas duas equações, resulta:

$$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (7.14)$$

Esta é a força sobre um condutor carregando uma corrente na presença de um campo magnético. Aqui o comprimento do condutor ℓ é na direção da corrente convencional.

A equação assume que o segmento de fio é reto e o campo é uniforme. Se o segmento de fio tem forma arbitrária e se o campo varia, pode-se reescrever a equação para a forma diferencial da força em um segmento elementar e para achar a força total, deve-se integrar para todo o segmento ℓ , usando os valores adequados de \vec{B} para cada segmento elementar $d\vec{\ell}$.

$$d\vec{F} = id\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (7.16)$$

3.9.10 O efeito Hall

Cargas elétricas em movimento num campo magnético sofrem a ação de uma força perpendicular à direção do respectivo movimento. Quando estas cargas se deslocam num fio condutor, são desviadas para um lado do fio, dependendo do sinal delas. Esta separação das cargas (-) e (+) no fio condutor é o **efeito Hall**. Este fenômeno permite determinar o sinal das cargas dos portadores de carga e o número destes portadores por unidade de volume.

É também um meio cômodo de se medir campos magnéticos.

A Figura 50 mostra duas fitas condutoras, cada qual com uma corrente i para a direita, que estão de acordo com os polos das baterias.

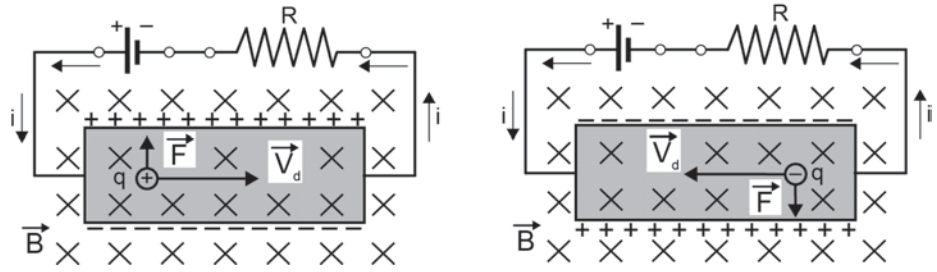


Figura 50 (a) (b)

As fitas estão num campo magnético \vec{B} uniforme, perpendicular ao plano da figura, dirigido segundo a convenção: $\otimes \rightarrow$ penetrando no desenho; $\odot \rightarrow$ saindo do desenho.

Se os portadores forem partículas com carga positiva, que se movem da esquerda para a direita, Figura 50(a), a força magnética \vec{F}_m sobre estas partículas é:

$$\vec{F}_m = q\vec{v}_d \times \vec{B} \tag{7.17}$$

em que \vec{v}_d é a velocidade de migração dos portadores de carga.

As partículas **positivas** se desviam para a parte de **cima** da fita, deixando na parte de **baixo** um excesso de carga **negativa**. Esta separação cria um **campo eletrostático** \vec{E} no interior da fita, que provoca uma **força elétrica** \vec{F}_e que se **opõe** à **força magnética** \vec{F}_m , sobre os portadores de carga. Quando a força magnética \vec{F}_m e a força elétrica \vec{F}_e estiverem equilibradas, os portadores de carga não mais se desviarão. Nesta situação de equilíbrio, a parte de **cima** da fita fica com carga **positiva** e possui, portanto, um potencial elétrico mais elevado que a parte de **baixo**, que ficou com carga **negativa**.

Se a corrente i for composta de partículas com carga negativa, Figura 50(b), os portadores de carga se deslocam da direita para a esquerda (no sentido contrário ao da corrente convencional) e agora os portadores de carga negativa se deslocam para a parte de cima da fita, pois os sinais de q e \vec{v}_d foram ambos trocados. A parte de **cima** da fita fica com carga **negativa** e a parte de **baixo** fica com carga **positiva**. A determinação do sinal da **ddp** estabelecida determina o sinal dos portadores de carga. Nos **semicondutores**, estes portadores de carga podem ser **elétrons** (negativos) ou **buracos** (positivos).

Esta **ddp** é a **voltagem de Hall**. A situação de equilíbrio é:

$$E = v_d B$$

Se a largura da fita for L , a **ddp** fica $V = E L$. Então,

$$V_H = EL = v_d BL \tag{7.18}$$

$$\text{e a corrente é: } i = nqv_dA \quad (7.19)$$

em que $\mathbf{A} = \mathbf{aL}$ é a área da seção reta da fita, de espessura \mathbf{a} . Se os portadores de carga forem elétrons, sua carga é \mathbf{e} , então, o número de portadores de carga por unidade de volume \mathbf{n} do material da fita é:

$$n = \frac{i}{Aqv_d} = \frac{i}{Laev_d} \quad (7.20)$$

$$\text{substituindo, } v_dL = \frac{V_H}{B} \quad (7.21)$$

$$\text{vem, } n = \frac{iB}{aeV_H} \quad (7.22)$$

ou, explicitando \mathbf{V}_H :

$$V_H = \frac{iB}{nae} \quad (7.23)$$

A **voltagem de Hall** proporciona um método conveniente para se medirem os campos magnéticos, utilizando a **Equação (7.23)**.

3.10 Indução magnética e transformadores

3.10.1 Indutor

É um **solenóide** (bobina com \mathbf{N} espiras) que armazena energia sob a forma de um campo magnético $\bar{\mathbf{B}}$ (em seu volume).

3.10.2 Autoindutância

É quando o efeito indutivo ocorre na própria bobina, devido à variação da sua corrente. A este efeito de autoindução está associada uma **fem** autoinduzida.

Seja uma bobina de \mathbf{N} espiras bem próximas. Uma corrente elétrica $\mathbf{i(t)}$ circulando pelas espiras produz um campo magnético $\bar{\mathbf{B}}$, cujo fluxo do campo magnético $\Phi_{\bar{\mathbf{B}}}$ é o mesmo para todas as \mathbf{N} espiras.

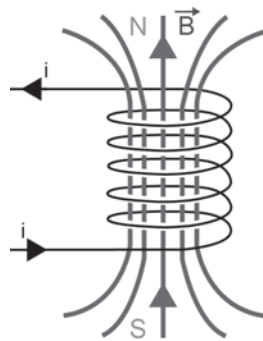


Figura 51

Quando esta corrente varia no tempo, o fluxo do campo magnético $\Phi_{\vec{B}}$ através da seção reta do indutor, também varia.

Esta variação do fluxo gera, pela lei de Faraday, uma **fem** induzida ε_L nos terminais do indutor:

$$\varepsilon_L = -\frac{d}{dt}(N\Phi_{\vec{B}}) \quad (8.1)$$

Se não existirem materiais magnéticos nas proximidades, considerar o vácuo, ou se, caso a bobina possua um núcleo magnético, este possua uma **permeabilidade magnética** χ constante,

$$N\Phi_{\vec{B}} = Li \text{ então, } L \equiv \frac{N\Phi_{\vec{B}}}{i} \quad (8.2)$$

Em que L é a indutância da bobina de N espiras, logo

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(Li) = -L \frac{di}{dt} \quad (8.3)$$

finalmente

$$L \equiv -\frac{\varepsilon}{\frac{di}{dt}} \quad (8.4)$$

que é a definição de indutância L para qualquer bobina.

Esta definição é geral e análoga à definição de capacitância C .

Na ausência de materiais magnéticos, o valor da indutância L só depende da geometria do indutor.

A **Equação (8.4)** mostra que ε_L não depende do valor da corrente elétrica $i(t)$ em um instante t ; ε_L depende da velocidade de variação da corrente elétrica $i(t)$ no tempo $\frac{di}{dt}$.

Isto significa que se a corrente $i(t)$ for constante, ε_L será nula, o que corresponde a um curto-circuito nos terminais do indutor.

Esta propriedade do indutor é utilizada como um componente bloqueador de tensão alternada.

3.10.3 O cálculo da indutância

Quando uma corrente i atravessa um indutor, um campo magnético \vec{B} é criado no espaço interno da bobina do indutor. A energia é armazenada no indutor sob a forma deste campo magnético.

Para uma bobina com N espiras vale a **Equação (8.2)**, pode-se usar este resultado para calcular o valor da indutância L , de um solenoide longo, de comprimento λ , para pontos próximos a seu centro.

O fluxo total do campo magnético no comprimento λ é

$$N\Phi_{\vec{B}} = n\ell BA$$

Da lei de Ampère,

$$B = \mu_0 ni$$

com isto,

$$N\Phi_{\vec{B}} = \mu_0 n^2 \ell i A$$

logo a indutância L será:

$$L = \mu_0 n^2 \ell A \tag{8.5}$$

Este resultado mostra que a indutância de um solenoide é proporcional ao seu volume e ao quadrado do número de espiras por unidade de comprimento.

3.10.4 Energia magnética armazenada num indutor

Da mesma forma que os capacitores armazenam energia elétrica, sob a forma de um campo elétrico \vec{E} , os indutores armazenam energia magnética, sob a forma de um campo magnético \vec{B} . Usando a lei das malhas no circuito da Figura 52,

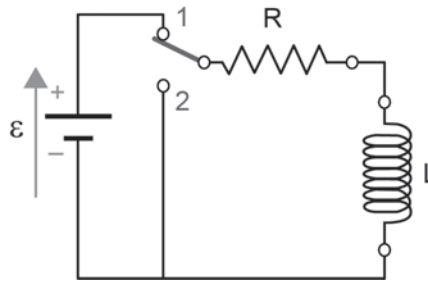


Figura 52

$$\varepsilon = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (8.6)$$

Multiplicando a Equação (8.6) por i :

$$\varepsilon_0 i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

o termo $\varepsilon_0 i$ representa a potência fornecida pela bateria, o termo Ri^2 é a potência dissipada no resistor e o termo $iL \frac{di}{dt}$ é a taxa com que a energia é transferida para o indutor.

Se $U_{\bar{B}}$ é a energia armazenada no indutor, então vale:

$$\frac{dU_{\bar{B}}}{dt} = Li \frac{di}{dt} \quad \text{ou} \quad dU_{\bar{B}} = Lidi$$

integrando, desde $t = 0$, em que a corrente é nula, até $t = \infty$, quando a corrente atinge o valor final i_f ,

$$U_{\bar{B}} = \int dU_{\bar{B}} = \int_0^{i_f} Lidi = \frac{1}{2} Li_f^2$$

a energia armazenada em um indutor percorrido por uma corrente i é, portanto,

$$U_{\bar{B}} = \frac{1}{2} Li^2 \quad (8.7)$$

3.10.5 Circuito RL em corrente contínua

A Figura 53 mostra um circuito **RL** em **série**, submetido a uma corrente contínua, fornecida por uma fonte de tensão contínua ε .

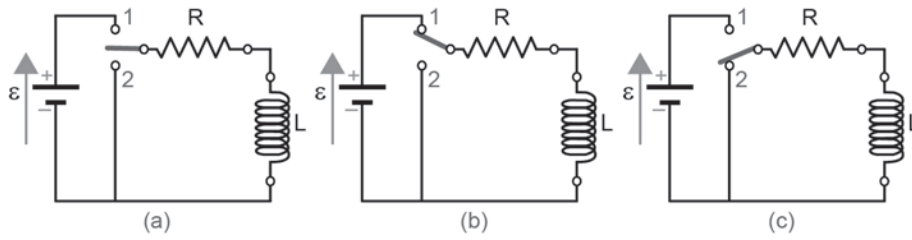


Figura 53

3.10.5.1 Processo de carga

Em $t = 0$ liga-se a chave na posição 1, Figura 53(b).

Usando a lei de Kirchoff:

$$\varepsilon - Ri - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (8.8)$$

$$\varepsilon - Ri = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{L di}{\varepsilon - Ri} = dt$$

$$L \int_{i_0}^i \frac{di}{\varepsilon - Ri} = \int_0^t dt$$

mas em $t = 0 \rightarrow i_0 = 0$ e os limites de integração ficam,

$$-\frac{L}{R} \left[\ln(\varepsilon - Ri) \right]_0^i = t$$

$$\ln\left(\frac{\varepsilon - Ri}{\varepsilon}\right) = -\frac{R}{L}t$$

definindo a constante de tempo indutiva como: $\tau \equiv \frac{L}{R}$, vem:

$$\ln\left(\frac{\varepsilon - Ri}{\varepsilon}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{\varepsilon - Ri}{\varepsilon} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{Ri}{\varepsilon} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

e

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (8.9)$$

$$V_R(t) = Ri(t) = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (8.10)$$

usando

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

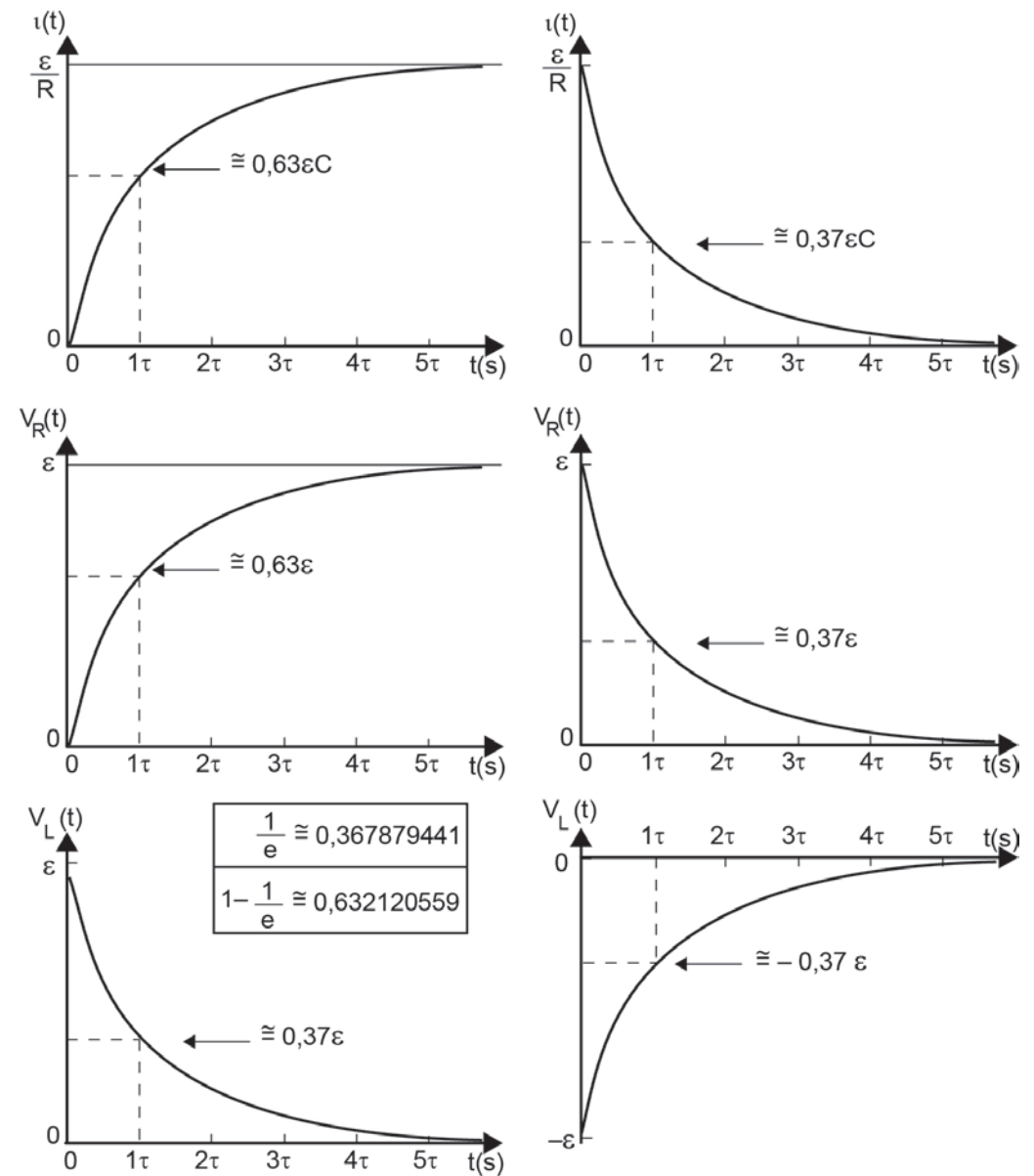


Figura 54 Gráficos de carga e descarga em circuitos RL em corrente contínua.

$$V_L(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8.11)$$

3.10.5.2 Processo de descarga

Em $t = 0$ liga-se a chave na posição **2**, Figura 53(c).

Usando a lei de Kirchoff:

$$L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$

mas a taxa de variação da corrente no tempo é negativa:

$$\frac{d}{dt} < 0 \quad \text{com } i > 0:$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i$$

ou

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

integrando vem,

$$\int_{i_0}^i \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt$$

$$\ell n\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{R}{L}t$$

então, com $\tau = \frac{R}{L}$ e $i_0 = \frac{\varepsilon}{R}$,

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{8.12}$$

$$V_R(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{8.13}$$

$$V_L(t) = -\varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{8.14}$$

3.11 Propriedades magnéticas da matéria

3.11.1 O magnetismo na matéria

A estrutura mais simples na eletricidade é a carga elétrica q .

Duas cargas elétricas de sinais opostos, mantidas a uma distância fixa formam um dipolo elétrico \vec{p} .

No magnetismo não existem polos magnéticos isolados. Logo, a estrutura mais simples é o dipolo magnético $\vec{\mu}$.

Os átomos possuem momentos magnéticos dipolares devido ao movimento dos elétrons e também aos seus spins. Quando os dipolos magnéticos são submetidos a um campo magnético externo, o alinhamento dos dipolos magnéticos tende a reforçar o campo externo.

Comparando o caso do campo elétrico \vec{E} de um dipolo elétrico \vec{p} produzido por duas cargas q de sinais opostos, com os dipolos magnéticos $\vec{\mu}$, nota-se que, num ponto longe dos dipolos, as linhas dos campos \vec{B} e \vec{E} são muito semelhantes. Entretanto, entre as cargas do dipolo elétrico as linhas do campo elétrico \vec{E} têm o sentido oposto ao do dipolo elétrico \vec{p} , enquanto que, no interior de um material magneticamente polarizado, os dipolos magnéticos $\vec{\mu}$ criam um campo magnético \vec{B}_m que tem o mesmo sentido que o campo magnético externo \vec{B}_{ext} , responsável pela polarização, reforçando-o.

Os materiais podem ser divididos em três categorias:

Paramagnéticos, Diamagnéticos e Ferromagnéticos, dependendo do comportamento dos momentos magnéticos quando o material é submetido a um campo magnético externo.

3.11.2 O paramagnetismo

O paramagnetismo resulta do alinhamento parcial dos spins eletrônicos (metais) ou de momentos magnéticos atômicos ou moleculares por um campo magnético externo. Nos materiais paramagnéticos, os dipolos magnéticos não interagem fortemente uns com os outros e estão normalmente orientados de forma aleatória.

Na presença de um campo magnético externo, os dipolos se alinham parcialmente, o que reforça o campo. No caso dos campos externos de intensidade normal à temperatura ambiente, porém, apenas uma pequena porcentagem das moléculas se alinha com o campo, porque a agitação térmica é suficiente para

manter a maior parte dos momentos desalinhados; assim o aumento de campo causado pelo paramagnetismo é geralmente muito pequeno.

3.11.3 O ferromagnetismo

O fenômeno do **ferromagnetismo** é muito mais complicado. Como existe uma forte interação entre dipolos magnéticos vizinhos, os momentos magnéticos tendem a permanecer alinhados mesmo em altas temperaturas e sob a ação de campos magnéticos fracos, o que faz o campo total assumir valores elevados.

Mesmo na ausência de campos magnéticos externos, um material ferromagnético pode conservar o alinhamento dos dipolos magnéticos; é o que ocorre nos ímãs permanentes.

3.11.4 O diamagnetismo

O **diamagnetismo** é causado pela indução de momentos dipolares magnéticos associados ao movimento orbital dos elétrons. Estes momentos se opõem ao campo magnético aplicado e, por isto, reduzem o campo magnético total.

O efeito ocorre em todos os materiais; entretanto, como os momentos magnéticos induzidos são desprezíveis, por serem muito menores, em comparação com os momentos magnéticos permanentes, o diamagnetismo só é observado em materiais que não possuem momentos magnéticos permanentes.

3.11.5 Magnetização e susceptibilidade magnética

Quando um material é submetido a um campo magnético \vec{B}_{ext} intenso, como o produzido por um solenoide, o campo magnético do solenoide tende a alinhar os momentos magnéticos $\vec{\mu}$ (permanentes ou induzidos) que existem no interior do material.

O grau de alinhamento dos dipolos magnéticos é descrito por um parâmetro chamado magnetização (\vec{M}), definido como o momento dipolar magnético total por unidade de volume:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} \quad (9.1)$$

Muito antes que a estrutura atômica da matéria fosse conhecida, Ampère propôs um modelo de magnetismo no qual a magnetização dos materiais se deveria ao movimento de cargas em circuitos microscópicos.

Hoje se sabe que o magnetismo se deve ao movimento de cargas atômicas, que reproduz os circuitos imaginados por Ampère.

A Figura 55 mostra alguns circuitos microscópicos, com os momentos magnéticos correspondentes paralelos ao eixo do cilindro de material magnético. Devido ao fato de correntes vizinhas terem sentidos opostos e, por isto, se cancelarem mutuamente, a corrente total em qualquer ponto do cilindro é nula, a não ser na superfície, ver Figura 56.

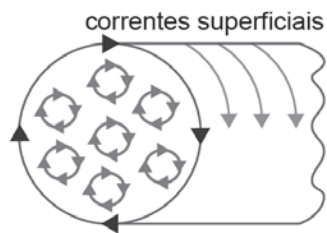


Figura 55

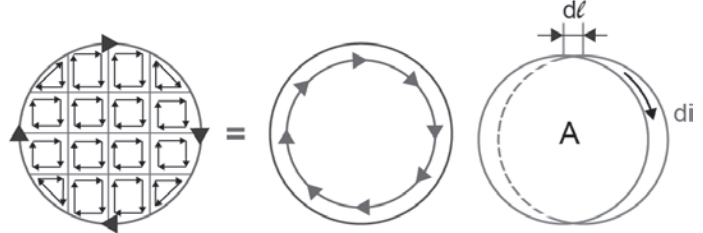


Figura 56

Figura 57

Esta corrente superficial, a corrente amperiana, produz um campo magnético semelhante ao de um solenoide.

A Figura 57 mostra um pequeno disco de área A , espessura $d\ell$ com volume $dV = A d\ell$.

Seja di a corrente amperiana na superfície do disco. O momento dipolar magnético do disco é igual ao produzido por uma espira da área A percorrida por uma corrente di :

$$d\mu = A di \tag{9.2}$$

Por definição, a magnetização \vec{M} do disco é o momento magnético total $\bar{\mu}$ dividido pelo volume:

$$M = \frac{d\mu}{dV} = \frac{A di}{A d\ell} = \frac{di}{d\ell} \tag{9.3}$$

Assim, o módulo do vetor magnetização \mathbf{M} é igual à corrente amperiana por unidade de comprimento do material magnetizado. Este resultado mostra que a magnetização \mathbf{M} é medida em ampères por metro.

Seja um cilindro com uma magnetização uniforme \vec{M} na direção do eixo. O efeito da magnetização é o mesmo que se o cilindro estivesse sendo percorrido por uma corrente superficial por unidade de comprimento cujo módulo fosse \mathbf{M} .

Esta corrente é semelhante à corrente de um solenoide de forma cilíndrica. No caso do solenoide, a corrente por unidade de comprimento é igual a $n\mathbf{i}$, em que n é o número de espiras por unidade de espessura e \mathbf{i} é a corrente.

O módulo do campo magnético \mathbf{B}_m no interior do cilindro e longe das extremidades é, portanto, dado por:

$$B_m = \mu_0 ni$$

com ni substituído por \mathbf{M} :

$$B_m = \mu_0 M \quad (9.4)$$

Considerar que um cilindro de material magnético seja colocado no interior de um solenoide longo com n espiras por unidade de comprimento, percorrido por uma corrente i .

O campo magnético aplicado pelo solenoide, $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mu_0 ni$, magnetiza o material, fazendo com que ele adquira uma magnetização $\vec{\mathbf{M}}$.

O campo magnético resultante em um ponto do interior do solenoide, longe das extremidades, é dado por:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}} + \mu_0 \vec{\mathbf{M}} \quad (9.5)$$

No caso de materiais paramagnéticos e ferromagnéticos, $\vec{\mathbf{M}}$ tem o mesmo sentido que $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$; no caso de materiais diamagnéticos, $\vec{\mathbf{M}}$ e $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ têm sentidos opostos. No caso de materiais paramagnéticos e diamagnéticos, a magnetização é proporcional ao campo magnético aplicado $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$, responsável pelo alinhamento dos dipolos magnéticos no interior do material. Pode-se escrever,

$$\vec{\mathbf{M}} = \chi_m \frac{\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}}{\mu_0} \quad (9.6)$$

em que χ_m é um número adimensional – a **susceptibilidade magnética**.

A **Equação (9.5)** pode ser escrita

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}} + \mu_0 \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}} (1 + \chi_m) = K_m \vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}} \quad (9.7)$$

em que:

$$K_m \equiv 1 + \chi_m \quad (9.8)$$

é a permeabilidade magnética relativa do material.

Material	χ_m Susceptibilidade magnética a 20°
Alumínio	$2,3 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1,66 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2,2 \times 10^{-5}$
Ouro	$-3,6 \times 10^{-5}$
Magnésio	$1,2 \times 10^{-5}$
Merúrio	$-3,2 \times 10^{-5}$
Prata	$-2,6 \times 10^{-5}$
Sódio	$-0,24 \times 10^{-5}$
Titânio	$7,06 \times 10^{-5}$
Tungstênio	$6,8 \times 10^{-5}$
Hidrogênio (1 atm)	$-9,9 \times 10^{-9}$
Dióxido de Carbono (1 atm)	$-2,3 \times 10^{-9}$
Nitrogênio (1 atm)	$-5,0 \times 10^{-9}$
Oxigênio (1 atm)	2090×10^{-9}

No caso dos materiais paramagnéticos, χ_m é um número pequeno e positivo, que depende da temperatura (varia inversamente com a temperatura).

No caso dos materiais diamagnéticos, χ_m é um número pequeno e negativo, que praticamente não varia com a temperatura.

No caso dos sólidos, pela **Equação (9.8)**, $K_m \approx 1$.

A magnetização dos materiais ferromagnéticos é muito mais complicada. A permeabilidade relativa K_m , é definida pela relação:

$$K_m \equiv \frac{B}{B_{\text{ext}}} \quad (9.9)$$

K_m não é constante e seu valor máximo pode variar de **5000** a **100.000**, dependendo do material.

No caso dos ímãs permanentes, K_m não é definido, já que estes materiais apresentam magnetização mesmo na ausência de um campo magnético externo aplicado.

3.11.6 Momentos magnéticos atômicos

A magnetização de um material paramagnético ou ferromagnético pode ser atribuída aos momentos magnéticos permanentes dos átomos ou elétrons do material. O momento magnético orbital de um elétron atômico pode ser calculado de forma semiclassical, embora seja de origem quântica.

Seja uma partícula de massa m e carga q que esteja se movendo com velocidade v em uma órbita circular de raio r . O módulo do momento angular da partícula é:

$$L = mvr \quad (9.10)$$

O módulo do momento magnético é igual ao produto da corrente pela área do círculo:

$$\mu = iA = i\pi r^2 \quad (9.11)$$

Se T é o tempo que a carga leva para completar uma revolução, a corrente (igual à carga que passa por um ponto qualquer da órbita por unidade de tempo) é igual a (q/T) .

Como o período T é igual ao perímetro da órbita, $(2\pi R)$, dividido pela velocidade v , vem:

$$i = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r} \quad (9.12)$$

O momento magnético é, portanto:

$$\mu = iA = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr \quad (9.13)$$

Usando a relação $vr = \frac{L}{m}$, obtida da **Equação (9.10)**, vem: $\mu = \frac{q}{2m} L$

Se a carga é positiva, o momento angular e o momento magnético apontam no mesmo sentido. Assim, pode-se escrever:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad (9.14)$$

É a **relação clássica entre momento magnético e momento angular**.

Esta relação permanece a mesma na teoria quântica do momento angular orbital, mas não vale para o momento angular intrínseco (spin) do elétron. No caso do spin eletrônico, o momento angular é duas vezes maior do que o valor previsto pela teoria clássica.

Medidas de alta precisão mostram que o momento magnético intrínseco do elétron é **2,00232** vezes maior do que o valor fornecido pela **Equação (9.14)**. Este resultado, e a própria existência do spin eletrônico, fazem parte de uma teoria proposta por P. A. M. Dirac, que combinou a teoria da relatividade restrita com a mecânica quântica para chegar a uma equação de onda relativística denominada equação de Dirac. O fato do momento magnético intrínseco do elétron ser aproximadamente duas vezes maior do que o valor previsto pela mecânica clássica mostra que o modelo simplista do elétron, considerando-o uma pequena esfera carregada girando em torno de si mesma não deve ser tomado literalmente.

Como o momento angular é quantizado, o momento magnético de um átomo também é quantizado. O quantum de momento angular é:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (9.15)$$

em que h é a constante de Planck. Assim, pode-se expressar o momento magnético em termos de \vec{L} : $\vec{\mu} = \frac{q\hbar}{2m} \frac{\vec{L}}{\hbar}$.

No caso de um elétron, tem-se que $\mathbf{m} = \mathbf{m}_e$ e $\mathbf{q} = -e$; assim, o momento magnético do elétron devido ao movimento orbital é dado por:

$$\vec{\mu}_\ell = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{L}}{\hbar} = -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (9.16)$$

Este é o momento magnético associado ao movimento orbital do elétron, em que:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 9,27 \times 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} = 5,79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

é o quantum de momento magnético, denominado magnéton de Bohr. O momento magnético de um elétron devido ao spin, \vec{S} , é dado por:

$$\vec{\mu}_s = -2 \times \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{S}}{\hbar} = -2\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad (9.17)$$

Este é o momento magnético associado ao spin do elétron.

Embora todos os elétrons de um átomo possuam um momento magnético, o momento resultante nunca é maior do que alguns magnétons de Bohr. Na verdade, muitos átomos possuem momento magnético nulo por razões de simetria da estrutura eletrônica dos átomos.

3.11.7 Paramagnetismo

O **paramagnetismo** é observado em materiais cujos átomos possuem momentos magnéticos que não interagem fortemente. Na ausência de campo magnético externo, estes momentos magnéticos estão orientados ao acaso e a magnetização total é nula.

Quando um campo magnético externo é aplicado ao material, os momentos magnéticos tendem a se alinhar paralelamente ao campo, mas esta tendência é contrabalançada pela agitação térmica, que tende a desalinhar os momentos.

A porcentagem de momentos que se alinham com o campo depende da intensidade do campo aplicado e da temperatura. Esta porcentagem é geralmente pequena, pois a energia de um momento magnético em um campo magnético externo é normalmente muito menor do que a energia térmica dos átomos do material, que é da ordem de kT , em que k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta.

A energia potencial de um dipolo magnético de momento magnético $\vec{\mu}$ em um campo magnético \vec{B} é dada pela equação:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (9.18)$$

A energia potencial é mínima quando o momento e o campo apontam na mesma direção ($\theta = 0$) e máxima quando o momento e o campo apontam em direções opostas ($\theta = 180^\circ$). A diferença é igual a $2\mu B$. Para um momento magnético típico de 1 magnéton de Bohr e um campo magnético de 1 T (um valor elevado), a diferença de energia potencial é

$$\Delta U = 2\mu_B B = 2 \left(5,79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \right) (1\text{T}) = 1,16 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

À temperatura ambiente (300 K), a energia térmica é:

$$kT = \left(8,62 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}} \right) (300\text{ K}) = 2,59 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

o que corresponde a um valor cerca de 200 vezes maior do que $2\mu B$. Assim, mesmo em um campo elevado, a agitação térmica faz com que a maioria dos momentos magnéticos permaneça orientada aleatoriamente, a menos que a temperatura seja muito baixa.

A Figura 58 mostra um gráfico da magnetização M em função do campo magnético \vec{B}_{ext} aplicado para uma dada temperatura.

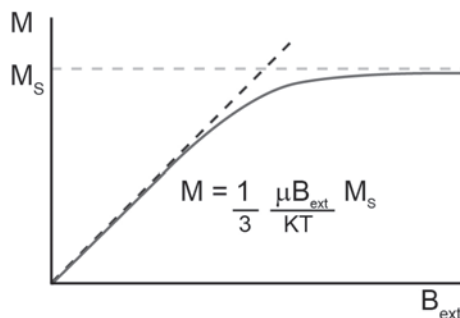


Figura 58

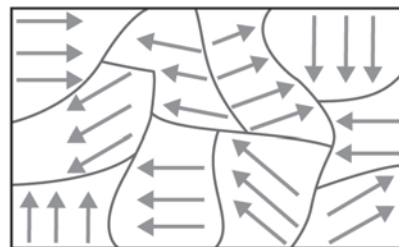


Figura 59

Em campos muito intensos, quase todos os momentos magnéticos estão alinhados com o campo e $\mathbf{M} \cong \mathbf{M}_s$ (para os campos magnéticos possíveis de se conseguir em laboratório, isto ocorre apenas em temperaturas muito baixas). Para $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, isto é, a orientação dos momentos é totalmente aleatória. Para campos magnéticos fracos, a magnetização é aproximadamente proporcional ao campo magnético aplicado, como indica a linha tracejada. Nesta região, a magnetização \mathbf{M} é dada por:

$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{\text{ext}}}{kT} M_s \quad (9.19)$$

Esta é a Lei de Curie.

Observar que $\frac{\mu B_{\text{ext}}}{kT}$ é a relação entre a energia magnética máxima e a energia térmica do sistema. O fato de que a magnetização M varia com a Temperatura foi descoberto experimentalmente por Pierre Curie, daí o nome de Lei de Curie.

3.11.8 Ferromagnetismo

O **ferromagnetismo** é observado no ferro, no níquel, no cobalto e em ligas destes metais; é observado também no gadolínio, no disprosio e em uns poucos compostos. O fenômeno é causado por uma forte interação entre os elétrons de átomos vizinhos. Esta interação, denominada interação de câmbio, faz com que um par de elétrons possua uma energia menor se os spins estiverem apontando no mesmo sentido do que se estiverem apontando em sentidos opostos.

Os materiais ferromagnéticos apresentam valores positivos muito altos de susceptibilidade magnética (medida em condições especiais, descritas daqui a pouco).

Nestas substâncias, a aplicação de um pequeno campo magnético aplicado pode resultar em um alto grau de alinhamento dos momentos magnéticos. Em alguns casos, o alinhamento persiste mesmo depois que o campo magnético externo é removido. Isto ocorre porque os momentos magnéticos influenciam os momentos vizinhos, fazendo com que todos os momentos em uma pequena região do espaço fiquem alinhados mesmo na ausência de um campo magnético externo. A região do espaço na qual todos os momentos magnéticos estão alinhados é denominada domínio magnético. Os domínios são normalmente microscópicos. Dentro de cada domínio, todos os momentos magnéticos estão alinhados, mas a direção de alinhamento varia de domínio para domínio, de modo que a magnetização total de um pedaço de dimensões macroscópicas de

um material ferromagnético pode ser muito pequena ou mesmo nula. Esta situação está ilustrada na Figura 60. Após a saturação, B aumenta apenas porque o campo aplicado $B_{\text{ext}} = \mu_0 ni$ continua a aumentar. Quando B_{ext} é diminuído a partir do ponto P_1 , a magnetização da barra diminui, mas não muito. A força responsável pelo alinhamento dos momentos magnéticos dentro de cada domínio é de natureza quântica e não pode ser explicada pela mecânica clássica. Acima de uma temperatura crítica, denominada temperatura de Curie, a agitação térmica é suficiente para romper este alinhamento e o material ferromagnético se torna paramagnético.

Quando um campo magnético externo é aplicado, as fronteiras dos domínios se deslocam de tal forma que o momento total na direção do campo aplicado aumenta. Como este efeito ocorre mesmo para pequenos valores do campo aplicado, o campo magnético induzido no material por um campo externo pode ser muito maior do que o próprio campo.

O que acontece quando se magnetiza uma longa barra de ferro, colocando-a no interior de um solenoide e aumentando gradualmente a corrente no enrolamento deste? A barra e o solenoide são suficientemente longos para que se possa ignorar a influência das extremidades. Como o momento magnético induzido tem a mesma direção e sentido que o campo magnético aplicado, pode-se escrever:

$$B = B_{\text{ext}} + \mu_0 M = \mu_0 ni + \mu_0 M \quad (9.20)$$

A Figura 60 mostra o gráfico de \vec{B} em função do campo magnético aplicado \vec{B}_{ext} .

Se a magnetização inicial da barra é nula e a corrente no solenoide é aumentada gradualmente a partir de zero, o campo total \vec{B} segue a linha OP_1 da Figura 60(a).

O achatamento da curva nas proximidades do ponto P_1 indica que a magnetização M está se aproximando do valor de saturação M_s , para o qual todos os momentos magnéticos da amostra estão alinhados.

Após a saturação, B aumenta apenas porque o campo aplicado $B_{\text{ext}} = \mu_0 ni$ continua a aumentar. Quando B_{ext} é diminuído a partir do ponto P_1 , a magnetização da barra diminui, mas não muito.

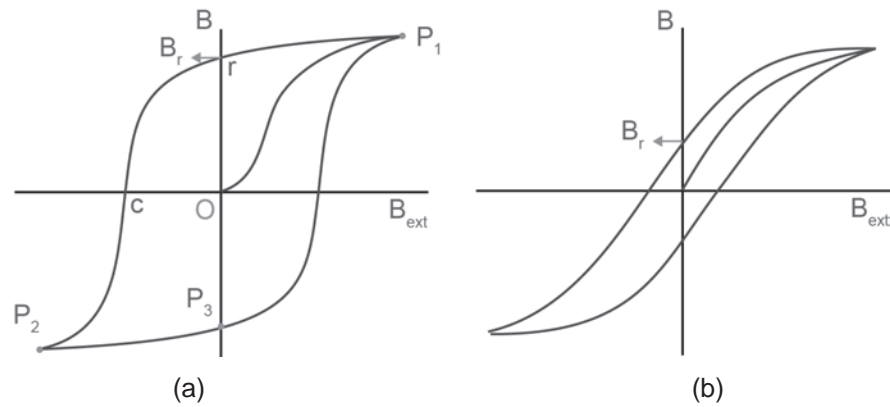


Figura 60

Como o deslocamento das fronteiras dos domínios de um material ferromagnético não é totalmente reversível, a barra permanece magnetizada mesmo quando o campo aplicado é totalmente removido.

Este efeito é conhecido como histerese, termo derivado da palavra grega *hysteros*, que significa atrás ou posterior. A curva da Figura 60 é uma curva de histerese; o valor do campo magnético no ponto r , no qual o campo magnético aplicado é zero, é chamado de campo remanente e é representado pelo símbolo B_r . Neste ponto, a barra de ferro se tornou um ímã permanente. Quando a corrente no solenoide é invertida, fazendo com que B_{ext} troque de sentido, e aumentada gradualmente a partir de zero, o campo magnético \vec{B} diminui até se anular no ponto C . A parte restante da curva de histerese é obtida aumentando-se ainda mais a corrente no sentido oposto até ser atingido o ponto P_2 , o qual corresponde à saturação no sentido oposto; em seguida, diminuindo a corrente até zero, o que leva o campo total ao ponto P_3 , e depois aumentando novamente a corrente no sentido inicial até o campo total chegar ao ponto P_1 .

Como a magnetização \mathbf{M} depende dos tratamentos anteriores a que foi submetido o material e pode ter um valor finito mesmo na ausência de campo aplicado, não existe uma relação simples entre \mathbf{M} e o campo aplicado B_{ext} .

Entretanto, analisando a parte da curva de magnetização que vai da origem ao ponto P_1 da Figura 60(a), \vec{M} e \vec{B}_{ext} serão paralelos e \mathbf{M} será nula quando B_{ext} for nulo. Pode-se então definir a susceptibilidade magnética χ_m através da equação:

$$M = \chi_m \frac{B_{ext}}{\mu_0} \quad (9.21)$$

e portanto

$$B = B_{ext} + \mu_0 M = B_{ext} (1 + \chi_m) = K_m \mu_0 ni = \mu ni \quad (9.22)$$

em que o parâmetro

$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0 = K_m \mu_0 \quad (9.23)$$

é a permeabilidade magnética μ do material.

No caso dos materiais paramagnéticos e diamagnéticos, $\chi_m \ll 1$, e por isto, a permeabilidade magnética μ é praticamente igual a μ_0 , que é a permeabilidade do espaço livre.

Como \mathbf{B} não varia linearmente com \mathbf{B}_{ext} , ver a Figura 60(a), a permeabilidade relativa dos materiais ferromagnéticos não é constante.

O valor máximo de K_m ocorre para uma magnetização bem menor do que a magnetização de saturação. Os valores máximos de K_m são todos muito maiores do que 1.

Material	Valores máximos de $\mu_0 M$ e K_m para alguns materiais ferromagnéticos	
	$\mu_0 M_s, \text{T}$	K_m
Ferro (Recozido)	2,16	5.500
Ferro-Silício (96% Fé, 4% Si)	1,95	7.000
Permalloy (55% Fé, 45% Ni)	1,60	25.000
Mu-Metal (77% Ni, 16% Fe, 5% Cu, 2% Cr)	0,65	100.000

A área delimitada pela curva de histerese é proporcional à energia dissipada como calor nos processos irreversíveis de magnetização e desmagnetização.

Quando o efeito de histerese é pequeno, e portanto a área delimitada pela curva e a dissipação de energia são pequenas, o material é chamado de magneticamente macio. O ferro doce é um exemplo. A Figura 60(b) mostra a curva de histerese de um material magneticamente macio. Observar que neste caso o campo remanente \mathbf{B}_r é relativamente pequeno, o que torna a curva estreita. Os materiais magneticamente macios são usados nos núcleos dos transformadores, para permitir que o campo magnético \mathbf{B} varie muitas vezes por segundo sem que a dissipação de energia seja excessiva.

Por outro lado, um grande campo remanente \mathbf{B}_r é desejável no caso dos ímãs permanentes. Os materiais magneticamente duros, como o aço de alto carbono e a liga Alnico 5, são usados na fabricação de ímãs permanentes.

3.11.9 Diamagnetismo

Materiais diamagnéticos são aqueles para os quais a susceptibilidade magnética χ_m apresenta valores pequenos e negativos. Em 1846 o diamagnetismo foi descoberto por Faraday, quando ele observou que um pedaço de bismuto é repelido pelos dois polos de um ímã. Isto mostra que o campo produzido pelo ímã induz um momento magnético no bismuto que tem o sentido oposto ao do campo \vec{B}_{ext} .

Pode-se compreender este fenômeno pela Figura 61 que mostra duas cargas negativas se movendo em órbita circulares com a mesma velocidade mas em sentidos opostos.

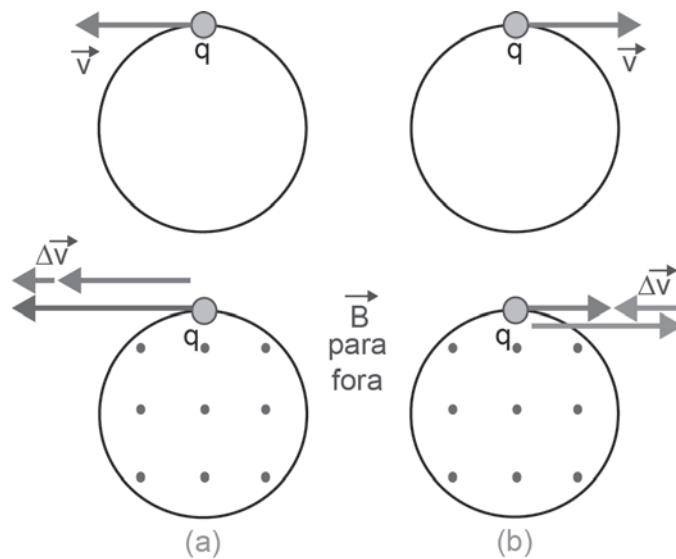


Figura 61

Na Figura 61(a), o momento magnético $\vec{\mu}$ de uma partícula de carga elétrica negativa, que se desloca em círculos no sentido anti-horário, é para fora do plano da Figura 61.

Quando um campo magnético externo \vec{B}_{ext} , dirigido para fora da Figura 61 é aplicado, a força magnética $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ faz aumentar a força centrípeta $|\vec{F}_c| = \frac{mv^2}{r}$, o que provoca um aumento da velocidade da partícula, neste caso, o elétron é acelerado por um campo elétrico induzido por variação de campo magnético. O momento magnético da partícula aumenta e a variação do momento magnético da partícula é dirigida para fora da figura.

Na Figura 61(b), o momento magnético da partícula é para dentro da figura. Quando o campo externo é aplicado, a força magnética $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ faz diminuir a força centrípeta $|\vec{F}_c| = \frac{mv^2}{r}$, o que produz uma diminuição da velocidade da partícula. O momento magnético da partícula diminui e a variação do momento magnético é dirigida, como em (a), para fora da figura.

Nos dois casos, a variação do momento magnético é para fora da figura, no sentido oposto ao do campo magnético aplicado.

Como os momentos magnéticos associados às duas cargas antes da aplicação do campo magnético externo são iguais e têm sentidos opostos, eles se cancelam, deixando apenas os momentos magnéticos induzidos, que se opõem ao campo aplicado.

Um material será diamagnético se seus átomos possuírem um momento magnético total igual a zero e, por isto, não tiverem nenhum momento magnético permanente. Os momentos magnéticos induzidos responsáveis pelo diamagnetismo são da ordem de 10^{-5} magnétons de Bohr. Como este valor é muito menor do que o dos momentos magnéticos permanentes dos átomos das substâncias paramagnéticas e ferromagnéticas, o efeito diamagnético nestes átomos é mascarado pelo alinhamento dos momentos magnéticos permanentes. Como este alinhamento diminui com o aumento da temperatura, todos os materiais tendem a se tornar diamagnéticos em temperaturas elevadas.

Quando um supercondutor é submetido a um campo magnético externo, as correntes elétricas induzidas na superfície anulam totalmente o campo magnético no interior do material.

Seja uma barra supercondutora no interior de um solenoide com n espiras por unidade de comprimento. Quando o solenoide é ligado a uma fonte de tensão e passa a conduzir uma **corrente i** , surge um campo magnético no seu interior de intensidade

$$B = \mu_0 ni.$$

Ao mesmo tempo, uma corrente superficial de $i_s = -ni$ ampères por unidade de comprimento é induzida na barra supercondutora, cancelando totalmente o campo magnético no interior da barra. De acordo com a equação $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}}(1 + \chi_m) = 0$ vem $\chi_m = -1$.

Então, um supercondutor apresenta diamagnetismo perfeito, com uma susceptibilidade magnética igual a -1 .

3.12 Referências bibliográficas

YOUNG, H.; FREEDMAN, R. A. *Física III: Eletromagnetismo*. 12 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física 2: Eletromagnetismo*. 8 ed. São Paulo: LTC, 2009.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros*. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

