

Coleção UAB–UFSCar

Engenharia Ambiental

Física 1

Odila Florêncio

Paulo Sergio da Silva Junior

Sérgio de Aguiar Monsanto

Sérgio Mergulhão

Fundamentos de Física 1



Fundamentos de Física 1



Reitor

Targino de Araújo Filho

Vice-Reitor

Pedro Manoel Galetti Junior

Pró-Reitora de Graduação

Emília Freitas de Lima



Secretária de Educação a Distância - SEaD

Aline Maria de Medeiros Rodrigues Reali

Coordenação UAB-UFSCar

Claudia Raimundo Reyes

Daniel Mill

Denise Abreu-e-Lima

Joice Otsuka

Marcia Rozenfeld G. de Oliveira

Sandra Abib

Coordenador do Curso de Engenharia Ambiental

Luiz Márcio Poiani

UAB-UFSCar

Universidade Federal de São Carlos

Rodovia Washington Luís, km 235

13565-905 - São Carlos, SP, Brasil

Telefax (16) 3351-8420

www.uab.ufscar.br

uab@ufscar.br

**Odila Florêncio
Paulo Sergio da Silva Junior
Sérgio de Aguiar Monsanto
Sérgio Mergulhão**

Fundamentos de Física 1

Concepção Pedagógica

Daniel Mill

Supervisão

Douglas Henrique Perez Pino

Equipe de Revisão Linguística

Ana Luiza Menezes Baldin

Clarissa Neves Conti

Francimeire Leme Coelho

Jorge Ialanji Filholini

Leticia Moreira Clares

Luciana Rugoni Sousa

Paula Sayuri Yanagiwara

Sara Naime Vidal Vital

Equipe de Editoração Eletrônica

Christhiano Henrique Menezes de Ávila Peres

Izis Cavalcanti

Rodrigo Rosalis da Silva

Equipe de Ilustração

Jorge Luís Alves de Oliveira

Lígia Borba Cerqueira de Oliveira

Priscila Martins de Alexandre

Capa e Projeto Gráfico

Luís Gustavo Sousa Sguissardi

SUMÁRIO

| | |
|---------------------------|---|
| APRESENTAÇÃO | 9 |
|---------------------------|---|

UNIDADE 1: Mecânica Newtoniana

| | |
|--|----|
| 1.1 Primeiras palavras | 13 |
| 1.2 Problematizando o tema | 13 |
| 1.3 Texto básico para estudos | 13 |
| 1.3.1 Cinemática vetorial | 13 |
| 1.3.1.1 Vetor posição | 13 |
| 1.3.1.2 Velocidade vetorial média | 14 |
| 1.3.1.3 Velocidade vetorial instantânea | 15 |
| 1.3.1.4 Movimento não uniforme | 16 |
| 1.3.1.5 Aceleração vetorial instantânea | 16 |
| 1.3.1.6 Aceleração tangencial | 17 |
| 1.3.1.7 Aceleração centrípeta | 17 |
| 1.3.2 Leis de Newton do movimento | 18 |
| 1.3.2.1 Primeira Lei de Newton | 18 |
| 1.3.2.2 Segunda Lei de Newton | 19 |
| 1.3.2.3 Terceira Lei de Newton | 20 |
| 1.3.2.4 Força de atrito | 20 |
| 1.3.3 Trabalho e Energia | 22 |
| 1.3.3.1 Trabalho realizado por uma força constante | 22 |
| 1.3.3.2 Trabalho realizado por uma força variável | 23 |
| 1.3.4 Teorema trabalho-energia | 24 |
| 1.3.5 Conservação de quantidade de movimento | 26 |
| 1.3.5.1 O centro de massa | 26 |
| 1.3.5.2 Quantidade de movimento linear | 27 |

| | | |
|------------|---|----|
| 1.3.5.3 | Quantidade de movimento linear para um sistema de partículas | 28 |
| 1.3.5.4 | Conservação da quantidade de movimento linear | 29 |
| 1.3.5.5 | Quantidade de movimento linear e energia cinética em colisões | 29 |
| 1.3.6 | Gravidade e energia potencial gravitacional. | 30 |
| 1.3.6.1 | Atração gravitacional. | 30 |
| 1.3.6.2 | Energia potencial gravitacional | 32 |
| 1.3.7 | Corpos rígidos, rotação e movimento angular. | 33 |
| 1.3.7.1 | Translação e rotação de um objeto | 33 |
| 1.3.7.2 | Medida angular | 34 |
| 1.3.7.3 | Velocidade vetorial angular | 35 |
| 1.3.7.4 | Aceleração angular | 35 |
| 1.3.7.5 | Cinemática | 36 |
| 1.3.7.5.1 | Velocidade vetorial angular constante | 36 |
| 1.3.7.5.2 | Aceleração angular constante | 37 |
| 1.3.7.5.3 | Analogia entre translação e rotação | 38 |
| 1.3.7.5.4 | Relação entre grandezas rotacionais e translacionais | 38 |
| 1.3.7.5.5 | Energia cinética rotacional: momento de inércia. | 40 |
| 1.3.7.5.6 | Momento de inércia de um objeto contínuo | 41 |
| 1.3.7.5.7 | Teorema dos eixos paralelos | 41 |
| 1.3.7.5.8 | Objetos em rolamento | 42 |
| 1.3.7.5.9 | Energia cinética de um objeto em rolamento | 42 |
| 1.3.7.5.10 | Momento angular | 43 |
| 1.3.7.5.11 | Momento angular de um sistema de partículas | 43 |
| 1.3.7.5.12 | Conservação do momento angular. | 45 |
| 1.4 | Considerações finais | 45 |

UNIDADE 2: Mecânica Ondulatória

| | | |
|-----|---------------------------------|----|
| 2.1 | Primeiras palavras | 49 |
| 2.2 | Problematizando o tema. | 49 |

| | | |
|---------|---|----|
| 2.3 | Oscilações simples e acopladas | 49 |
| 2.3.1 | Introdução | 49 |
| 2.3.2 | Movimento harmônico simples | 49 |
| 2.3.3 | Movimento harmônico amortecido | 52 |
| 2.3.4 | Movimento harmônico amortecido forçado | 54 |
| 2.3.4.1 | Efeitos de ressonância | 55 |
| 2.3.5 | Osciladores harmônicos acoplados | 55 |
| 2.4 | Introdução aos fenômenos ondulatórios | 57 |
| 2.4.1 | Conceito de onda | 57 |
| 2.4.2 | Classificação dos tipos de onda | 58 |
| 2.4.3 | Função de onda unidimensional | 59 |
| 2.4.4 | Reflexão e transmissão de ondas | 60 |
| 2.5 | Ondas harmônicas | 61 |
| 2.5.1 | Função de onda harmônica | 61 |
| 2.5.2 | Energia e potência transmitida por ondas harmônicas | 63 |
| 2.6 | Acústica e som | 64 |
| 2.6.1 | Ondas sonoras | 64 |
| 2.6.2 | Velocidade das ondas sonoras | 64 |
| 2.6.3 | Ondas em três dimensões | 65 |
| 2.6.4 | Nível de intensidade | 66 |
| 2.7 | Ondas estacionárias | 66 |
| 2.7.1 | Ondas estacionárias numa corda fixa nas duas extremidades | 67 |
| 2.7.2 | Função de onda estacionária | 69 |
| 2.8 | Superposição | 70 |
| 2.8.1 | Superposição e interferência de ondas | 70 |

| | |
|---|-----------|
| 2.8.2 Superposição de ondas estacionárias | 70 |
| 2.9 Efeito Doppler | 71 |
| 2.9.1 Cálculo das frequências | 72 |
| REFERÊNCIAS | 77 |

APRESENTAÇÃO

Este livro foi desenvolvido com a finalidade de auxiliar nos conceitos de Mecânica Newtoniana e Mecânica Ondulatória.

Na Unidade 1, Mecânica Newtoniana, serão abordados os seguintes assuntos: Cinemática, Leis de Newton, Trabalho e Energia, Conservação da quantidade de movimento, Gravidade e atmosfera, Corpos rígidos, Rotação, Momento angular.

Na Unidade 2, Mecânica Ondulatória, serão tratados os temas: Oscilações simples e acopladas, Introdução aos fenômenos ondulatórios, Ondas harmônicas, Acústica e Som, Superposição, Ondas estacionárias e ressonância, Efeito Doppler.

Ao final do livro, o leitor deverá ser capaz de entender e resolver problemas de física relacionados à mecânica newtoniana e mecânica ondulatória, além de relacionar estes conhecimentos com a formação básica de um engenheiro ambiental.

UNIDADE 1

Mecânica Newtoniana

1.1 Primeiras palavras

Um dos objetivos dos conceitos físicos é estudar o movimento de objetos, e é a Cinemática o ramo da Física que estuda esses movimentos, sem levar em conta como foram produzidos.

1.2 Problematizando o tema

Ao estudar o movimento de um objeto, deve ser observado se esse movimento pode ser considerado como o movimento de uma partícula em uma única direção. Caso isso aconteça, esse movimento pode ser estudado como translação pura.

1.3 Texto básico para estudos

O velocímetro do carro fornece a velocidade instantânea em quilômetros por hora. Define-se velocidade como a taxa de variação temporal da variação da distância. Se em um tempo t_0 o carro está em um ponto x_0 e, posteriormente, em um tempo t ele está na posição x , definimos a velocidade média do carro como: $v = (x - x_0)/(t - t_0)$. Por meio dessa relação, calcula-se a velocidade média, sem se levar em conta se o carro parou por certo tempo, se percorreu um percurso com uma velocidade v_1 e depois com outra velocidade v_2 . Essa velocidade fornecida pelo velocímetro é uma grandeza escalar, no entanto, para o cálculo da velocidade de um determinado objeto, devemos lembrar que a velocidade é uma grandeza vetorial, isto é, ela tem uma direção, um sentido e um módulo. Este estudo é chamado de cinemática vetorial e para tanto precisamos saber as noções básicas de vetores.

1.3.1 Cinemática vetorial

1.3.1.1 Vetor posição

O vetor posição localiza uma partícula em relação a um sistema de referência. Por exemplo, no sistema cartesiano temos três eixos perpendiculares entre si que se cruzam na origem, chamados de eixos x , y e z . As direções de cada eixo são representadas, respectivamente, por i , j e k , que são chamados de vetores unitários ou versores. Um objeto localizado a uma distância r da origem tem sua posição representada conforme a figura a seguir. O vetor \vec{r} inicia-se

na origem e termina no objeto. Para descrever o vetor \vec{r} projeta-se o vetor nos eixos x, y e z, como mostra a Figura 1.1.

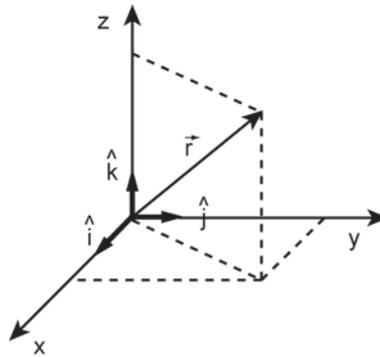


Figura 1.1 Vetor posição em relação ao sistema cartesiano.

Em que:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (1.1)$$

Na equação anterior, x, y e z representam a grandeza escalar que mede a projeção do vetor em cada eixo.

1.3.1.2 Velocidade vetorial média

Quando o objeto se desloca de um ponto A para um ponto B, a sua posição passa a ser definida por um novo vetor \vec{r}_f e a velocidade vetorial média é expressa pela razão entre o vetor $\Delta\vec{r}$ e o espaço de tempo decorrido Δt ,

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}$$

Note que o vetor \vec{r} pode ser decomposto nas projeções x, y e z e a velocidade média pode ser escrita como:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \quad (1.2)$$

Portanto, a velocidade vetorial média é escrita como a soma vetorial das velocidades v_x , v_y e v_z , que são as velocidades em cada eixo cartesiano.

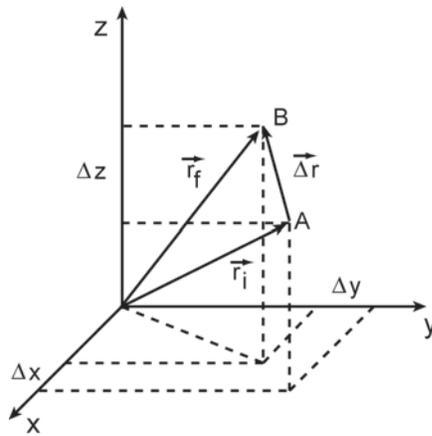


Figura 1.2 Variação do vetor posição em relação ao sistema cartesiano.

1.3.1.3 Velocidade vetorial instantânea

A velocidade instantânea é um vetor \vec{v} e que é obtida tomando-se o intervalo de tempo Δt cada vez menor, tendendo a zero e o mesmo acontecendo com o vetor deslocamento $\Delta \vec{r}$, o que significa que a velocidade média é calculada em uma situação em que o ponto B está muito próximo de A .

A velocidade neste caso é escrita como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Decompondo o vetor $d\vec{r}$ em suas componentes cartesianas, a velocidade vetorial instantânea pode ser escrita como a soma vetorial das velocidades em cada eixo cartesiano.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (1.3)$$

$|\vec{v}|$ é a intensidade do vetor velocidade instantânea.

A direção de \vec{v} é tangente à trajetória em cada ponto.

Se a trajetória é uma reta, a velocidade \vec{v} tem a direção da trajetória e o sentido é o mesmo do movimento.

Se o módulo de \vec{v} aumenta, o movimento é acelerado; se diminui, o movimento é retardado e se for constante, o movimento é uniforme.

Se a direção de \vec{v} é constante, o movimento é retilíneo; se é variável, o movimento é curvilíneo.

1.3.1.4 Movimento não uniforme

Quando a velocidade não é constante, podemos ter uma variação do módulo do vetor r com o tempo ou uma variação da direção e sentido do vetor enquanto o módulo se mantém constante, ou mesmo todas as possibilidades. Nestes casos define-se a aceleração vetorial média do objeto como a variação do vetor velocidade com o tempo.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (1.4)$$

1.3.1.5 Aceleração vetorial instantânea

A aceleração vetorial instantânea é obtida tomando-se o intervalo de tempo Δt cada vez menor, tendendo a zero e o mesmo acontecendo com vetor velocidade Δv .

A aceleração, neste caso, é escrita como

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.5)$$

A aceleração vetorial possui duas componentes:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C \quad (1.6)$$

Em que: \vec{a}_T é a aceleração tangencial ao movimento e \vec{a}_C é a aceleração centrípeta, perpendicular ao movimento.

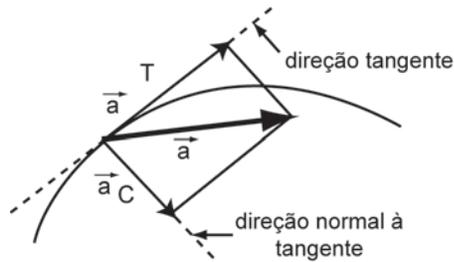


Figura 1.3 Componentes da aceleração vetorial instantânea.

1.3.1.6 Aceleração tangencial

A aceleração vetorial tem a mesma direção da velocidade quando só a intensidade da velocidade vetorial varia no tempo, mas pode ter ou não o mesmo sentido.

1.3.1.7 Aceleração centrípeta

Quando só a direção da velocidade vetorial sofre variações no tempo, a aceleração vetorial é sempre perpendicular, em cada ponto da trajetória, à direção da velocidade, e seu sentido é orientado para a concavidade da curva descrita pela partícula. É chamada também de aceleração normal.

Se a partícula descrever uma trajetória circular de raio r , e possuir num dado instante t uma velocidade escalar v , a intensidade ou módulo da aceleração centrípeta neste instante será:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (1.7)$$

E a sua direção coincidirá com a do raio de curvatura no ponto.

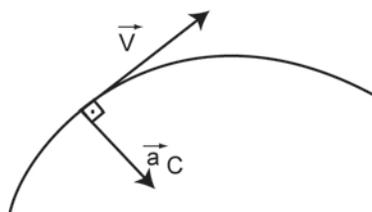


Figura 1.4 Aceleração vetorial centrípeta e velocidade vetorial num movimento curvilíneo.

Nos movimentos curvilíneos e variados a aceleração vetorial terá as duas componentes, e a direção de \vec{a} formará, com a direção de \vec{v} , um ângulo α . Se

este ângulo for agudo, a componente tangencial da aceleração terá o mesmo sentido de \vec{v} e o movimento será acelerado; se o ângulo for obtuso, a componente tangencial da aceleração terá sentido contrário ao da velocidade e o movimento será retardado.

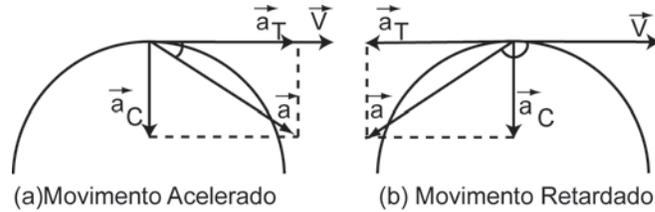


Figura 1.5 Componentes da aceleração vetorial centrípeta e velocidade vetorial em movimentos curvilíneos: acelerado (a) e retardado (b).

A aceleração vetorial só será nula em duas situações, se o ponto material estiver em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

1.3.2 Leis de Newton do movimento

A Mecânica baseia-se em três leis naturais, que foram enunciadas e publicadas em 1686 por Sir Isaac Newton, conhecidas como as leis de Newton. A força é uma grandeza vetorial e, para descrevê-la é necessário descrever a direção, o sentido em que ela atua e a sua intensidade (também chamada de módulo). A unidade de força no sistema internacional de unidades é o Newton, representado pela letra N. A unidade de força 1N equivale à força que, aplicada a um corpo de massa igual a 1 quilograma (1 Kg), produz neste corpo uma aceleração de 1 metro por segundo ao quadrado (1m/s^2). O instrumento normalmente usado para medir a intensidade de uma força é chamado de dinamômetro e consiste em uma mola contida em um estojo de proteção, tendo em uma extremidade um ponteiro que se move sobre uma escala graduada.

1.3.2.1 Primeira Lei de Newton

Todo corpo permanece em estado de repouso, ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que seja compelido a mudar este estado em virtude de forças exercidas sobre ele.

Força Resultante: a força resultante ($\sum \vec{F}$) exercida sobre um objeto é a soma vetorial de todas as forças individuais que atuam sobre ele por outros corpos.

Com o conceito de força resultante, a Primeira Lei de Newton fica, em termos atuais:

Quando a força resultante sobre um objeto é zero ($\sum \vec{F} = 0$), a aceleração do objeto é zero ($\vec{a} = 0$) e, portanto, a sua velocidade vetorial permanece constante ($\vec{v} = \text{constante}$).

Conclusões

a) Se a *velocidade vetorial* for zero ($\vec{v} = 0$), o objeto encontra-se em estado de repouso ou de equilíbrio estático.

b) Se a *velocidade vetorial* for *constante*, $\vec{v} = \text{constante}$, implica que o estado de movimento é retilíneo uniforme ou estado de equilíbrio dinâmico, o qual é caracterizado por $\vec{a} = 0$.

Sistemas inerciais de referência

Um sistema inercial de referência é um sistema em que a Primeira Lei de Newton é válida, ou um sistema em relação ao qual $\vec{a} = 0$ para qualquer objeto com força resultante igual a zero ($\sum \vec{F} = 0$).

Sistemas não inerciais de referência

Qualquer sistema que acelere em relação a um sistema inercial de referência é um sistema não inercial de referência.

1.3.2.2 Segunda Lei de Newton

Definição de momento ou quantidade de movimento p . Define-se o momento p de um corpo de massa M como sendo o produto da massa pelo vetor velocidade do corpo. Desse modo, assim como a velocidade, o momento também é uma grandeza vetorial. Momento \vec{p} :

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

A Segunda Lei de Newton foi formulada em termos da variação do momento p e diz que a variação do momento \vec{p} é proporcional à força motriz imprimida e atua na direção da reta segundo a qual a força é dirigida.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ se } \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (1.8)$$

Em termos da aceleração de um objeto, a segunda lei de Newton diz que a resultante de todas as forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto da sua massa pela aceleração. Desse modo, a segunda lei de Newton fica:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (1.9)$$

A aceleração de um objeto é proporcional à força resultante exercida sobre ele, e a massa do objeto é o fator de proporcionalidade entre a força resultante e a aceleração.

No Sistema Internacional (SI) essas grandezas são dadas por:

$$[F] = \text{N (Newton)}$$

$$[m] = \text{kg}$$

$$[a] = \text{m/s}^2$$

Então:

$$1\text{N} = 1\text{kg.m/s}^2$$

1.3.2.3 Terceira Lei de Newton

A toda ação opõe-se uma reação igual; ou, as ações mútuas de um corpo sobre outro têm sempre a mesma direção e sentidos opostos.

Se o objeto B exerce uma força \vec{F} sobre o objeto A, então o objeto A exerce sobre B uma força igual e oposta ($-\vec{F}$). As forças ocorrem em pares, atuando em corpos diferentes. Não pode existir uma força única.

1.3.2.4 Força de atrito

Quando um corpo desliza sobre outro, cada um exerce sobre o oposto uma força de atrito paralela às superfícies e em direção oposta ao movimento relativo entre eles. Mesmo quando os corpos estão em repouso, pode haver força de atrito entre eles. Por exemplo, se tentamos empurrar uma caixa pesada que repouse no chão, a força que aplicamos na horizontal pode não ser suficiente para deslocar a caixa, pois o chão aplica sobre a caixa uma força de atrito igual e oposta à força que estamos aplicando.

Na figura a seguir, T é a força que empurra o corpo de massa M para a direita. P é a força peso ($P = Mg$), em que g é a aceleração da gravidade. N é chamada força normal, e é a força que o chão aplica no corpo. N é a reação à força peso (Terceira Lei de Newton). F_a é a força de atrito entre o corpo e a superfície e tem módulo igual à força T e sentido contrário a esta. Se aumentarmos o valor da força T , a força de atrito F_a também aumentará até atingir um valor máximo. Esse valor máximo é conhecido como força de atrito estático e seu módulo é dado por $F_a = \mu_e N$, em que μ_e é chamado de coeficiente de atrito estático. Se a força T for maior ou igual que o valor máximo da força de atrito, o corpo deslizará. Quando o corpo desliza, o coeficiente de atrito tem um valor diferente do coeficiente estático e é chamado de coeficiente de atrito de escorregamento, ou atrito cinético μ_k . Neste caso, a força de atrito é dada por $F_a = \mu_k N$. Na figura, se o objeto estiver em repouso, a soma das forças será nula. Somando as forças na horizontal e na vertical, encontramos:

Na vertical:

$$N - P = 0 \rightarrow N = P = Mg$$

Na horizontal:

$$T - F_a = 0 \rightarrow T = F_a = \mu_e N = \mu_e Mg$$

Então:

$$T = \mu_e Mg$$

Quando o corpo se desloca com velocidade constante, sua aceleração a é nula, e na vertical continuamos tendo $N = Mg$. Na horizontal, como $a = 0$ também temos $T = F_a$. No entanto, como existe movimento, a força de atrito é dada por $F_a = \mu_k N$. Então temos:

$$T = F_a = \mu_k N = \mu_k Mg.$$

Se a força T for maior que a força de atrito F_a , a somatória das forças na horizontal será diferente de zero e o corpo adquirirá uma aceleração a no sentido da resultante. Neste caso, escrevemos que na horizontal a soma das forças é dada por:

$$T - \mu_e N = Ma \rightarrow T - \mu_k Mg = Ma$$

Quanto maior for a força T , maior será a aceleração a do corpo.

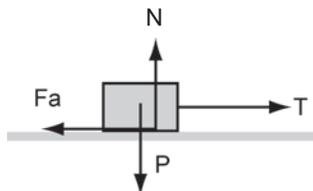


Figura 1.6 Forças que atuam sobre um corpo.

1.3.3 Trabalho e Energia

1.3.3.1 Trabalho realizado por uma força constante

Suponhamos uma força constante \vec{F} atuando sobre um objeto que se move em linha reta, durante um deslocamento $\ell = |\Delta\vec{r}|$. O trabalho realizado por um agente que exerce uma força \vec{F} sobre este objeto é igual ao produto da componente da força na direção do deslocamento, $(F \cos \theta)$, pela distância percorrida pelo objeto (na direção do deslocamento).

Então:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \ell \cos \theta \tag{1.10}$$

O ângulo θ é formado pelos vetores força e deslocamento, como mostra a figura a seguir, e pode assumir os valores:

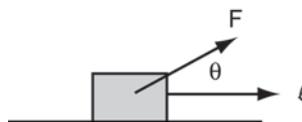


Figura 1.7 Deslocamento de um corpo sujeito a uma força F .

1) A força é aplicada no sentido do deslocamento:

$$\theta = 0^\circ \rightarrow \cos 0^\circ = 1 \rightarrow W = F \cdot \ell$$

2) A Força é aplicada no sentido contrário ao deslocamento:

$$\theta = 180^\circ \rightarrow \cos 180^\circ = -1 \rightarrow W = -F \cdot \ell$$

3) A força é aplicada numa direção diferente do deslocamento:

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \rightarrow W = F \cdot \ell \cdot \cos \theta$$

4) A força é aplicada numa direção perpendicular ao deslocamento:

$$\theta \equiv 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0 \rightarrow W = 0$$

Neste caso, nenhum trabalho é realizado sobre o objeto e este não se movimenta.

A unidade de trabalho é o Joule, representado pela letra J, e é igual ao produto de 1 Newton por 1 metro, logo: $1\text{J} = 1\text{N} \cdot 1\text{m}$.

1.3.3.2 Trabalho realizado por uma força variável

Uma força \vec{F} atua ao longo do movimento retilíneo de um objeto no eixo-x. A componente do deslocamento é Δx , e a componente da força é $F_x(x)$. A Figura 1.8 representa um gráfico típico de $F_x(x)$ em função de x .

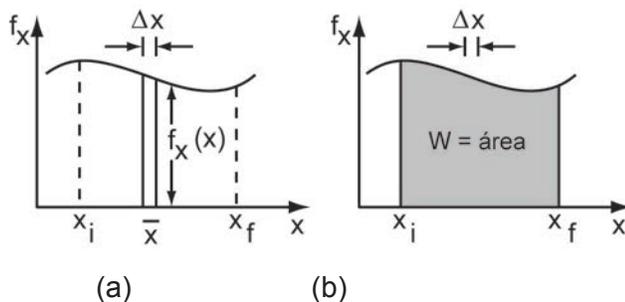


Figura 1.8 Gráficos típicos para uma força variável: em (a) para um pequeno deslocamento Δx ; em (b) para um deslocamento maior.

O trabalho realizado pela força variável para todo o deslocamento de x_i a x_f pode ser aproximado, somando-se o trabalho realizado em cada um, de um grande número de pequenos deslocamentos Δx , tomando-se cada subintervalo suficientemente pequeno para que a variação da força dentro de cada intervalo seja desprezível.

Aproxima-se o trabalho ΔW realizado pela força para o deslocamento $\Delta \ell = \Delta x_i$, calculando-se a componente $F_x(x)$ no ponto médio \bar{x} do subintervalo e escrevendo:

$$\Delta W \approx \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}_i = [F_x(\bar{x}) \hat{i}] \cdot (\Delta x_i \hat{i}) = F_x(\bar{x}) \Delta x$$

ΔW é igual à área da região retangular de altura $F_x(\bar{x})$ e base Δx . Somando-se as contribuições para cada deslocamento incremental Δx , para todo o deslocamento de x_i até x_f , obtém-se:

$$W \approx \sum F_x(\bar{x}) \Delta x$$

Seja N o número de subintervalos no intervalo $x_f - x_i$, com $N\Delta x = x_f - x_i$.

Aumentando N e diminuindo Δx correspondentemente, a precisão da aproximação para o trabalho ficará melhor, porque a força $F_x(x)$ varia ainda menos em um subintervalo Δx menor. No limite,

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum F_x(x) \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx$$

ou seja:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx \tag{1.11}$$

Se a força for constante,

$$W = F(x_f - x_i) \tag{1.12}$$

1.3.4 Teorema trabalho-energia

O trabalho total realizado pelas forças externas sobre um corpo está relacionado ao deslocamento do corpo. No entanto, o trabalho também pode ser relacionado à variação de velocidade do corpo. No exemplo mostrado na Figura 1.7, no primeiro

caso, a força resultante atua na mesma direção do deslocamento e, portanto, o corpo acelera e o trabalho é positivo. No segundo caso, a força é contrária ao movimento, pois o corpo está se movendo com velocidade constante e uma força é aplicada no sentido contrário. O corpo desacelera e o trabalho realizado pela força externa é negativo. Neste caso, a velocidade diminui. No terceiro caso, a força é aplicada em uma direção diferente da direção do deslocamento. Neste caso, se $0^\circ < \theta < 90^\circ$, o trabalho é positivo e se $90^\circ < \theta < 180^\circ$, o trabalho é negativo. Finalmente, no quarto caso, a força é perpendicular ao deslocamento, o trabalho realizado pela força é nulo e não há variação de velocidade do corpo. Conclui-se que quando o trabalho é positivo a velocidade do corpo aumenta e quando o trabalho é negativo a velocidade diminui.

Busca-se encontrar uma expressão que relaciona o trabalho realizado por uma força com a variação de velocidade do corpo. A força resultante está relacionada com a aceleração pela expressão:

$$F = Ma$$

A velocidade v do corpo está relacionada com a aceleração a e o espaço percorrido d pela expressão:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad \rightarrow a = (v_f^2 - v_i^2) / 2d$$

O trabalho realizado pela força aplicada no sentido do deslocamento é dado por:

$$W = F \cdot d = M \cdot a \cdot d = M (v_f^2 - v_i^2) / 2 \quad (1.13)$$

A energia cinética do corpo é definida como:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

Mostra-se que a Equação 1.13 é válida para qualquer direção entre a força e o deslocamento e define-se o teorema trabalho-energia como o trabalho realizado pela força resultante que atua sobre um objeto é igual à variação da energia cinética do objeto.

$$W_{\text{res.}} = \Delta K = K_f - K_i \quad (1.14)$$

K aumenta se $W > 0$, K diminui se $W < 0$ e $K = \text{constante}$ se $W_{\text{res.}} = 0$.

1.3.5 Conservação da quantidade de movimento

1.3.5.1 O centro de massa

A Figura 1.9 mostra um sistema com duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância d .

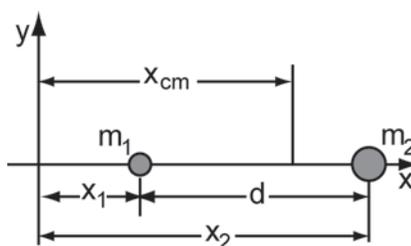


Figura 1.9 Sistema de coordenadas com duas partículas separadas por uma distância d .

A posição do centro de massa fica:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (1.15)$$

Sendo $M = m_1 + m_2$ a massa do sistema, a Equação 1.15 fica:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \quad (1.16)$$

A Equação 1.16 pode ser estendida para um sistema de n partículas, dispostas ao longo do eixo x . E o centro de massa fica localizado em:

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (1.17)$$

Se as partículas estiverem distribuídas em três dimensões, o centro de massa será identificado por três coordenadas:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i; \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i; \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (1.18)$$

Usando a linguagem vetorial, o vetor posição é:

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \quad (1.19)$$

A posição do centro de massa de um sistema de partículas é dada pelo vetor posição:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm} \hat{i} + y_{cm} \hat{j} + z_{cm} \hat{k} \quad (1.20)$$

As três equações escalares podem ser substituídas por uma equação vetorial:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (1.21)$$

1.3.5.2 Quantidade de movimento linear

A quantidade de movimento linear de uma partícula é definida como o produto da sua massa pelo seu vetor velocidade:

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (1.22)$$

Newton expressou sua Segunda lei do movimento em termos da quantidade de movimento:

A taxa de variação com o tempo, da quantidade de movimento linear de uma partícula, é igual à força resultante que atua sobre a partícula e possui a mesma direção e o mesmo sentido desta força. Então,

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.23)$$

logo,

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Assim, as relações:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ e } \vec{F}_{\text{res}} = M\vec{a}$$

são expressões equivalentes da Segunda Lei de Newton para uma partícula.

1.3.5.3 Quantidade de movimento linear para um sistema de partículas

Para um *sistema de partículas*, cada uma com sua massa m_i , *velocidade* \vec{v}_i e *quantidade de movimento linear* \vec{p}_i , em que as partículas podem interagir umas com as outras assim como as forças externas podem agir sobre elas, a *quantidade de movimento linear total* \vec{P} é definida como a *soma vetorial das quantidades de movimento lineares* das partículas individuais:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots + m_n\vec{v}_n \quad (1.24)$$

Logo, em relação ao cm,

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{cm}} \quad (1.25)$$

A quantidade de movimento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema M , pela velocidade do centro de massa.

Analogamente,

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\text{cm}}) = M\vec{a}_{\text{cm}} \quad (1.26)$$

1.3.5.4 Conservação da quantidade de movimento linear

Quando a força resultante que atua sobre um sistema de partículas é nula (sistema isolado) e não há partículas saindo ou entrando no sistema (sistema fechado), então:

$\vec{F}_{\text{res}} = 0$ e, portanto,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad (1.27)$$

que leva à conservação de \vec{P} .

Se a força externa resultante que atua sobre um sistema de partículas for nula, a quantidade de movimento linear total sobre o sistema se conserva.

1.3.5.5 Quantidade de movimento linear e energia cinética em colisões

- Colisão elástica – a energia cinética total do sistema de corpos que se chocam se conserva.
- Colisão inelástica – a energia cinética total do sistema de corpos que se chocam não se conserva.
- Colisão completamente inelástica – após o choque os corpos não se separam.

Independentemente dos detalhes das impulsões em uma colisão e do que acontece com a energia cinética total do sistema, a quantidade de movimento linear total \vec{P} de um sistema fechado e isolado *não pode mudar*. A razão é que \vec{P} só pode ser alterado por forças externas (de fora do sistema), mas na colisão as forças são internas (de dentro do sistema). Assim:

Em um sistema *isolado* (não há forças externas resultantes atuando sobre os corpos dentro do sistema) e *fechado* (não há massas entrando e nem saindo dele), contendo uma colisão, a quantidade de movimento linear total \vec{P} do sistema não pode variar, seja a colisão *elástica* ou *inelástica*.

1.3.6 Gravidade e energia potencial gravitacional

1.3.6.1 Atração gravitacional

A gravidade é a mais fraca das forças fundamentais do Universo. A atração gravitacional de corpos macroscópicos entre duas pessoas, por exemplo, é muito pequena para ser percebida.

Entre corpos muito grandes, como estrelas, planetas, satélites, a gravidade tem uma grande importância.

É a gravidade que nos mantém sobre o solo, além de manter a Terra e os outros planetas nas suas respectivas órbitas do sistema solar. A força gravitacional tem um papel importante na história das estrelas, no comportamento das galáxias, e no controle da evolução do Universo.

O homem sempre esteve fascinado pelo movimento dos corpos celestes e das possíveis consequências destes movimentos para a vida na Terra.

Com os dados observados pelo astrônomo Tycho Brahe, Johannes Kepler descobriu empiricamente que as trajetórias dos planetas em torno do Sol eram elípticas.

Foi Isaac Newton quem mostrou os fundamentos de uma teoria da gravitação que comprovava as previsões de Kepler e as observações de Brahe. Mas foi muito mais além ao analisar a interação entre duas massas quaisquer. Quando um corpo de massa m_1 está a uma distância r de outro corpo de massa m_2 , a força de atração entre eles está dirigida ao longo da reta que une os corpos e tem a forma:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.28)$$

com $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$

Para o caso do corpo a uma altura h da superfície da Terra, essa força de atração (conforme a Equação 1.28) terá a forma:

$$F(R_T + h) = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \quad (1.29)$$

E o denominador poderá ser escrito como:

$$\frac{1}{(R_T + h)^2} = R_T^{-2} \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} \quad (1.30)$$

Quando a altura do corpo de massa m for pequena em relação ao raio da Terra, pode-se aproximar o termo em parênteses por uma expansão em séries de potências, ou seja:

$$\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} \approx 1 - 2\left(\frac{h}{R_T}\right) + \dots \quad (1.31)$$

Assim, substituindo a Equação 1.30 e a Equação 1.31 na Equação 1.29, tem-se:

$$F(R_T + h) = mg \left[1 - 2\left(\frac{h}{R_T}\right)\right] \quad (1.32)$$

Se a altura h for muito menor que R_T , essas correções podem ser desprezadas, e considera-se a aproximação trivial:

$$F(R_T + h) = mg \quad (1.33)$$

Na superfície da Terra a força de atração entre os corpos tem a forma:

$$F(R_T) = G \frac{M_T m}{R_T^2} \quad (1.34)$$

Definindo-se a aceleração da gravidade g como:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} \quad (1.35)$$

A Equação 1.29 torna-se:

$$F(R_T) = mg$$

Então, pode-se definir o peso do corpo como uma força constante e independente da altura, da seguinte maneira:

$$P = mg \tag{1.36}$$

1.3.6.2 Energia potencial gravitacional

Quando soltamos um objeto em repouso, do alto de um edifício, ele atinge o solo com velocidade relativamente elevada, possuindo grande energia cinética. De onde vem essa energia? Isso acontece porque a força gravitacional exerce um trabalho sobre o objeto durante a sua queda e, como vimos na seção 1.3.4, o trabalho realizado pela força resultante que atua sobre um corpo é igual à variação de energia cinética. O trabalho realizado pela resultante pode ser estudado de uma forma diferente daquela da seção 1.3.3. Para isso vamos inserir o conceito de energia potencial, que é a energia associada à posição do objeto.

Suponhamos um objeto de massa m nas proximidades da superfície da Terra. O seu peso é dado por $P = mg$. Agora, calculemos o trabalho realizado por um agente para deslocar este objeto com velocidade constante desde uma altura y_1 até uma altura y_2 ($y_2 > y_1$). Para deslocar o objeto com velocidade constante é necessário que a soma das forças que atuam sobre ele seja igual a zero, portanto, o agente deve aplicar uma força igual em módulo à força peso, porém com sentido contrário a esta. A força F tem o mesmo sentido do deslocamento e o trabalho realizado pela força peso é igual a:

$$W_{12} = \int_{y_1}^{y_2} F_x(y) dy = \int_{y_1}^{y_2} mg dy = mg(y_2 - y_1)$$

A grandeza mgy recebe o nome de energia potencial gravitacional e é representada pela letra U :

$$U = mgy$$

O seu valor inicial é $U_1 = mgy_1$ e o valor final é $U_2 = mgy_2$. A variação de energia potencial é definida como o seu valor final menos o inicial. Então:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mgy_2 - mgy_1$$

O trabalho realizado pelo agente que deslocou o objeto é igual à variação da sua energia potencial. Note que foi usado uma força igual à força peso mg , porém de sentido contrário, para deslocá-lo e calcular a sua energia potencial. Desse modo, o trabalho realizado pela força peso ao deslocar um objeto entre dois pontos pode ser definido como sendo igual a $-\Delta U = U_1 - U_2$.

Como o trabalho realizado por uma força sobre um objeto é igual à variação de sua energia cinética, podemos igualar o trabalho realizado pela força peso sobre um objeto que cai com a sua variação de energia cinética:

$$W_{12} = U_1 - U_2 = mgy_1 - mgy_2 = m(v_f^2 - v_i^2) / 2$$

Normalmente, define-se a referência para a energia potencial como sendo $U = 0$ em $y = 0$ (no solo). Qualquer posição do objeto acima do solo tem energia potencial positiva.

1.3.7 Corpos rígidos, rotação e momento angular

1.3.7.1 Translação e rotação de um objeto rígido

Translação

Um objeto rígido sofre um movimento de *translação* quando cada partícula do objeto tem o mesmo deslocamento no mesmo intervalo de tempo.

Rotação

Um objeto rígido sofre um movimento de *rotação* quando cada partícula do mesmo descreve um círculo (com exceção das partículas que estão sobre o eixo de rotação). O eixo de rotação é uma reta que passa pelos centros dos círculos descritos pelo movimento das partículas.

Um exemplo de movimento combinado de translação e de rotação é o movimento da roda de um carro em relação a um referencial fixo à Terra. Para este referencial, o eixo de rotação da roda (ao longo do próprio eixo da roda) executa um movimento de translação ao longo da estrada.

Se a estrada é retilínea, a orientação do eixo da roda permanece fixa em relação a este referencial.

O movimento circular ou quase circular é comum na natureza e em aparelhos mecânicos.

Um objeto que se move em um círculo está em aceleração, mesmo que sua velocidade (em módulo) seja constante.

Há uma aceleração durante o movimento circular uniforme porque o vetor velocidade está continuamente mudando sua direção.

Se a velocidade v de um objeto é constante e o vetor \vec{v} muda constantemente de direção, o movimento é circular uniforme. Nesse movimento, o vetor aceleração \vec{a} aponta para o centro do círculo e seu módulo é

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (1.37)$$

Em que r é o raio do círculo. Essa é a aceleração centrípeta.

Pela Segunda Lei de Newton, um objeto em movimento circular uniforme deve ter uma força exercida sobre ele, dirigida para o centro do círculo. Como

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

E \vec{a} aponta para o centro do círculo com módulo

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{r}$$

$\sum \vec{F}$ deve também apontar para o centro do círculo e,

$$\left| \sum \vec{F} \right| = \frac{mv^2}{r} = \vec{F}_c \quad (1.38)$$

Essa força resultante é a força centrípeta.

1.3.7.2 Medida angular

$$s = r\theta \quad (1.39)$$

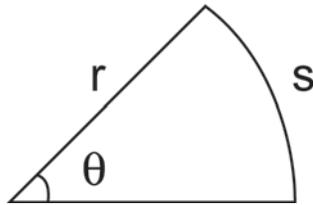


Figura 1.10 Relação entre o deslocamento linear s e o deslocamento angular θ.

1.3.7.3 Velocidade vetorial angular

A velocidade escalar angular é:

$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.40)$$

Mas: $|\vec{\omega}| = \omega_z$

E a velocidade vetorial angular fica:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \quad (1.41)$$

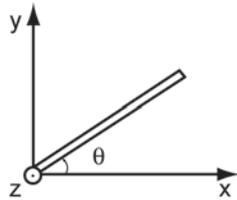


Figura 1.11 Representação da velocidade vetorial angular (vetor saindo do plano da página, no sentido e direção do eixo z).

1.3.7.4 Aceleração angular

Para uma melhor compreensão do que seria uma aceleração angular, utilizaremos como exemplo um carrossel. Imediatamente após ligar (ou desligar) um carrossel, a velocidade vetorial angular da plataforma varia.

A aceleração angular da plataforma é igual à taxa de variação de sua velocidade vetorial angular.

A componente α_z da aceleração angular é igual à taxa de variação da componente da velocidade vetorial angular em relação ao tempo.

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1.42)$$

Assim, α_z é *positivo* quando ω_z é crescente; é igual a zero quando ω_z é constante; e é *negativo* quando ω_z é decrescente. O módulo da aceleração angular é $|\vec{\alpha}| = \alpha_z$.

A aceleração angular $\vec{\alpha}$ é um vetor cuja direção é definida pela regra da mão direita, que consiste em posicionar a mão direita com o polegar ao longo do eixo de rotação e os dedos dobrados ao seu redor, com as pontas dos dedos direcionadas no sentido da rotação; o polegar distendido apontará na direção positiva de $\vec{\alpha}$. Então, $\vec{\alpha} = \alpha_z \mathbf{k}$.

$\vec{\alpha}$ tem a mesma direção ao longo do eixo que $\vec{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$ quando ω_z é crescente; e direção oposta a $\vec{\omega}$ quando ω_z é decrescente.

$$[\vec{\alpha}] = T^{-2} \text{ e } (\vec{\alpha})_{SI} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

1.3.7.5 Cinemática

1.3.7.5.1 Velocidade vetorial angular constante

Seja um prato giratório, com uma velocidade vetorial constante

$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.43)$$

Integrando de um instante inicial $t = 0$ a um instante final t ,

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega_z dt, \quad \omega_z = \text{cte}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_z t \quad (1.44)$$

1.3.7.5.2 Aceleração angular constante

Seja uma porta giratória, com aceleração angular constante,

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} \quad (1.45)$$

Integrando de um tempo inicial $t = 0$ a um tempo final t ,

$$\omega_z = \omega_{z0} + \int_0^t \alpha_z dt, \quad \alpha_z = \text{cte}$$

$$\omega_z(t) = \omega_{z0} + \alpha_z t \quad (1.46)$$

Substituindo na Equação 1.33, obtêm-se

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_z = \omega_{z0} + \alpha_z t$$

Integrando de um tempo inicial $t = 0$, até um tempo final t ,

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t (\omega_{z0} + \alpha_z t) dt$$

Então:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_{z0} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2 \quad (1.47)$$

Eliminando o tempo entre as Equações 1.46 e 1.47,

$$\omega_z^2 = \omega_{z0}^2 + 2\alpha_z (\theta - \theta_0) \quad (1.48)$$

1.3.7.5.3 Analogia entre translação e rotação

| TRANSLAÇÃO (uma dimensão) | ROTAÇÃO (eixo fixo) |
|--|---|
| Velocidade linear constante | Velocidade angular constante |
| $x = x_0 + v_x t$ | $\theta = \theta_0 + \omega_z t$ (1.49) |
| Aceleração linear constante | Aceleração angular constante |
| $v_x = v_{x0} + a_x t$ | $\omega_z = \omega_{z0} + \alpha_z t$ (1.50) |
| $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ | $\theta = \theta_0 + \omega_{z0} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2$ (1.51) |
| $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x (x - x_0)$ | $\omega_z^2 = \omega_{z0}^2 + 2\alpha_z (\theta - \theta_0)$ (1.52) |

1.3.7.5.4 Relações entre grandezas rotacionais e translacionais

Uma partícula P percorre um círculo de raio R e pode ser localizada, em relação ao eixo x, pela coordenada de arco S, medida ao longo do arco. A convenção de sinal para S é a mesma que para θ (positivo no sentido anti-horário).

A componente tangencial vetorial da partícula P define-se como:

$$\vec{v}_t = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (1.53)$$

Assim v_t tem o mesmo sinal algébrico de ω_z .

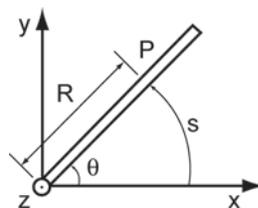


Figura 1.12 Relações entre a grandeza rotacional θ e a grandeza translacional s.

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \text{ ou } v_t = R\omega_z$$

Como a partícula P descreve um círculo, sua velocidade vetorial \vec{v} só tem componente tangencial e sua velocidade v é:

$$v = |\vec{v}| = v_t = R|\dot{\omega}_z| \text{ ou } v = R\omega \quad (1.54)$$

Para uma dada velocidade angular ω , a velocidade linear de uma partícula é diretamente proporcional a sua distância R do eixo de rotação.

A aceleração linear \vec{a} resolve-se em componentes tangencial a_t e radial a_r .

A componente tangencial a_t da aceleração linear \vec{a} de uma partícula percorrendo uma trajetória circular define-se como a derivada, em relação ao tempo, de componente tangencial da velocidade vetorial linear:

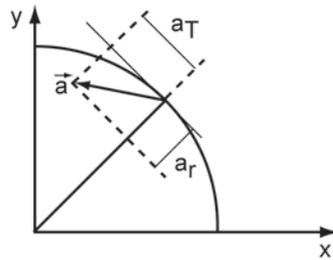


Figura 1.13 Componentes da aceleração vetorial linear.

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d(R\omega_z)}{dt} = R \frac{d\omega_z}{dt}$$

Como $\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt}$ vem:

$$a_t = R\alpha_z \quad (1.55)$$

Usando conhecimentos anteriores:

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

Substituindo a Equação 1.44,

$$a_r = R\omega^2 \quad (1.56)$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = R \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (1.57)$$

1.3.7.5.5 Energia cinética rotacional: momento de inércia

Quando uma roda gira, há energia cinética associada à rotação. A roda é constituída de muitas partículas, e a energia cinética de uma partícula i de massa m_i que possui velocidade v_i é:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (1.58)$$

A energia cinética K de toda a roda é a soma das energias cinéticas de todas as n partículas que a compõem:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \omega^2 m_i R_i^2 \quad (1.59)$$

As partículas possuem velocidades lineares \vec{v}_i diferentes, mas roda é rígida, cada partícula tem a mesma velocidade angular $\vec{\omega}$. A Equação 1.58 pode ser escrita,

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right) \quad (1.60)$$

Por definição, chama-se Momento de Inércia I , (ou Momento Rotacional):

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \quad (1.61)$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1.62)$$

O momento de inércia de um objeto em relação a um eixo é a propriedade do objeto que o faz resistir a uma variação em sua velocidade vetorial angular em relação àquele eixo.

1.3.7.5.6 Momento de inércia de um objeto contínuo

Ao lembrar que a roda usada como exemplo para definir o momento de inércia possui um número n muito grande de partículas, o cálculo da Equação 1.59 pode ser muito complicado para esta roda, ou qualquer outro objeto contínuo.

Considerando cada partícula com uma massa

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$$

Em que:

ρ_i é a densidade de massa do material

ΔV_i é o pequeno volume ocupado pela partícula

Então, o *momento de inércia* fica:

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i R_i^2$$

Quando o volume ΔV_i tende para um dV infinitamente pequeno, a soma se transforma em uma integral:

$$I = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i R_i^2 = \int_V \rho R^2 dV \quad (1.63)$$

Este é o *momento de inércia* de um objeto contínuo. A integração é feita sobre todo o seu volume V .

1.3.7.5.7 Teorema dos eixos paralelos

Este teorema relaciona o momento de inércia I_P em relação a um eixo que passa por um ponto P arbitrário com o momento de inércia I_{CM} em relação a um eixo paralelo, que passa pelo centro de massa do objeto. Sendo M a massa do objeto e d a distância entre os dois eixos, vale:

$$I_P = I_{CM} + Md^2 \quad (1.64)$$

1.3.7.5.8 Objetos em rolamento

Quando um objeto rola sem deslizar, há uma relação simples entre a velocidade linear \vec{v} do seu centro de massa e a velocidade rotacional $\vec{\omega}$ em torno de um eixo passando pelo seu centro de massa.

Seja uma roda de raio R , rolando no instante t_i e depois no instante t_f . A distância Δx percorrida pelo centro da roda em um intervalo de tempo Δt é igual à distância Δs percorrida pelo ponto de contato ao longo da beira da roda: $\Delta x = \Delta s$.

Se \vec{v} é a velocidade linear do centro da roda e $\vec{\omega}$ é a velocidade angular em relação ao eixo de rotação, então:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = R\omega \quad \text{ou} \quad v = R\omega \quad (1.65)$$

1.3.7.5.9 Energia cinética de um objeto em rolamento

Um objeto em rolamento, em um instante t arbitrário, gira em torno de um eixo paralelo ao seu eixo de rotação, que passa por um ponto P de contato que está instantaneamente em repouso. Logo, P define o *eixo de rotação instantâneo* do objeto. As velocidades vetoriais são dirigidas perpendicularmente a uma reta emanando de P e possuem módulos proporcionais aos comprimentos dessas retas.

A velocidade vetorial no topo do objeto é $2\vec{v}$, a velocidade vetorial do centro C é \vec{v} .

A velocidade angular $\vec{\omega}_P$, em relação a um eixo por P , é igual à velocidade angular $\vec{\omega}_C$ em relação a um eixo por C , porque a velocidade de C em relação a P é $\vec{\omega}_P R$ e a velocidade de P em relação a C é $\vec{\omega}_C R$. Assim, $\vec{\omega}_P R = \vec{\omega}_C R$
 $\therefore \vec{\omega}_P = \vec{\omega}_C = \vec{\omega}$

A energia cinética do objeto é:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad (1.66)$$

Se a distribuição de massa do objeto for simétrica em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa, o teorema dos eixos paralelos dá:

$$K = \frac{1}{2} (I_{CM} + Md^2) \omega^2, \quad \text{com } d = R$$

O objeto rola sem deslizar, logo: $v = \omega R$ ou $\omega = \frac{v}{R}$

Então,

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \quad (1.67)$$

A energia cinética de um objeto rolante é a soma de um termo correspondente à rotação em torno do centro de massa com outro termo correspondente à translação do centro de massa.

1.3.7.5.10 Momento angular

O momento angular (ou quantidade de movimento angular) de uma partícula de massa M é o análogo rotacional do momento linear (ou quantidade de movimento linear $\vec{p} = m\vec{v}$), e é definido como o produto vetorial de \vec{r} por \vec{p} .

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.68)$$

O momento angular de uma partícula e o torque associado à força resultante que atua sobre esta partícula estão relacionados. Derivando, em relação ao tempo, a Equação 1.58, tem-se:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \quad (1.69)$$

Como $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{res}$, a Equação 1.69 torna-se:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{res} \text{ e, portanto } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad (1.70)$$

1.3.7.5.11 Momento angular de um sistema de partículas

Considerando um sistema de N partículas, o momento angular total é:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_N = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i \quad (1.71)$$

Calculando a derivada, em relação ao tempo, da Equação 1.71:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{L}_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} \quad (1.72)$$

Mas a variação do momento angular da i -ésima partícula pode ser escrita como:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = m\vec{v}_i \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (1.73)$$

Com,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{INT}} + \vec{F}_i^{\text{EXT}} \quad (1.74)$$

Assim, temos:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{INT}} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{EXT}} = \vec{\tau}_i^{\text{INT}} + \vec{\tau}_i^{\text{EXT}} \quad (1.75)$$

Desse modo, podemos escrever a Equação 1.72 da seguinte forma:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^{\text{INT}} + \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^{\text{EXT}} = \vec{\tau}^{\text{INT}} + \vec{\tau}^{\text{EXT}} \quad (1.76)$$

Mostraremos que o torque interno é nulo, pois as forças surgem aos pares como interação entre os pares de partículas, ou seja:

$$\vec{F}_i^{\text{INT}} = \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \quad (1.77)$$

Mas,

$$\vec{\tau}^{\text{INT}} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^{\text{INT}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \sum_{i < j} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}) \quad (1.78)$$

Usando a Terceira Lei de Newton, temos que $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, logo:

$$\vec{\tau}^{\text{INT}} = \sum_{i < j} [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}] \quad (1.79)$$

Em que $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ é um vetor contido na reta que une as partículas i e j , e essa reta também contém a força \vec{f}_{ij} . Portanto, o produto vetorial entre eles é *nulo*, pois os vetores são paralelos. Desse modo:

$$\vec{\tau}^{\text{INT}} = 0 \text{ e } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\text{EXT}} \quad (1.80)$$

1.3.7.5.12 Conservação do momento angular

Considerando um sistema de N partículas, a variação do momento angular total é igual ao torque externo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\text{EXT}} \quad (1.81)$$

Se esse sistema estiver isolado, e o torque externo for nulo, o momento angular total será constante.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{constante} \quad (1.82)$$

Esse resultado é o análogo rotacional da conservação do momento linear total.

1.4 Considerações finais

Esta unidade deu uma visão geral da Mecânica Newtoniana, descrevendo de maneira rápida os conceitos sobre cinemática, Leis de Newton, Trabalho e Energia, Gravitação e Rotação.

UNIDADE 2

Mecânica Ondulatória

2.1 Primeiras palavras

Nesta unidade serão apresentadas as noções da Mecânica Ondulatória.

2.2 Problematizando o tema

Quando um sistema que se encontra em posição de equilíbrio é perturbado, ocorrem os fenômenos ondulatórios que serão estudados a seguir.

2.3 Oscilações simples e acopladas

2.3.1 Introdução

As oscilações e as ondas são fenômenos de fundamental importância na física. As oscilações correspondem a vibrações localizadas, ao passo que as ondas estão associadas à propagação.

Oscilações são encontradas em todos os campos da física, desde a física clássica até a mecânica quântica. Exemplos de sistemas mecânicos vibratórios incluem pêndulos, diapasões, cordas de instrumentos musicais e etc. A corrente elétrica alternada também é oscilatória. Em outros sistemas dinâmicos de naturezas diversas, sejam químicos, biológicos, ecológicos ou econômicos, as oscilações podem ocorrer dependendo de certas condições.

2.3.2 Movimento harmônico simples

Suponha que um objeto de massa M é preso a uma mola que é esticada e comprimida. A mola exerce uma força sobre o objeto. Essa força é proporcional ao deslocamento da mola a partir de sua posição de equilíbrio, e é no sentido oposto ao deslocamento:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad (2.1)$$

Essa fórmula para a força é chamada *Lei de Hooke*. As molas reais obedecem esta lei para pequenos deslocamentos. Na Figura 2.1 pode-se observar o sistema composto por uma massa e uma mola, em que no caso (a) o sistema

está em equilíbrio estável, em (b) a mola está estendida e em (c) a mola está comprimida.

Suponha que a mola seja estendida por uma distância d e seja liberada. O objeto preso à mola acelera com aceleração

$$\vec{a} = -\left(\frac{k}{m}\right)\vec{x} \quad (2.2)$$

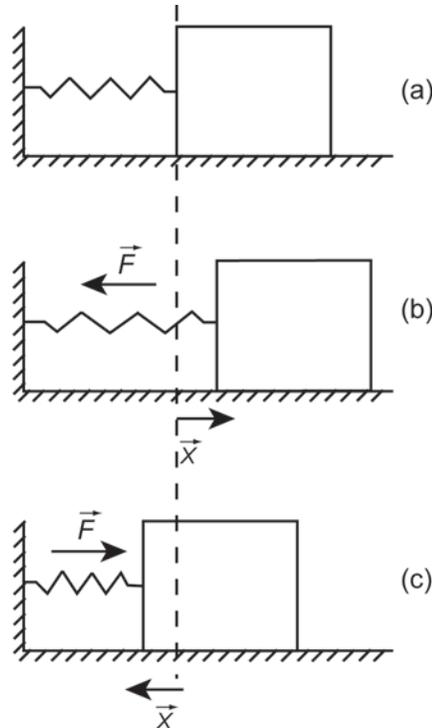


Figura 2.1 Sistema massa-mola: (a) sistema em equilíbrio estável, (b) mola esticada e (c) mola comprimida.

O objeto ganha velocidade à medida que se move para a posição de equilíbrio, já que a aceleração é na direção de sua velocidade. Quando a mola está na posição de equilíbrio, a aceleração é zero, mas o objeto possui energia cinética. Ele passa da posição de equilíbrio e começa a desacelerar, já que a aceleração é no sentido oposto ao sentido da velocidade. Desprezando o atrito, ele parará quando a mola estiver comprimida por uma distância d e então se acelerará de volta para a posição de equilíbrio. A mola novamente passa pela posição de equilíbrio e para na posição inicial quando a mola está estendida por uma distância d . O movimento se repete. O objeto oscila de um lado para outro. Ele executa um *movimento harmônico simples*.

Apenas serão considerados movimentos em uma dimensão. A Equação 2.2 deve ser resolvida para a posição em função do tempo, $x(t)$. Nota-se que a aceleração é a derivada temporal da velocidade, de modo que se pode escrever $a = dv/dt$, e como $v = dx/dt$, temos que a aceleração é a derivada segunda da posição: $a = d^2x/dt^2$. Logo, pode-se escrever a Equação 1.2 como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t) \text{ ou } \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x(t) \quad (2.3)$$

$$\text{Em que: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como x é função do tempo, temos que encontrar uma função cuja derivada da derivada seja proporcional à própria função. Conhecem-se duas funções que satisfazem esse critério: a função *seno* e a função *cosseno*. A combinação dessas duas funções também serve, e deve ser a forma mais geral da solução procurada. Logo,

$$X(t) = [A \text{ sen}(\omega t) + B \text{ cos}(\omega t)] \quad (2.4)$$

é uma solução da Equação 1.3. Note que as constantes A e B devem depender das condições iniciais do problema. No caso do problema da mola explicada anteriormente, no tempo inicial, quando $t = 0$, $x(t=0) = d$ e $v(t=0) = 0$. Da segunda condição, temos que $B = 0$, já que $v(t) = \omega[-A \text{ sen}(\omega t) + B \text{ cos}(\omega t)]$. A primeira condição determina que $A = d$. Logo, a solução do problema do objeto preso à mola é dada por

$$x(t) = d \text{ cos}\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (2.5)$$

Em que se define T como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (2.6)$$

A Equação 2.5 mostra que as condições de movimento se repetirão para valores de $t = T, 2T, 3T$ e etc. Logo, T é conhecido como *período* do movimento.

A *amplitude* da oscilação é dada por d . Esse é o valor máximo do deslocamento a partir da posição de equilíbrio.

O período T é independente da amplitude. Não importa quanto a mola seja esticada inicialmente, o movimento possuirá o mesmo período. A *frequência* do movimento dá o número completo de oscilações por unidade de tempo. Ela é medida em unidades de Hertz, ($1\text{Hz} = 1/\text{s}$). A frequência:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.7)$$

é a *frequência natural de ressonância* do sistema. Também pode-se definir a *frequência angular* ω que engloba o fator 2π da relação anterior: $\omega = 2\pi f$.

A velocidade do objeto em função do tempo é dada por

$$v = v_{m/\sqrt{k}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = v_{m/\sqrt{k}} \sin(\omega t) \quad (2.8)$$

$$\text{Em que } v_{m/\sqrt{k}} = 2\pi d / T = 2\pi df = \omega d$$

Desse modo, analisando o comportamento da velocidade de um oscilador harmônico simples (Equação 2.8) e o deslocamento exibido por ele (Equação 2.5), nota-se que a velocidade é máxima quando o deslocamento é zero e o deslocamento é máximo quando a velocidade é zero, mostrando que a velocidade e o deslocamento estão *fora de fase*.

2.3.3 Movimento harmônico amortecido

Nos movimentos oscilatórios reais há dissipação de energia mecânica por causa da ação de forças de atrito. Por exemplo, uma mola, ou um pêndulo simples acabam por deixar de oscilar sem interferência propositada.

Quando a energia mecânica de um movimento oscilatório diminui com o tempo, o movimento é *amortecido*. Se as forças de atrito ou de amortecimento forem pequenas, o movimento é quase periódico, mas a amplitude diminui lentamente com o tempo.

Para o movimento amortecido, o corpo está sujeito a mais uma força, a força de atrito F_a , além da força restauradora elástica, $F = -kx$. A força de atrito tem sentido contrário ao movimento, e seu valor aumenta quando a velocidade do movimento também aumenta. A representação mais simples e mais comum

dessa força é ela ser proporcional à velocidade do corpo e ter sentido oposto à velocidade:

$$\vec{F}_a = -\lambda \vec{v} \quad (2.9)$$

Em que: λ é a constante de proporcionalidade, denominada *constante de atrito*. O sinal negativo indica que a força de atrito tem sentido oposto da velocidade

Desse modo, usando a Segunda Lei de Newton, pode-se escrever a força resultante deste sistema massa-mola, com a presença da força de atrito como:

$$-\lambda \vec{v} - k\vec{x} = m\vec{a} \quad (2.10)$$

Novamente serão considerados apenas movimentos em uma dimensão. A Equação 2.10 deve ser resolvida para a posição em função do tempo, $x(t)$. Logo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.11)$$

Dividindo pela massa m , temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Podendo reescrever os termos dessa equação diferencial como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.12)$$

Sendo $\gamma = \lambda/2m$ chamada de constante de amortecimento e $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ a frequência angular do movimento harmônico sem amortecimento.

2.3.4 Movimento harmônico amortecido forçado

Se além da força elástica ($F = -kx$) e da força de atrito ($F = -\lambda v$), o sistema massa-mola estiver sujeito a mais uma força externa com a forma $F = F_0 \cos(\omega_f t)$, sendo ω_f a sua frequência angular, a equação diferencial resultante da Segunda Lei de Newton, pode ser escrita como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega_f t) \quad (2.13)$$

Pode-se ver que essa equação diferencial é semelhante àquela equação do movimento amortecido (Equação 2.11). A diferença é, para as oscilações amortecidas forçadas, o segundo membro não é zero. Dividindo a equação anterior pela massa do sistema, tem-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t) \quad (2.14)$$

Em que $\gamma = \lambda/2m$ é a constante de amortecimento e $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ a frequência angular do movimento harmônico sem amortecimento.

Essa equação pode ser resolvida matematicamente, mas em vez disso, pode-se tentar imaginar uma solução física. Como a partícula está sujeita a uma força exterior com a frequência ω_0 , é lógico pensar que a partícula será forçada a oscilar com a frequência angular ω_0 da força aplicada. Assim, a tentativa de solução é:

$$x(t) = A \sin(\omega_f t - \alpha) \quad (2.15)$$

Em que, por conveniência, foi dado um sinal negativo à fase inicial α .

Para ver se esta solução é correta ou não, basta fazer uma substituição na equação diferencial (Equação 2.15). Depois de fazer essa substituição, pode-se ver que se

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \quad (2.16)$$

e

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f} \quad (2.17)$$

assumem tais valores, a Equação 2.17 é uma solução da equação diferencial. Isso significa que esta é uma solução “particular” e não “geral” da equação diferencial.

A solução geral daquela equação diferencial pode-se obter matematicamente com a seguinte fórmula:

$$x(t) = A_1 \exp[-\gamma t] \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) + A \operatorname{sen}(\omega_f t - \alpha) \quad (2.18)$$

A solução tem duas partes, a primeira é uma oscilação amortecida e chama-se *solução transitória*. As constantes nesta parte da solução (A_1 e α_1) dependem das condições iniciais. Depois de algum tempo, a solução transitória torna-se desprezível e predomina a segunda parte da equação, que se chama *solução de estado permanente*. Essa parte da solução não depende das condições iniciais.

Pode-se ver que a equação do movimento de oscilações forçadas indica que tais oscilações não são amortecidas, mas possuem amplitude constante e frequência igual à da força aplicada. Isso significa que a força aplicada compensa as forças amortecedoras e fornece a energia necessária para manter a oscilação.

2.3.4.1 Efeitos de ressonância

No limite de amortecimento fraco ($\gamma = \gamma'$) espera-se que, nas vizinhanças de $\omega_0 \approx \omega_f$, a amplitude do oscilador harmônico amortecido forçado seja máxima e apresente uma fase que se altere rapidamente. A este dramático aumento na amplitude nas proximidades da frequência natural do oscilador dá-se o nome de ressonância. Por este motivo ω_0 é também chamado de frequência de ressonância do sistema.

A razão desse aumento da amplitude de oscilação na frequência de ressonância é que a energia está sendo transferida para o sistema sob condições mais favoráveis.

2.3.5 Osciladores harmônicos acoplados

Com relativa frequência nos deparamos com sistemas físicos que possam ser representados pela associação de dois ou mais osciladores que interagem

de modo fraco. A dinâmica desse sistema é ao mesmo tempo interessante e complexa. Alguns resultados essenciais para a dinâmica de osciladores harmônicos acoplados podem ser obtidos considerando-se dois osciladores livres idênticos acoplados mutuamente. A dinâmica desse sistema é dada pelas seguintes equações:

$$\frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 + \kappa^2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 + \kappa^2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (2.20)$$

Em que os dois osciladores são denominados 1 e 2, respectivamente, e κ^2 é a medida da intensidade do acoplamento entre os osciladores. A condição de acoplamento fraco é encontrada quando $\kappa < \omega_0$.

A Figura 2.2 apresenta uma visualização simples do ponto de vista mecânico do conjunto de dois osciladores acoplados, representados por dois sistemas massa-mola, levando-se em conta o amortecimento, sendo mutuamente acoplados pela presença de uma terceira mola, que interliga tais osciladores.

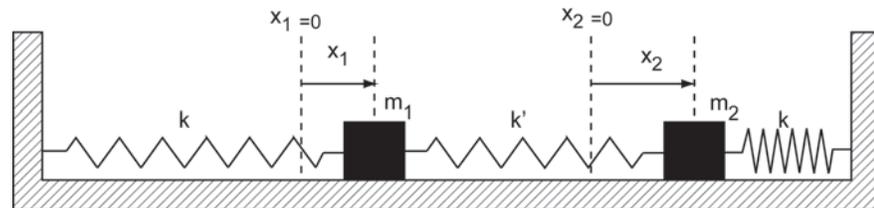


Figura 2.2 Osciladores acoplados.

As soluções para o conjunto de equações diferenciais ordinárias apresentadas pelas Equações 2.23 e 2.24 podem ser obtidas aplicando-se técnicas para solução de equações diferenciais ordinárias lineares, sendo dadas por:

$$x_1(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \delta_2) \quad (2.21)$$

$$x_2(t) = -A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \delta_2) \quad (2.22)$$

Essas soluções são dependentes das frequências ω_1 e ω_2 , que são dadas por $\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\kappa^2$ e $\omega_2^2 = \omega_0^2$. Essas frequências podem ser escritas de modo

mais simétrico, como $\omega_1^2 = \omega_c^2 + \kappa^2$ e $\omega_2^2 = \omega_c^2 - \kappa^2$, com a introdução da frequência $\omega_c^2 = \omega_0^2 + \kappa^2$. Tal frequência (ω_c) representa a frequência de qualquer um dos dois osciladores harmônicos, quando o outro oscilador é mantido fixo. As constantes A_1 , A_2 , δ_1 e δ_2 são obtidas pelos valores iniciais das variáveis $x_1(0)$ e $x_2(0)$ e por suas derivadas temporais.

2.4 Introdução aos fenômenos ondulatórios

2.4.1 Conceito de onda

Onda é definida como qualquer perturbação (pulso) que se propaga em um meio. Por exemplo, uma pedra jogada em uma piscina provocará ondas na água, já que o ato de jogar a pedra caracteriza-se como uma perturbação. Se notarmos a propagação das ondas partindo desde o local da queda da pedra, é possível perceber que elas seguem até a borda, mostrando uma propagação para todos os lados. Uma sequência de pulsos forma as ondas.

No exemplo, a piscina seria a fonte. Chama-se de fonte qualquer objeto que possa criar ondas.

A onda é somente energia, pois ela só faz a transferência de energia cinética da fonte para o meio. Portanto, nenhum tipo de onda transporta matéria.

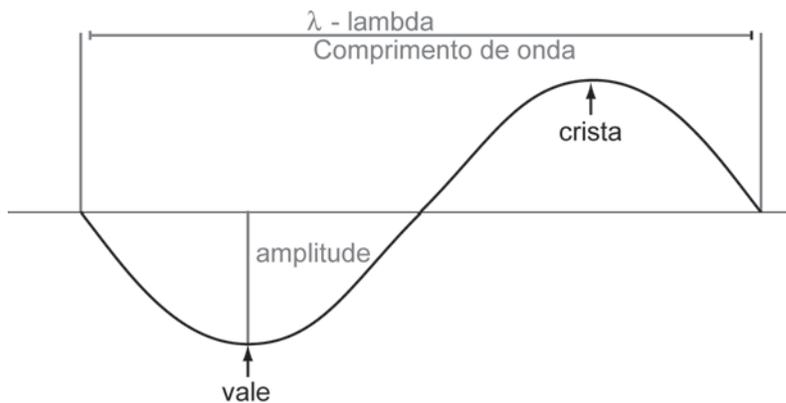


Figura 2.3 A onda e suas grandezas características.

Todas as ondas possuem algumas grandezas físicas, que são:

Frequência: é o número de oscilações da onda por certo período de tempo. A unidade de frequência do Sistema Internacional (SI), é o hertz (Hz), que equivale a 1 segundo, e é representada pela letra f . Então, quando é dito que uma onda vibra a 60Hz, significa que ela oscila 60 vezes por segundo. A frequência de uma onda só muda quando houver alterações na fonte.

Período: é o tempo necessário para a fonte produzir uma onda completa. No SI é representado pela letra T, e é medido em segundos.

É possível criar uma equação relacionando a frequência e o período de uma onda:

$$T = 1/f \text{ ou } T = 1/f \quad (2.23)$$

Comprimento de onda: é o tamanho de uma onda, que pode ser medida em três pontos diferentes: de crista a crista, do início ao final de um período ou de vale a vale. Crista é a parte alta da onda; vale, a parte baixa. É representada no SI pela letra grega lambda (λ).

Velocidade: todas as ondas possuem uma velocidade, que sempre é determinada pela distância percorrida sobre o tempo gasto. Nas ondas, essa equação fica:

$$v = \lambda/T \text{ ou } v = \lambda \cdot 1/T \text{ ou ainda } v = \lambda \cdot f \quad (2.24)$$

Amplitude: é a *altura* da onda, a distância entre seu eixo até a crista. Quanto maior for a amplitude, maior será a quantidade de energia transportada.

2.4.2 Classificação dos tipos de ondas

As ondas podem ser classificadas seguindo três critérios: segundo a sua natureza, a direção de propagação e a direção de vibração.

Quanto à natureza, as ondas podem ser divididas em dois tipos:

Ondas mecânicas: são todas as ondas que precisam de um meio material para se propagar. Por exemplo: ondas no mar, ondas sonoras, ondas em uma corda, etc.

Ondas eletromagnéticas: são ondas que não precisam de um meio material para se propagar. Elas também podem se propagar em meios materiais. Exemplos: luz, raio-x, sinais de rádio, etc.

Com relação à direção de propagação, as ondas podem ser divididas em três tipos:

Ondas unidimensionais: só se propagam em uma direção (uma dimensão), como uma onda em uma corda.

Ondas bidimensionais: propagam-se em duas direções (x e y do plano cartesiano), como a onda provocada pela queda de um objeto na superfície da água.

Ondas tridimensionais: propagam-se em todas as direções possíveis, como ondas sonoras, a luz, etc.

Com relação à direção de vibração, as ondas são divididas em dois tipos:

Ondas longitudinais: são as ondas em que a vibração da fonte é paralela ao deslocamento da onda. Exemplos de ondas longitudinais são as ondas sonoras (o alto falante vibra no eixo x e as ondas seguem essa mesma direção), etc.

Ondas transversais: a vibração é perpendicular à propagação da onda. Exemplo: ondas eletromagnéticas, ondas em uma corda (quando se balança a mão para cima e para baixo para gerar as ondas).

2.4.3 Função de onda unidimensional

Considere um pulso ondulatório que se propaga para a direita ao longo de uma corda tensionada, com velocidade constante v , conforme apresenta a Figura 2.4. O pulso move-se sobre o eixo x (eixo da corda), e o deslocamento transversal da corda é medido na ordenada y .

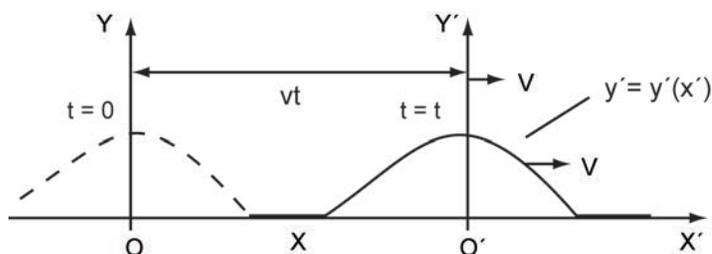


Figura 2.4 Pulso ondulatório unidimensional.

No instante $t = 0$, a forma da onda pode ser representada por uma função $y = f(x)$. No instante $t = t$, o pulso avançou na corda de modo que sua função não é mais $y = f(x)$. Se a forma do pulso é invariável, pode-se introduzir um novo sistema de coordenadas, com uma origem Δt que se move com a velocidade do pulso v , sendo que nesse novo sistema de coordenadas o pulso está em repouso. A função de onda neste novo sistema de coordenadas é $y' = f(x')$, sendo válida para todos os instantes.

As coordenadas dos dois referenciais estão relacionadas da seguinte forma:

$$y = y' \quad (2.25)$$

$$x = x' + vt \quad (2.26)$$

Então, a forma da onda no sistema de coordenadas original (O) pode ser escrita como $y = f(x - vt)$, sendo esta a função de onda deslocando-se para a direita. Utilizando o mesmo raciocínio, a função de onda deslocando-se para a esquerda é $y = f(x + vt)$.

A função de onda y representa a coordenada y em qualquer ponto e em qualquer instante. Então, a função de onda é uma função de duas variáveis x e t .

2.4.4 Reflexão e transmissão de ondas

Quando uma onda atinge uma fronteira entre dois meios, ela será parcial ou totalmente refletida. A Figura 2.5 apresenta o comportamento de um pulso ondulatório que se move para a direita em uma corda esticada. Quando o pulso chega a um suporte rígido (parede) ele sofre uma reflexão e uma inversão. Mas se em vez de um suporte rígido, o pulso chegar a uma extremidade livre da corda, este pulso sofrerá uma reflexão, mas não será invertido.

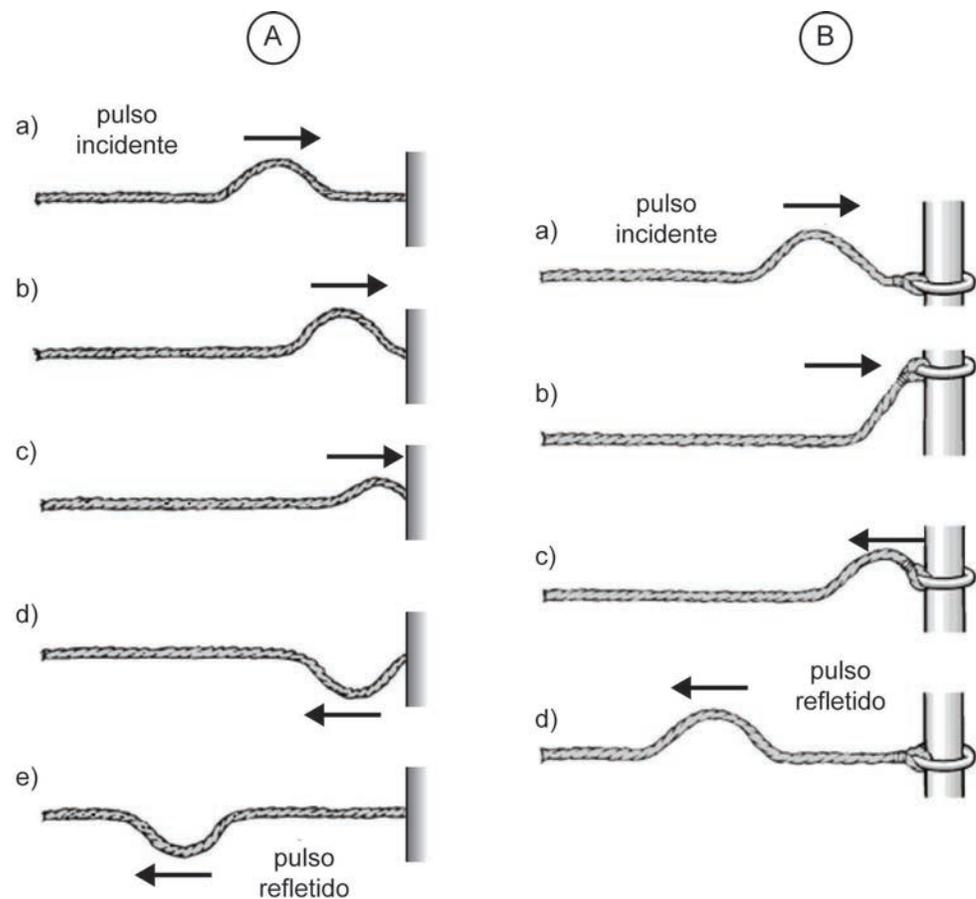


Figura 2.5 Reflexão de ondas em corda esticada: (A) corda fixa na parede e (B) corda com extremidade livre.

Fonte: adaptado de Halliday; Resnick & Walker (2009).

No caso da fronteira não ser nem rígida nem livre, parte do pulso ondulatório é refletido e parte é transmitido. Na Figura 2.6, em A, um pulso se move para a direita numa corda leve ligada a uma corda mais pesada. Na ligação observa-se que parte do pulso é refletido e invertido e parte é transmitido. Já em B o pulso propaga-se por meio de uma corda mais pesada que está ligada a uma corda leve, e parte desse pulso foi refletido e não invertido.

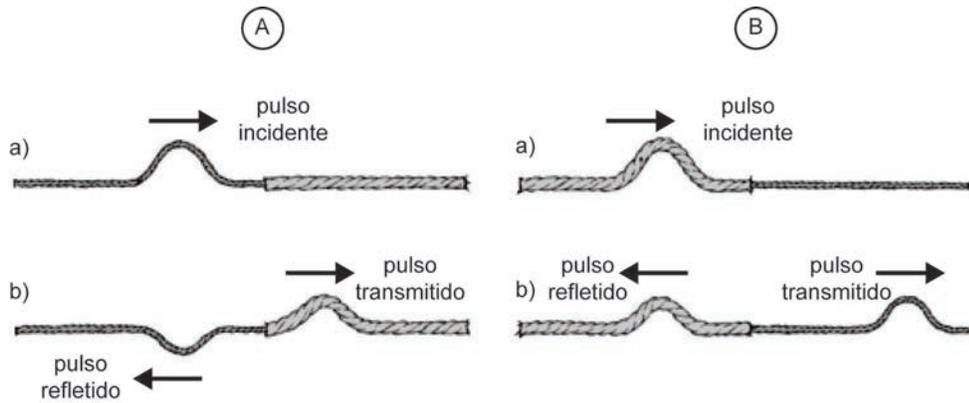


Figura 2.6 Transmissão de ondas.

Fonte: adaptado de Halliday; Resnick & Walker (2009).

2.5 Ondas harmônicas

2.5.1 Função de onda harmônica

A Figura 2.7 descreve uma onda harmônica em um dado instante em que A é a amplitude dessa onda e λ seu comprimento de onda. A função matemática que descreve o deslocamento de ondas harmônicas é o seno.

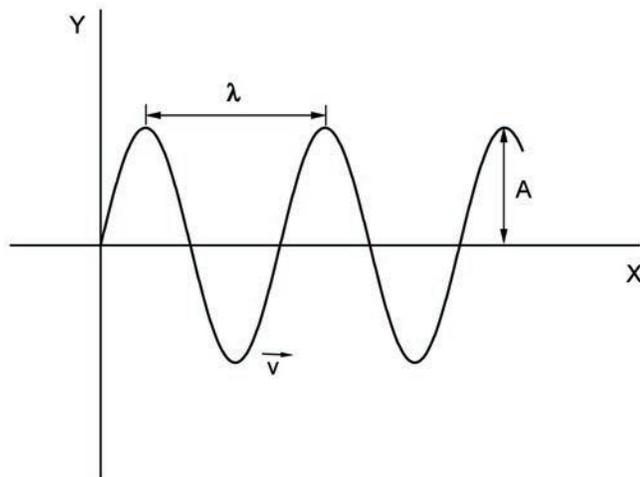


Figura 2.7 Representação gráfica de uma onda harmônica no sistema cartesiano.

Assim, pode-se escrever a seguinte função de onda:

$$y = A \sin(kx) \quad (2.27)$$

Em que A é a amplitude da onda e k é conhecido como número de onda e está relacionado com o comprimento de onda.

Se movermos sobre a onda de um ponto x_1 para outro x_2 , distantes de um comprimento de onda, ou seja, $x_2 = x_1 + \lambda$, o argumento da função seno é aumentado por 2π , logo:

$$k(x_1 + \lambda) = kx_1 + 2\pi \Rightarrow k\lambda = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.28)$$

Sabe-se que $y(x, t) = f(x - vt)$, então:

$$y(x, t) = A \sin[k(x - vt)] = A \sin[kx - kvt] \quad (2.29)$$

Como $v = \lambda/f$ e $k = 2\pi/\lambda$, logo $kvt = 2\pi t/f$.

Assim:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (2.30)$$

Por outro lado, como $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi/T$, também é possível escrever:

$$y(x, t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \quad (2.31)$$

Das Equações 2.20 e 2.31, observa-se que se x avança um comprimento de onda λ , ou t avança um período T , a função seno se repete e $y(x, t)$ possui o mesmo valor em ambos pontos.

2.5.2 Energia e potência transmitida por ondas harmônicas

Quando há propagação de ondas em um meio material, há transporte de energia. Este princípio pode ser observado na Figura 2.8, quando o pulso que se propaga na corda encontra o objeto suspenso, que será momentaneamente deslocado e a energia será transmitida da corda para o objeto.

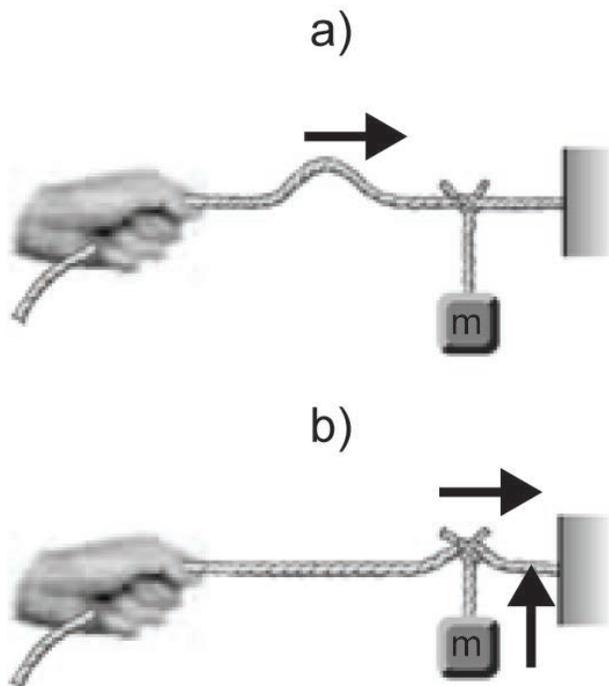


Figura 2.8 Transmissão de energia por ondas.

Fonte: adaptado de Halliday; Resnick & Walker (2009).

Para obtermos o valor desta energia, imagine uma onda harmônica propagando-se numa corda. A fonte de energia é qualquer agente externo, localizado na extremidade da corda, que efetua trabalho ao gerar as oscilações.

Considere um elemento da corda de comprimento Δx e massa Δm . Cada um desses elementos desloca-se verticalmente, executando um movimento harmônico simples. Além disso, cada elemento possui a mesma frequência ω e a mesma amplitude de oscilação A . Então, a energia total desse elemento é:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x \Rightarrow \left(\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x} \right) \quad (2.32)$$

Se num dado instante t_1 , a onda chega ao ponto P_1 , cada segmento de corda Δt que estiver à esquerda de P_1 terá a energia dada pela Equação 2.32. Após um intervalo de tempo Δt , a onda avançou uma distância $\Delta x = v\Delta t$, e a energia que passou por P_1 no intervalo de tempo Δt é:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \Delta t \quad (2.33)$$

Então, a potência (P) transmitida por uma onda harmônica pode ser representada como:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad (2.34)$$

2.6 Acústica e som

2.6.1 Ondas sonoras

As ondas sonoras são o exemplo mais importante de *ondas longitudinais*. Elas podem se propagar através de qualquer meio material (por exemplo, gases, líquidos e sólidos) com uma velocidade dependente das propriedades do meio de propagação.

Quando as ondas sonoras se propagam em um gás, as partículas do gás vibram, e provocam variação de densidade e pressão na direção de propagação da onda.

Os deslocamentos ocorridos em virtude de uma onda sonora envolvem os deslocamentos longitudinais das moléculas individuais em relação às posições de equilíbrio. Assim, forma-se uma sequência de regiões de alta e baixa pressão, que são denominadas *condensações* e *rarefações*, respectivamente. Se a fonte das ondas sonoras vibra senoidalmente, as variações de pressão também serão senoidais.

2.6.2 Velocidade das ondas sonoras

Em fluidos (gases e líquidos), a velocidade de propagação das ondas sonoras é dada pela seguinte equação.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (2.35)$$

Em que B é o módulo de compressibilidade volumétrico do fluido e ρ é a sua densidade em equilíbrio.

2.6.3 Ondas em três dimensões

Os conceitos de ondas que foram discutidas até agora são ondas unidimensionais, ou seja, ondas que se propagam em linha reta. Na realidade, as ondas possuem um caráter tridimensional.

A Figura 2.9 representa as ondas geradas por uma fonte puntiforme, na qual as ondas são emitidas em três dimensões, criando-se as chamadas *ondas esféricas*. Os arcos circulares representam as frentes de ondas esféricas concêntricas com a fonte. Os raios são retas radiais que saem da fonte e são perpendiculares às frentes de ondas. Nesse caso, o comprimento de onda é a distância entre duas cristas de ondas sucessivas.



Figura 2.9 Ondas esféricas.

Fonte: adaptado de Halliday; Resnick & Walker (2009).

Se uma fonte puntiforme emite uniformemente ondas em todas as direções, a energia a uma distância r da fonte está uniformemente distribuída sobre uma superfície esférica de raio r (com uma área superficial de $4\Delta r^2$). Se P_m é a potência média emitida pela fonte, temos a seguinte definição de intensidade de onda:

A potência média por unidade de área, perpendicular a direção de propagação da onda, é definida como intensidade da onda.

A unidade de intensidade de onda no Sistema Internacional (SI) é o watt por metro quadrado (W/m^2).

$$I = \frac{P_m}{A} = \frac{P_m}{4\pi r^2} \quad (2.36)$$

Analisando a Equação 2.36, nota-se que a intensidade de onda é inversamente proporcional à distância da fonte que a produziu.

2.6.4 Nível de intensidade

O ouvido humano é capaz de perceber uma extensa faixa de intensidades sonoras, que variam de $10^{-12} W/m^2$ (que se toma usualmente como limiar de audição) a cerca de $1W/m^2$ (que provoca uma sensação de dor na maioria das pessoas – o limiar doloroso).

Como a faixa de sensibilidade de intensidade sonora humana é bem extensa, é conveniente utilizar uma *escala logarítmica*. Por essa razão, introduz-se uma grandeza chamada *nível de intensidade* β :

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (2.37)$$

Em que I é a intensidade do som, I_0 é um nível de referência, que toma o valor do limiar de audição ($I_0 = 10^{-12} W/m^2$). A unidade do nível de intensidade é *decibéis* (dB).

Nesta escala, o limiar de audição ($I = I_0 = 10^{-12} W/m^2$) é $\Delta = 0$ dB, enquanto o limiar doloroso, ($I = 1 W/m^2$) é $\Delta = 120$ dB. Então, a faixa de intensidade de 10^{-12} a $1 W/m^2$ corresponde a níveis de intensidade de 0 dB até 120 dB.

2.7 Ondas estacionárias

Quando ondas são confinadas no espaço, como as ondas nas cordas de um violão, ocorrem reflexões nas duas extremidades e se formam ondas que estão se movendo em ambas as direções. Tais ondas combinam-se de acordo com o princípio de superposição (que será abordado na próxima seção).

Numa dada corda existem certas frequências que levam a uma configuração de vibração estacionária chamada de *ondas estacionárias*.

2.7.1 Ondas estacionárias numa corda fixa nas duas extremidades

Considere uma corda de comprimento L com suas duas extremidades. Se excitarmos a corda num certo ponto, com movimento harmônico simples de pequena amplitude, transversal à corda, pode-se verificar que certas frequências formam configurações de ondas estacionárias, como as apresentadas na Figura 2.10.

As frequências que provocam tais ondas estacionárias são as frequências de ressonância do sistema oscilante.

A frequência de ressonância de menor valor, ou mais baixa, é denominada de frequência fundamental. Ela provoca uma onda estacionária, como a apresentada na Figura 2.10 (a), que é denominada de modo fundamental de vibração ou primeiro harmônico.

A frequência de ressonância imediatamente seguinte ao primeiro harmônico gera uma onda estacionária, como a apresentada na Figura 2.10 (b), que é denominada segundo harmônico. Esse modo de vibração possui uma frequência que é igual ao dobro do valor da frequência do modo fundamental de vibração.

A terceira frequência de ressonância é o triplo do valor da frequência do modo fundamental e leva a uma onda estacionária mostrada pela Figura 2.10 (c), que é denominada terceiro harmônico.

Também observa-se na Figura 2.10 que em cada harmônico existem certos pontos da corda que não se movem. Por exemplo, o ponto central da Figura 2.10 (b) não se move. Esses pontos são os *nós* (N) da onda estacionária. Entre cada par de nós existem pontos em que a amplitude de vibração é máxima, chamado *antinó* ou *ventre* (V) da onda estacionária. Nota-se que as duas extremidades da corda também são nós, pois também não se movem.

Pode-se relacionar as frequências de ressonância com a velocidade da onda na corda e com o seu comprimento. Vê-se na Figura 2.10 que o comprimento L da corda é igual a meio comprimento de onda do primeiro harmônico; a um comprimento de onda do segundo harmônico; a três meios comprimentos de onda do terceiro harmônico e assim sucessivamente.

Por indução, pode-se escrever que, para o n -ésimo harmônico, a relação entre comprimento da corda e comprimento de onda do harmônico é:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.38)$$

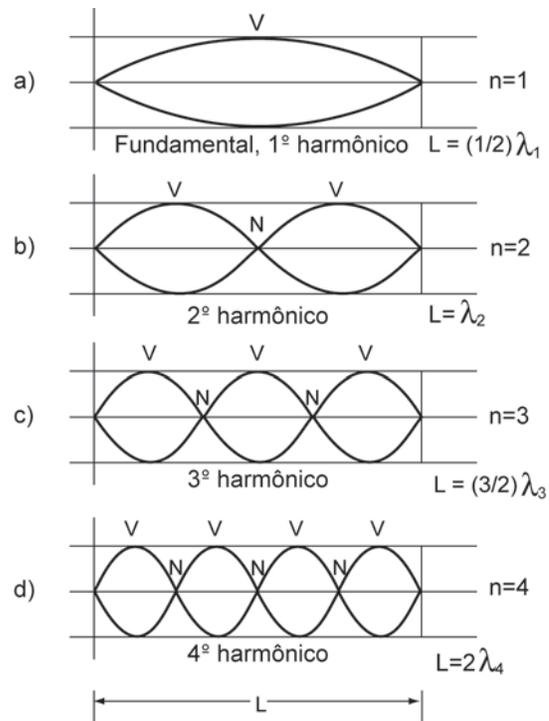


Figura 2.10 Ondas estacionárias em cordas com as duas extremidades fixas.

Esse resultado é a condição de formação de ondas estacionárias quando as duas extremidades da corda são fixas.

Com relação às grandezas frequência, comprimento de onda e velocidade da onda, temos:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{\left(\frac{2L}{n}\right)} = n \frac{v}{2L} = n f_1 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.39)$$

Estas são as frequências de ressonância com os dois extremos fixos, em que:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (2.40)$$

chama-se *frequência fundamental*, com $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

2.7.2 Função de onda estacionária

Considere duas ondas de mesma frequência e comprimento de onda em uma corda de comprimento L . Uma desloca-se para a direita (y_D) e outra para a esquerda (y_E). Admitindo que suas amplitudes são iguais, pode-se escrever:

$$y_D = A \sin(kx - \omega t) \quad (2.41)$$

$$y_E = A \sin(kx + \omega t) \quad (2.42)$$

A soma dessas duas ondas nos fornece:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) = 2A \cos(\omega t) \sin(kx) \quad (2.43)$$

$$\text{Em que } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

Se as duas extremidades da corda estiverem fixas, em qualquer instante, temos as seguintes condições de contorno:

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (2.44)$$

A condição $y(0, t) = 0$ será automaticamente satisfeita, pois $\sin(0)$ é sempre zero. Já a condição $y(L, t) = 0$ somente será satisfeita se:

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.45)$$

Como a relação entre número de onda e comprimento de onda é $k = 2\pi/\lambda$, então, a Equação 2.45 pode ser escrita da seguinte forma:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.46)$$

Sendo esta a condição de existência de ondas estacionárias discutida anteriormente.

Como nem todas as frequências podem produzir as ondas estacionárias, a equação de onda estacionária deve ser escrita assim:

$$y_n(x, t) = A_n \cos(\omega_n t) \text{sen}(k_n x) \quad (2.47)$$

2.8 Superposição

2.8.1 Superposição e interferência de ondas

Se duas ou mais ondas movem-se através de um mesmo meio, a função de onda resultante, em qualquer ponto do meio, é igual à soma algébrica das funções de onda das ondas individuais.

As ondas que obedecem a este princípio (princípio de superposição) são denominadas *ondas lineares* que de modo geral se caracterizam por apresentarem amplitudes pequenas.

Por esse princípio observa-se que duas ondas podem passar uma pela outra sem serem destruídas ou mesmo alteradas, conforme é possível observar na Figura 2.11.

Conforme observa-se na Figura 2.11, em A, quando dois pulsos se propagam em direções opostas em uma corda tensionada com deslocamentos iguais, tais pulsos se superpõem num dado tempo, sendo que o deslocamento resultante é igual a soma dos deslocamentos individuais de cada pulso isoladamente. Uma vez que tais pulsos provocam deslocamentos positivos, a superposição é denominada uma *interferência construtiva*.

No caso em que dois pulsos se propagam em direções opostas, como na Figura 2.11 em B, em uma corda tensionada com deslocamentos iguais, porém, opostos, quando ambos os pulsos se superpõem, os deslocamentos subtraem-se. Como tais pulsos provocam deslocamentos negativos na superposição, ela é denominada uma *interferência destrutiva*.

2.8.2 Superposição de ondas estacionárias

Em geral, num sistema vibrante, como uma corda fixa em suas extremidades, não vibra com uma única frequência. O movimento, ao contrário, é composto

por uma mistura dos harmônicos admissíveis. De modo geral, o movimento de uma corda fixa em suas extremidades pode ser descrito como:

$$y_n(x,t) = \sum_n A_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \text{sen}(k_n x) \quad (2.48)$$

Que representa a superposição de todos os harmônicos possíveis para a dada configuração da corda.

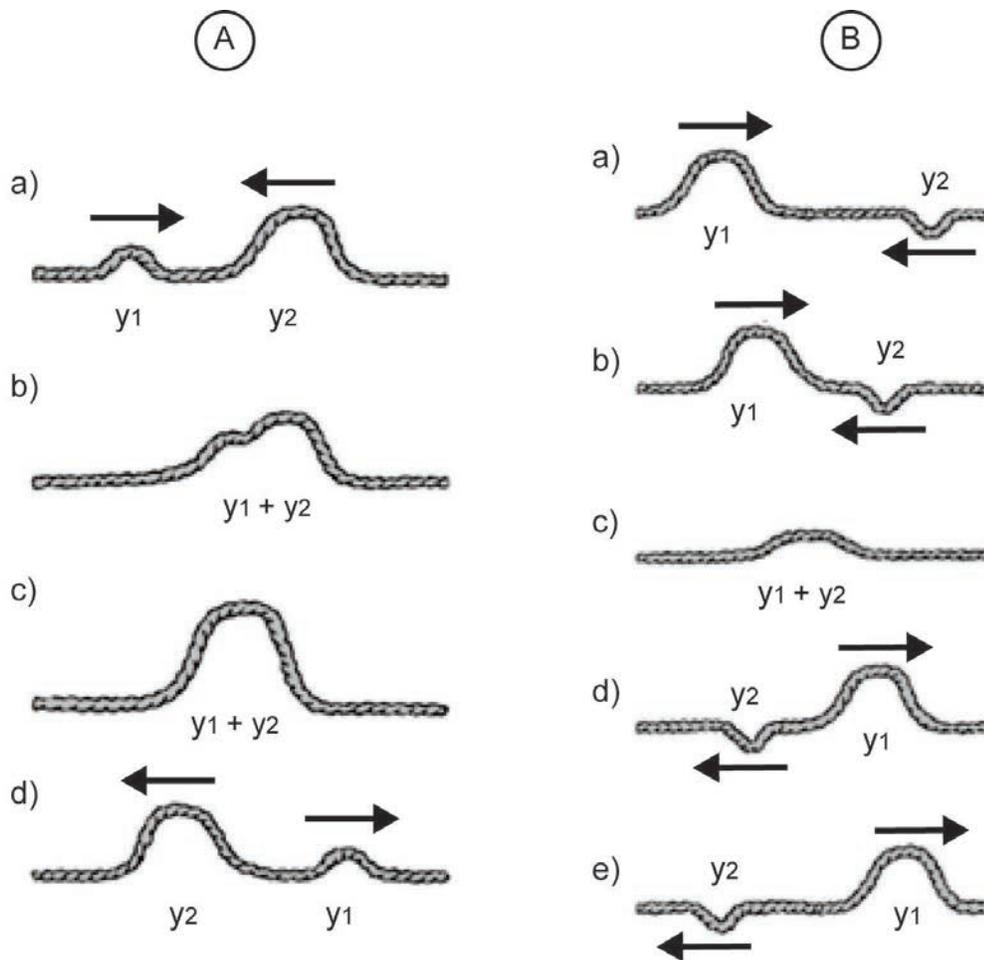


Figura 2.11 Superposição e interferência de ondas estacionárias.

Fonte: adaptado de Halliday; Resnick & Walker (2009).

2.9 Efeito Doppler

Quando uma onda sonora e um observador estão em movimento relativo, a frequência observada pelo observador não é a mesma que a observada na fonte. Quando a fonte e o observador se aproximam um do outro, a frequência

do som ouvido é maior que a frequência da fonte. Quando a fonte e o observador se afastam um do outro, a frequência do som ouvido é menor que a frequência da fonte. Tal fenômeno é conhecido como efeito Doppler.

Temos que salientar que o efeito Doppler ocorre somente quando existe *movimento relativo* entre a fonte e o observador.

2.9.1 Cálculo das frequências

Serão analisados três casos de cálculo de frequência: quando o observador está em repouso e a fonte em movimento; quando a fonte está em repouso e o observador em movimento e quando ambos estão em movimento.

Caso 1: Observador em repouso e fonte em movimento

Quando a fonte está em repouso, as ondas emitidas encontram-se uniformemente distribuídas em todas as direções, conforme mostra a Figura 2.12. Mas quando a fonte se movimenta em relação ao meio com uma velocidade U_f , menor que a velocidade da onda ($U_f < v$), pode-se observar que as ondas localizadas na frente da fonte se apresentam comprimidas, enquanto as localizadas atrás da fonte estão afastadas, não sendo mais uniforme a distribuição das frentes de onda.

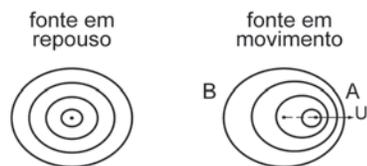


Figura 2.12 Efeito do movimento relativo da fonte na forma das ondas geradas.

Se a frequência da fonte é f_0 , num certo intervalo de tempo Δt , são emitidas um dado número de ondas (N) pela fonte, que pode ser representado matematicamente como $N = \Delta t f_0$. Nesse intervalo de tempo Δt , as ondas deslocam-se de sua posição inicial pela distância $v \cdot \Delta t$, enquanto a fonte percorre a distância dada por $U_f \cdot \Delta t$.

Então, na frente da fonte, as ondas geradas no intervalo de tempo Δt estão contidas na distância $v \cdot \Delta t - U_f \cdot \Delta t$. Por sua vez, o comprimento de onda das ondas na frente da fonte (Δ) pode ser obtido por meio da razão desta distância $(v \cdot \Delta t - U_f \cdot \Delta t)$ pelo número de ondas emitidas neste intervalo de tempo ($N = \Delta t f_0$). Logo,

$$\lambda_f = \frac{v - U_f}{f_0} \quad (2.49)$$

Usando a mesma lógica, observa-se que as ondas localizadas atrás da fonte estão contidas na distância $v \cdot \Delta t + U_f \cdot \Delta t$. Então o comprimento de onda das ondas atrás da fonte (λ_a) é:

$$\lambda_a = \frac{v + U_f}{f_0} \quad (2.50)$$

Nas Equações 2.49 e 2.50, pode-se observar que a fonte se encontra em repouso ($U_f = 0$), $\lambda_a = \lambda_f = v/f_0$. Mas se a fonte estiver em movimento relativo, $\lambda_a > \lambda_f$.

Para o observador, localizado na posição A da Figura 2.12, parece que a fonte emite ondas com comprimento de onda dado pela Equação 2.49. Já o observador localizado na posição B da Figura 2.12 percebe que a fonte emite ondas com comprimento de onda dado pela Equação 2.50. Como a velocidade das ondas somente depende das propriedades do meio, e não do movimento relativo da fonte, a frequência que o observador A percebe (f_A) pode ser escrita como:

$$f_A = \frac{f_0}{1 - \frac{U_f}{v}} \quad (2.51)$$

Em que a fonte se aproxima do observador. Já o observador B, com a fonte afastando-se dele, a frequência percebida por ele (f_B) é:

$$f_B = \frac{f_0}{1 + \frac{U_f}{v}} \quad (2.52)$$

Caso 2: Fonte em repouso e observador em movimento

A Figura 2.13 apresenta as possibilidades de movimento relativo do observador com relação à fonte. A Figura 2.13 (a) mostra o observador em repouso com relação à fonte, num tempo Δt , em que a onda percorre uma distância $v \cdot \Delta t$. Mas como a fonte está em repouso, o comprimento de onda não se altera ($\Delta = v/f_0$). Então, o número de ondas que passaram pelo observador, durante um tempo Δt , é:

$$N = \frac{v\Delta t}{\lambda} = f_0\Delta t \quad (2.53)$$

Logo, a frequência percebida pelo observador é:

$$f = \frac{N}{\Delta t} = f_0 \quad (2.54)$$

Mostrando que o observador não verifica alteração da frequência da fonte.

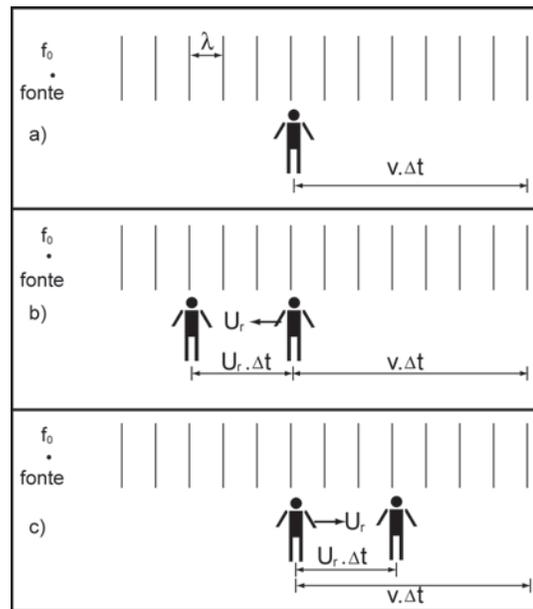


Figura 2.13 Possibilidades de movimento relativo do observador com relação a fonte de ondas.

Se o observador aproxima-se da fonte com uma velocidade U_r , conforme apresenta a Figura 2.13 (b), num tempo Δt , a onda percorre uma distância $v \cdot \Delta t$, e o observador $U_r \cdot \Delta t$. Logo, o número de ondas que passaram pelo observador é:

$$N = \frac{(v + U_r)\Delta t}{\lambda} \quad (2.55)$$

E a frequência percebida pelo observador aproximando-se da fonte é:

$$f = f_0 \left(1 + \frac{U_r}{v} \right) \quad (2.56)$$

Se o observador afasta-se da fonte com uma velocidade U_r , conforme apresenta a Figura 2.13 (c), num tempo Δt , a onda percorre uma distância $v \cdot \Delta t$, e o observador $U_r \cdot \Delta t$. Logo, o número de ondas que passaram pelo observador é:

$$N = \frac{(v - U_r) \Delta t}{\lambda} \quad (2.57)$$

E a frequência percebida pelo observador afastando-se da fonte é:

$$f = f_0 \left(1 - \frac{U_r}{v} \right) \quad (2.58)$$

Caso 3: Fonte e observador em movimento

Neste caso, combinando os resultados anteriores:

$$f = f_0 \left[\frac{1 \pm \left(\frac{U_r}{v} \right)}{1 \pm \left(\frac{U_f}{v} \right)} \right] \quad (2.59)$$

A regra para julgar os sinais é a seguinte:

A frequência aumenta se a fonte e o observador aproximam-se. A frequência diminui se a fonte e o observador afastam-se. Deste modo, temos as seguintes possibilidades de aproximação e afastamento entre fonte e observador, e a sua respectiva equação para o efeito Doppler:

| Fonte | Observador | Equação |
|-----------------------|-----------------------|---|
| $\longrightarrow U_f$ | $\longrightarrow U_r$ | $f = f_0 \frac{1 - \left(\frac{U_r}{v}\right)}{1 - \left(\frac{U_f}{v}\right)}$ |
| $\longrightarrow U_f$ | $U_r \longleftarrow$ | $f = f_0 \frac{1 + \left(\frac{U_r}{v}\right)}{1 - \left(\frac{U_f}{v}\right)}$ |
| $U_f \longleftarrow$ | $U_r \longleftarrow$ | $f = f_0 \frac{1 + \left(\frac{U_r}{v}\right)}{1 + \left(\frac{U_f}{v}\right)}$ |
| $U_f \longleftarrow$ | $\longrightarrow U_r$ | $f = f_0 \frac{1 - \left(\frac{U_r}{v}\right)}{1 + \left(\frac{U_f}{v}\right)}$ |

REFERÊNCIAS

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica*. 8. ed. São Paulo: LTC, 2009.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica*. 5 ed. Rio de Janeiro. LTC, 2006.

YOUNG, H.; FREEDMAN, R. A. *Física II: Termodinâmica e Ondas*. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

