Coleção UAB−UFSCar

Engenharia Ambiental

Márcio de Jesus Soares
João Carlos Vieira Sampaio
Paulo Antonio Silvani Caetano
Odete Baes

Cálculo 1

Cálculo 1

Reitor
Targino de Araújo Filho
Vice-Reitor
Adilson J. A. de Oliveira
Pró-Reitora de Graduação
Claudia Raimundo Reyes

Secretária de Educação a Distância - SEaD
Aline M. de M. R. Reali
Coordenação SEaD-UFSCar
Daniel Mill
Denise Abreu-e-Lima
Glauber Lúcio Alves Santiago
Joice Otsuka
Marcia Rozenfeld G. de Oliveira
Sandra Abib
Vânia Paula de Almeida Neris
Coordenação UAB-UFSCar
Daniel Mill
Denise Abreu-e-Lima

Coordenador do Curso de Engenharia Ambiental
Luiz Márcio Poiani

UAB-UFSCar
Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, km 235
13565-905 - São Carlos, SP, Brasil
Telefax (16) 3351-8420
www.uab.ufscar.br
uab@ufscar.br

Márcio de Jesus Soares
João Carlos Vieira Sampaio
Paulo Antonio Silvani Caetano
Odete Baes

Cálculo 1

São Carlos
2013

Concepção Pedagógica
Daniel Mill

Supervisão
Douglas Henrique Perez Pino

Equipe de Revisão Linguística
Clarissa Galvão Bengtson
Daniel William Ferreira de Camargo
Gabriela Aniceto
Letícia Moreira Clares
Sara Naime Vidal Vital

Equipe de Editoração Eletrônica
Izis Cavalcanti

Equipe de Ilustração
Maria Julia Barbieri Mantoanelli

Capa e Projeto Gráfico
Luís Gustavo Sousa Sguissardi

Sumário

APRESENTAÇÃO

Este material foi desenvolvido para a disciplina Cálculo 1 do curso de Engenharia Ambiental da UAB-UFSCar, a partir do conteúdo desenvolvido e aplicado nas ofertas anteriores dessa disciplina pelo professor Paulo Caetano e pela professora Odete, baseado no material elaborado pelo professor João Sampaio.

Neste livro são apresentados tópicos do cálculo diferencial e integral para funções reais com uma única variável real. No capítulo 1 são apresentados os conceitos de *limite* e *continuidade*.

No segundo capítulo, o conceito de *derivada*, taxa de variação instantânea, é apresentado juntamente com algumas aplicações.

Por fim, no terceiro capítulo é apresentada a *integral*. Primeiramente, é trabalhada a *antiderivada*, que é, de certa forma, uma operação inversa da derivada. Em seguida, é feita a relação entre a *integral definida* e a antiderivada. Para finalizar, são apresentadas algumas técnicas de integração e algumas aplicações de integral.

UNIDADE 1

Limite

1.1 Primeiras palavras

O conceito de *limite*, o qual será apresentado neste capítulo, é a base do cálculo diferencial e integral moderno. Embora os conceitos de derivada e de integral de uma função real em uma única variável sejam anteriores ao próprio conceito formal de limite, eles utilizavam, intuitivamente, o conceito de limite. Com a formalização desses conceitos, no século XIX e começo do século XX, foi mostrado que, na verdade, tanto a derivada quanto a integral segundo Riemann são limites.

A conceitualização do limite passa pela noção intuitiva do que é, em Matemática, "estar próximo tanto quanto se queira". A abordagem utilizada para formalizar esta expressão será a de ε e δ. Tal abordagem é útil em aplicações que envolvam medidas de erros, por exemplo, se na produção de uma chapa circular é permitido certo erro na medida de sua área, qual deverá ser a precisão no raio desta chapa.

Iniciaremos o capítulo com as definições de limite e limites laterais por meio de ε e δ. Em seguida será apresentado o conceito de continuidade de uma função. Na parte final do capítulo serão trabalhados os conceitos de limites envolvendo infinito e as propriedades no gráfico de uma função decorrentes do limite.

1.2 Definição de limite e limites laterais

Nesta seção será apresentada a definição formal de limite. O conceito de limite vem da noção "estar próximo", que é, evidentemente, relativo. Pensemos: estar a 80 metros da chegada de uma prova de 100 metros rasos é estar longe da chegada, mas estar, os mesmos, 80 metros da chagada de uma maratona, que tem 42.195 metros é estar muito perto da chegada. Matematicamente esta condição relativa não é aceita. Assim, adiciona-se a expressão "tanto quanto se queira"à expressão "estar próximo". Agora a noção intuitiva passa a ser "estar próximo tanto quanto se queira", que deixa de ser relativo, uma vez que uma certa "exigência"pode ser satisfeita.

Analisando a expressão "estar próximo tanto quanto se queira", podemos pensar da seguinte forma: se quisermos estar mais próximo do que 2 metros de algo, basta nos colocarmos a 1,5 metros dele; se quisermos estar mais próximo do que 1 metro deste mesmo "algo", basta nos colocarmos a 90 centímetros

(0,9 m) dele; e se quisermos ficar a uma distância menor do que 1 milímetro (0,001 m) deste mesmo "algo", basta nos colocarmos a 0,1 milímetro (0,0001 m) dele. Matematicamente, o que estamos fazendo é: dado um valor qualquer conseguimos um outro valor que é menor do que este, dado que nossa exigência de estar mais próximo, está satisfeita.

A definição de limite de uma uma função é ligeiramente mais complexo do que o exposto acima, pois trata-se de duas "proximidades", uma na variável independente e outra na variável dependente. A ideia do "limite de $f(x)$ quando x tende a a ser um valor L"é saber se existe uma aproximação adequada da variável x em relação ao valor a tal que o valor $f(x)$ esteja tão próximo do valor L quanto quisermos.

Definição 1.1 (Limite). *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e (α, β) um intervalo contendo o ponto a. Se $(\alpha, \beta) \setminus \{a\} \subset D$, define-se o limite de f quando x tende a a sendo o número real L se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, se $x \in D$, com $x \neq a$, e $a - \delta < x < a + \delta$, então $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Usamos a notação*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Em símbolos matemáticos, temos

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ ;\ \forall x \in D \setminus \{a\},$$

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \text{ ou seja } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Note que a condição inicial é a escolha do valor que queremos aproximar $f(x)$ do valor L, que é o ε (ver Figura 1.1. Tomado o ε olhamos no domínio de f para sabermos qual o intervalo do domínio de f, que contém o valor a, precisamos para obter como imagem o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ (ver Figura1.2). Então, adotamos como intervalo "adequado"o maior intervalo centrado em a, contido no intervalo obtido (ver Figura 1.3.). As figuras a seguir ilustram este processo.

Observação: O limite quando existe ele é único. Tente interpretar esta observação geometricamente como as ilustrações.

Exemplo 1.1. *O valor do limite $\lim_{x \to 2} x^2$ é 4.De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos o intervalo $(\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon})$ para escolha do δ. Note que $\varepsilon \leq 4$, pois se $\varepsilon > 4$, teríamos $4 - \varepsilon < 0$. Para escolhermos o valor de δ tomaremos o menor valor entre $2 - \sqrt{4 - \varepsilon}$ e $\sqrt{4 + \varepsilon} - 2$. Devido ao maior crescimento da função após o 2, temos*

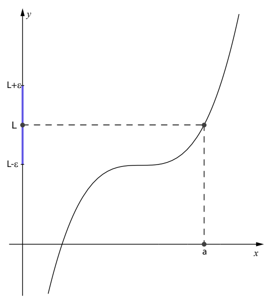


Figura 1.1 Escolha do valor ε.

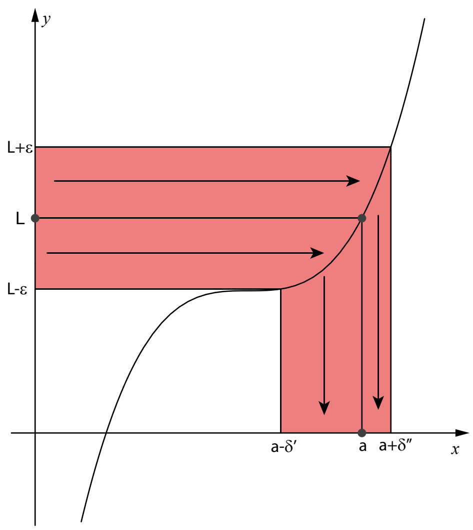


Figura 1.2 Achando o intervalo do domínio de f adequado.

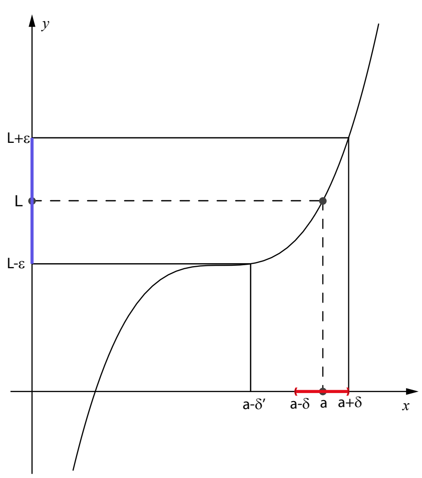


Figura 1.3 Escolha do valor δ.

que $\sqrt{4+\varepsilon}-2 < 2-\sqrt{4-\varepsilon}$*. Assim,* $\delta = \sqrt{4+\varepsilon}-2$*. Por exemplo, se* $\varepsilon = 1$*,* $\delta = \sqrt{5}-2$*; se* $\varepsilon = 0,001$*,* $\delta = \sqrt{5,001}-2$*.*

Exemplo 1.2. *Antes de fabricar cilindros com uma seção transversal de 9 pol*^{2} *para um certo motor é preciso saber qual o desvio se pode aceitar em relação ao*

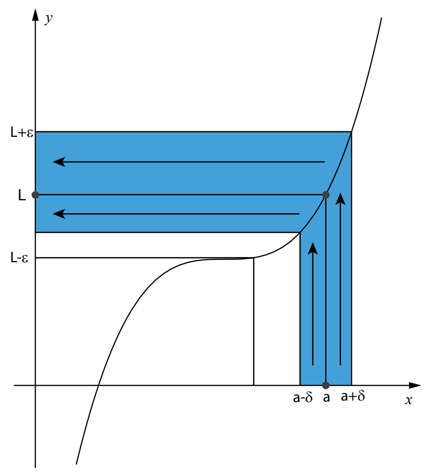


Figura 1.4 Imagem do intervalo obtido.

diâmetro do cilindro ideal, que é $a = 3,3851375$ *pol, e ter ainda a área diferindo de, no máximo,* $0,01$ *pol*^{2} *das 9 pol*^{2} *necessárias. Para descobrir isto, usa-se* $A(x) = \dfrac{x^2}{4}\pi$ *e procura-se o intervalo no qual* x *deve pertencer para* $|A(x) - 9| \leq 0,01$*. Qual o intervalo? Da definição de limite, qual seria o* δ*?*

Solução. *Como os valores limites permitidos na área são* $8,99$ *e* $9,01$ *(que são os valore* $L - \varepsilon$ *e* $L + \varepsilon$ *) precisamos saber quais são os valores de* x *que produzem tais valores de área, que são*

$$x_1 = \sqrt{\frac{35,96}{\pi}} \approx 3,3832563 \text{ e } x_2 = \sqrt{\frac{36,04}{\pi}} \approx 3,3870176.$$

Assim, o intervalo o qual o x *deve pertencer é* $(3,3832563; 3,3870176)$*. Note que os extremos do intervalo são os valores* $a - \delta'$ *e* $a + \delta''$*, e para descobrir o valor de* δ *é preciso calular as diferenças dos extremos do intervalo com o valor ideal, ou seja,*

$$3,3851375 - 3,3832563 = 0,0018812 \text{ e } 3,3870176 - 3,3851375 = 0,0018801.$$

Assim, $\delta = 0,0018801$*. O valor de* δ *é na verdade o erro máximo na medida do diâmetro para obtermos uma medida de área dentro do desvio permitido.*

Definição 1.2 (Limite lateral à esquerda)**.** *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função real e* (b, a) *um intervalo contido no domínio* D*. Defini-se o limite lateral à esquerda de* f *quando* x *tende a* a *sendo o número real* L *se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existir* $\delta > 0$ *tal que, se* $a - \delta < x < a$*, então* $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$*. Usamos a notação*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Usando apenas a simbologia matemática, temos

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\,;\ \forall x \in D,$$

$$x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Exemplo 1.3. *A função* $f(x) = \sqrt{-x}$ *tem como domínio* $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$*. Logo, não há intervalo aberto contendo* 0*, que esteja contido em seu domínio. Temos que*

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0.$$

Utilize o processo do limite bilateral para provar este limite.

Definição 1.3 (Limite lateral à direita)**.** *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função real e* (a, c) *um intervalo contido no domínio* D*. Define-se o limite lateral à direita de* f *quando* x *tende a* a *sendo o número real* L *se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existir* $\delta > 0$ *tal que, se* $a < x < a + \delta$*, então* $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$*. Usamos a notação*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Usando apenas a simbologia matemática, temos

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ ;\ \forall x \in D,$$

$$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Exemplo 1.4. *O limite da função* $f(x) = 1 + \sqrt[4]{x}$ *quando* x *tende a* 0 *pela direita é 1.*

Note que o domínio de f *é conjunto dos números reais não negativos. Logo, só podemos aproximar de 0 pela direita. Como exercício, ache o valor de* δ *se* $\varepsilon = 10^{-4}$*.*

Proposição 1.1. *Dada* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função. Temos que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$*.*

Demonstração. Suponhamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D \setminus \{a\}$ e $x \in (a-\delta, a+\delta)$, então $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Assim, se $x \in (a-\delta, a)$ ou se $x \in (a, a+\delta)$, temos que $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, portanto $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Reciprocamente, se para todo $\varepsilon > 0$ existirem $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ tais que se $x \in D \setminus \{a\}$ e

i) $x \in (a-\delta, a)$, então $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$;

ii) $x \in (a, a+\delta)$, então $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Assim por (i) e (ii), e tomando δ=minδ', δ'' temos que

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. □

Felizmente, o cálculo de limites apresentam propriedades que combinadas fazem com que seus cálculos do limites de algumas funções aparentemente complicadas se torne fácil, ou não tão complicada.

Proposição 1.2 (Propriedades)**.** *Dados dois números reais quaisquer a e c, temos os limites*

(i) $\lim_{x \to a} c = c$.

(ii) $\lim_{x \to a} x = a$.

Demonstração. Exercício ao aluno! □

Exemplo 1.5. *O limite* $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ *não existe. De fato, calculando os limites laterais, temos*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \qquad e \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

Logo, os limites laterais são distintos, e portanto, o limite não existe.

Proposição 1.3 (Mais propriedades)**.** *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$*, então*

(i) $\lim_{x \to a}(k \cdot f)(x) = k \cdot L$*, para todo* $k \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{x \to a}(f + g)(x) = L + M$.

(iii) $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = L \cdot M$.

(iv) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$*, desde que* $M \neq 0$.

(v) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$*, desde que se* n *for par,* L *seja não negativo.*

Demonstração. Veja as demais referências bibliográficas básicas. □

Note que a hipótese de que os limites existem é fundamental. O exemplo a seguir mostra isso.

Exemplo 1.6. *Temos que* $\lim_{x \to 0} x = 0$ *e* $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ *não exite. Mas,* $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$.

Exemplo 1.7. *Seja* $p(x)$ *uma função polinomial. Pelas propriedade apresentadas nas proposições 1.2 e 1.3, temos que*

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a),$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.8. *Calcule o limite* $\lim_{x\to -2} x^3 + 2x^2 - 3x - 5$.

Solução. *Temos que a função é uma função polinomial, logo pelo exemplo anterior*

$$\lim_{x\to -2} x^3 + 2x^2 - 3x - 5 = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) - 5 = 1.$$

Exemplo 1.9. *Calcule o limite* $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

Solução *Note que, sendo* $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$*, temos que* $2 \in D_f$*. As funções do demoniador e do numerador são polinomiais, logo*

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - 8) = 0 \quad \textit{e} \ \lim_{x\to 2}(x - 2) = 0.$$

Por esta situação não podemos aplicar a regra do quociente. No avançar do curso veremos como resolver isso num contexto mais geral[1]*, mas na situação presente é possível manipular algebricamente o numerador de forma a "eliminar"o* 0 *do limite do denominador, da seguinte forma:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \overset{x-2\neq 0}{=} \lim_{x\to 2}(x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12.$$

Exemplo 1.10. *Calcule o limite* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$.

Soluçao. *Assim como no exemplo anterior não podemos aplicar a regra do quociente, pois nos levaria a indeterminação "0/0". Mas uma manipulação algébrica direta neste caso torna-se-ia quase um exercício de advinhação. Aqui usaremos a técnica de mudança de variável fazendo* $y = \sqrt[3]{x+1}$*, temos* $y^3 = x + 1$*, e portanto* $x = y^3 - 1$*. Mas* $\lim_{x\to 0} y = 1$*, e assim*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{y - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y\to 1} \frac{y - 1}{(y-1)(y^2 + y + 1)} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2 + y + 1} = \frac{1}{3}.$$

Sejam f, g e h funções tais que $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo $x \in (\alpha, \beta)$ exceto possivelmente para $x = a$, sendo (α, β) um intervalo contido nos domínios das funções. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, temos que dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_f > 0$ e $\delta_h > 0$ tais que se $x \in D_f \cap D_h$ e

i) $x \in (a - \delta_f, a + \delta_f)$, então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$;

ii) $x \in (a - \delta_h, a + \delta_h)$, então $h(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

[1] Este resultado, "0/0", é muito comum em cálculo de limites, e não tem significado como valor de um limite. A expressão "0/0"simboliza uma indeterminação ocorrida em uma tentativa de cálculo de um limite. Este símbolo significa que o limite ainda não foi calculado de fato.

Se considerarmos $\delta = \min\{\delta_f,\ \delta_h,\ a-\alpha,\ \beta - a\}$, temos que se $x \in (a-\delta, a+\delta)$, então $f(x)$ e $h(x)$ pertencem a $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, por (i) e (ii), e $f(x) < g(x) < h(x)$, por suposição. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in (a-\delta, a+\delta)$, então

$$L - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < L + \varepsilon.$$

O que acabamos de provar é o Teorema do confronto, o qual está anunciado abaixo.

Teorema 1.4 (Confronto)**.** *Sejam* f, g *e* h *funções reais e* (c,d) *um intervalo contendo* a *tais que* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para todo* $x \in (c,d)$ *exceto possivelmente para* $x = a$. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$*, então* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

A figura abaixo ilustra o teorema do confronto.

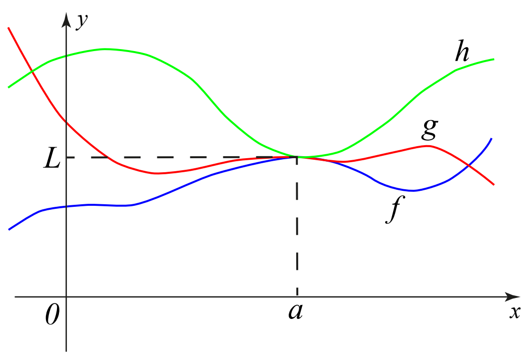


Figura 1.5 Teorema do confronto.

Exemplo 1.11. *Calcule o limite* $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x^2 \operatorname{sen} x)$.

Solução. *Como* $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$*, temos que* $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} x \leq x^2$*, logo* $1 - x^2 \leq 1 + x^2 \operatorname{sen} x \leq 1 + x^2$. *Mas* $\lim\limits_{x\to 0} 1 - x^2 = \lim\limits_{x\to 0} 1 - x^2 = 1$. *Portanto, pelo Teorema do confronto,* $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x^2 \operatorname{sen} x) = 1$.

Teorema 1.5. *Sejam* f *e* g *funções reais tais que* g *é uma função limitada em algum intervalo* (α, β) *que contenha* a *e* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. *Então,*

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon' > 0$. Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, temos que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $x \in (a-\delta, a+\delta)$, então $f(x) \in (-\varepsilon', \varepsilon')$. Por hipótese $g(x)$ é limitada em (α, β), assim existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$, para $x \in (\alpha, \beta)$. Logo,

$$|(fg)(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M|f(x)|.$$

Assim,

$$M|f(x)| < M\varepsilon'.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ e tomando $\varepsilon' = \varepsilon/M$, existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in (a-\delta, a+\delta)$, então $|(fg)(x)| < \varepsilon$. Ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. □

Exemplo 1.12. *Considere a função $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Temos que*

$$\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

pois $\lim_{x\to 0} x = 0$ e a função $\cos$ é limitada, e aplicando o teorema anterior temos o resultado. Note que $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

1.3 Continuidade

Definição 1.4 (Continuidade)**.** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a função f é contínua num ponto $c \in D$, se*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Note que temos três informações na definição de continuidade em um ponto. São elas:

(i) O ponto c deve pertencer ao domínio. Esta informação está explícita na definição.

(ii) O limite indicado deve existir.

(iii) E o limite é igual ao valor da função no ponto c.

Se qualquer uma delas não for válida não termos a continuidade. Quando a função não é contínua num ponto c, diremos que ela é descontínua em c, ou que c é um ponto de descontinuidade de f.

Se uma função é contínua para todo $x \in S$, para algum subconjunto S de seu domínio, dizemos que a função é contínua em S. Quando a função é contínua em todo seu domínio dizemos simplesmente que a função é contínua.

Exemplo 1.13. *Todo polinômio é contínuo em todos os reais. Ou seja,*

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

Solução. *Seja* $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. *Temos*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a}(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0) \\
&= \lim_{x\to a}(c_n x^n) + \lim_{x\to a}(c_{n-1}x^{n-1}) + \ldots + \lim_{x\to a}(c_1 x) + \lim_{x\to a} c_0 \\
&= c_n \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + c_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} c_0 \\
&= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0 \\
&= p(a)
\end{aligned}$$

Teorema 1.6. *Sejam* f *e* g *funções tais que,* $\lim_{x\to a} g(x) = b$*, e* f *é contínua em* b*. Então,*

$$\lim_{x\to a} f\circ g(x) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, temos que existe $\delta' > 0$ tal que se $y \in D_f$ e $|y - b| < \delta'$, então $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$, pois f é contínua em b. Pela existência do limite em g, temos que para $\delta' > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D_g$ e $|x - a| < \delta$, então $|g(x) - b| < \delta'$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D_{f\circ g}$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \delta' \Rightarrow |f\circ g(x) - f(b)| < \epsilon.$$

□

Como consequência deste último teorema temos o seguinte corolário.

Corolário 1.7. *Sejam* f *e* g *funções, tais que* g *é contínua em* a *e* f *é contínua em* $g(a)$*, então* $f\circ g$ *é contínua em* a*.*

Exemplo 1.14. *Calcule o limite* $\lim_{x\to\pi/2}(\mathrm{sen}^2(x) + 3\,\mathrm{sen}(x) - 1)$.

Solução. *Note que a função é, na verdade, a composição das funções* $f(x) = x^2 + 3x - 1$ *e* $g(x) = \mathrm{sen}(x)$. *Temos o limite*

$$\lim_{x\to\pi/2} \mathrm{sen}(x) = 1.$$

Como f *é uma função contínua, pois é polinomial. Assim pelo Teorema anterior*

$$\lim_{x\to\pi/2}(\mathrm{sen}^2(x) + 3\,\mathrm{sen}(x) - 1) = f(1) = 3.$$

Proposição 1.8 (Propriedades)**.** *Sejam* f *e* g *funções contínuas no ponto* c*, então*

(i) $\lim_{x\to c}(k\cdot f)(x) = kf(c)$*, para todo* $k \in \mathbb{R}$*.*

(ii) $\lim_{x\to c}(f + g)(x) = f(c) + g(c)$*.*

(iii) $\lim_{x\to c}(f \cdot g)(x) = f(c)g(c)$.

(iv) $\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(c)}{g(c)}$, *desde que* $g(c) \neq 0$.

(v) $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(c)}$, *desde que, se* n *for par,* $f(c)$ *seja não negativo.*

Demonstração. Consequências imediatas da proposição 1.3 e da definição de função contínua. □

As propriedades acima são, na verdade, consequências das propriedades de limite 1.3, diante da continuidade.

Exemplo 1.15. *Mostre que toda função racional[2] é contínua em seu domínio.*

Solução. *Consideremos* $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *uma função racional, ou seja, as funções* p *e* q *são funções polinomiais, logo são contínuas. O domínio de* r *é o conjunto de todos os valores reais tais que* $q(x) \neq 0$*. Logo, aplicando as proriedades da proposição 1.8 temos que*

$$\lim_{x\to a} r(x) = \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = r(a),$$

se $a \in D_r$.

Teorema 1.9 (Valor intermediário)**.** *Se* f *é uma função contínua num intervalo* $[a, b]$*, e se* z *é um valor entre* $f(a)$ *e* $f(b)$*, então existe um valor* $c \in (a, b)$*, tal que* $f(c) = z$.

Uma das consequências imediatas do Teorema do valor intermediário é a análise re raiz de um polinômio.

Exemplo 1.16. *Considere a função polinomial* $p(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$*. Mostre que* p *tem uma raiz entre* 1 *e* 2*.*

Solução. *Temos que* $p(1) = -4 < 0$ *e* $p(2) = 17 > 0$*, logo pelo teorema do valor intermediário, pois* p *é contínua, existe um valor* $c \in (1, 2)$ *tal que* $p(c) = 0$*.*

Exercícios Recomendados

EP 1. *Calcule os limites.*

(a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4}{x - 2}$

[2]As funções raionais são funções que são quociente de funções polinomiais.

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$

(c) $\lim\limits_{k \to 4} \dfrac{k^2 - 16}{\sqrt{k} - 2}$

(d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

(e) $\lim\limits_{h \to -2} \dfrac{h^3 + 8}{h + 2}$

(f) $\lim\limits_{z \to 10} \dfrac{1}{z - 10}$

(g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^4}$

(h) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (x^2 + 3)(x - 4)$

(i) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} 15$

(j) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - 7x + 2}$

(k) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$

(l) $\lim\limits_{s \to 4} \dfrac{6s - 1}{2s - 9}$

(m) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

(n) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4 - \sqrt{16 + h}}{h}$

(o) $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{(4t^2 + 5t - 3)^3}{(6t + 5)^4}$

(p) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^{-2} - 2^{-2}}{h}$

1.4 Limites envolvendo infinito

Nesta seção serão trabalhados os conceitos de limites que envolvem um outro conceito inportante em cálculo, que é o *infinito*. Em Matemática, temos abordagens distintas para palavra "infinito", em cada área da Matemática o "infinito" é tratado de forma distinta. Em algumas o infinito possuem um comportamento de número, ou seja com regras de operações, mas em outras ele tem um caráter apenas de comportamento. No cálculo, o "infinito" tem o caráter de comportamento, embora em algumas situações as operações entre os "infinitos" sejam intuitivamente naturais.

A noção de aproximação fica um pouco diferente, pois ao falarmos em "infinito" temos uma noção de algo "muito grande". Com isso, o conceito de *infinito* em Cálculo é formalizar esta noção de "muito grande". Temos, de fato, 12 definições distintas envolvendo *infinito*, a saber,

- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$,
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$,
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$,
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$,
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

A fim de evitar uma cascata de definições similares, serão apresentadas apenas três delas. Todas as outras são muito parecidas, quase idêntica, com uma delas.

Definição 1.5 (Limite infinito)**.** *Seja* f *uma função definida em um intervalo contendo* a*, exceto possivelmente o próprio* a*. Dizemos que o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a *é* $+\infty$ *(mais infinito) se para todo* $M > 0$*, existir* $\delta > 0$ *tal que se* $x \in D_f$ *e* $|x - a| < \delta$*, então* $f(x) > M$*.*

Da definição acima, temos que o limite de uma função é mais infinito se consiguirmos um valor $f(x)$ maior do que qualquer valor dado (M) para algum valor suficientemente próximo (δ) de a.

Note que o infinito não é um número real, e sim um comportamento que a função tem próxima do ponto a. Assim, adotaremos, como nomenclatura, as seguintes possibilidades: o limite existe, se for um número real; o limite é $+\infty$ ou $-\infty$; e, o limite não existe.

Exemplo 1.17. *Considere a função* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$*. Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$*.*

Solução. *Seja* $M > 0$*, temos que*

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > M.$$

Assim, dado $M > 0$*, basta tomarmos* $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$*. Portanto,*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Exemplo 1.18. *Prove que* $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$*.*

Solução. *Seja* $M > 0$*, temos que descobrir se existe um valor* $\delta > 0$ *que satisfaça a definição. Para isso olhamos qual é a condição necessária para que um valor de* x*,* $f(x) < -M$*. Logo,*

$$f(x) = \frac{1}{x} < -M \Rightarrow x > -\frac{1}{M}.$$

Mas a condição acima é também suficiente, e assim, se $x > -\dfrac{1}{M}$*, então* $f(x) = \dfrac{1}{x} < -M$*. Basta, então, tomarmos* $\delta = \dfrac{1}{M}$*. Portanto,*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, a reta $x = a$ é chamada de assíntota vertical do gráfico de f. Geometricamente, a assíntota vertical é a reta que delimita o esboço do gráfico. Note que o gráfico não cruza a assíntota vertical. (Por quê?)

Definição 1.6 (Limite no infinito)**.** *Seja* f *uma função definida em um intervalo* $(-\infty, a)$ *para algum* a*. Dizemos que o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a menos infinito é um valor* L*, se para todo* $\varepsilon > 0$*, existir* $N > 0$ *tal que se* $x < -N$*, então* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

A definição acima nos diz que podemos nos aproximar $f(x)$ de L tanto quanto quisermos (ε), tomando valores negativamente grande de forma adequada (N). Se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L_2$, as retas $y = L_1$ e $y = L_2$ de assíntotas horizontais do gráfico de f. Geometricamente, a assíntota horizontal é a reta que determina o valor "limite"do gráfico ao deslocarmos a variável indefinidamente para esquerda ou para direita. O gráfico da função pode ou não cruzar a assíntota horizontal.

As propriedades de limites são válidas para limites no infinito. A seguir veremos um resultado que facilita os cálculos de limites no infinito.

Proposição 1.10. *Sejam* $k \in \mathbb{Q}_+$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Temos que*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

Proposição 1.11. *Seja* f *uma função tal que* $f(x) = \dfrac{g(x)}{q(x)}$, *sendo* $g(x)$ *uma função qualquer e* $q(x)$ *uma função polinomial. Suponha que* a *é uma raiz de* $q(x)$ *e que* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L \neq 0$. *Então,*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty & , \textit{ se } L \cdot q(x) > 0 \\ -\infty & , \textit{ se } L \cdot q(x) < 0 \end{cases}.$$

O valor $q(x)$ *representa valores de* q *quando* x *está próximo de* a *pela esquerda. Analogamente, para* $x \to a^+$.

Exemplo 1.19. *Calcule o limite* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2}$.

Solução. *Temos*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(2 - \dfrac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \dfrac{5}{x^2}}{3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}} \\ &= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 3 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2}} \\ &= \frac{2 - 0}{3 + 0 + 0} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.20. *Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$.

Solução. *Para determinarmos as assíntotas verticais é preciso saber as raízes do denominador* $3x - 5$, *que é apenas* $\dfrac{5}{3}$, *e calcular os limites laterais neste ponto. Como*

$$\lim_{x \to \frac{5}{3}} \sqrt{2x^2 + 1} = \frac{\sqrt{59}}{3} > 0,$$

$3x - 5 < 0$ *quando* $x \to \frac{5}{3}^-$ *e* $3x - 5 > 0$ *quando* $x \to \frac{5}{3}^+$, *temos que* $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}^-} f(x) = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}^+} f(x) = +\infty$. *Assim, a reta* $x = \dfrac{5}{3}$ *é uma assíntota vertical.*

Para determinarmos as assíntotas horizontais é preciso calcular os limites no infinito. Calculando,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}$$

$$\overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}$$

$$= \frac{-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}$$

$$= \frac{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}3-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Logo, a reta $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ *é uma assíntota horizontal do gráfico de* f. *De forma análoga, temos que* $\lim\limits_{x\to+-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, *e assim a reta* $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ *é a outra assíntota horizontal do gráfico de* f.

A figura 1.6 mostra as três assíntotas do exemplo.

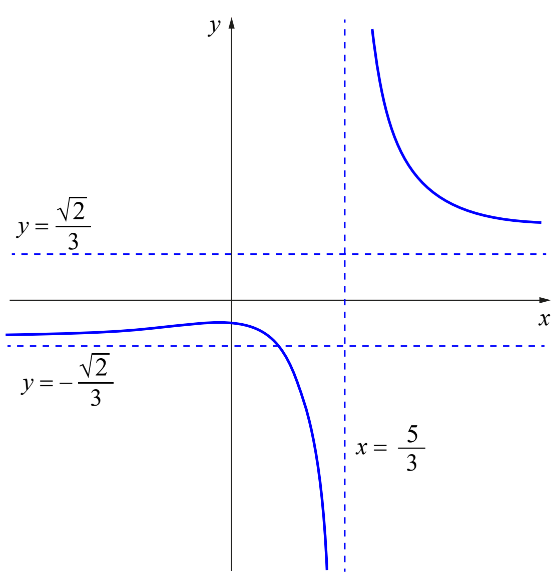


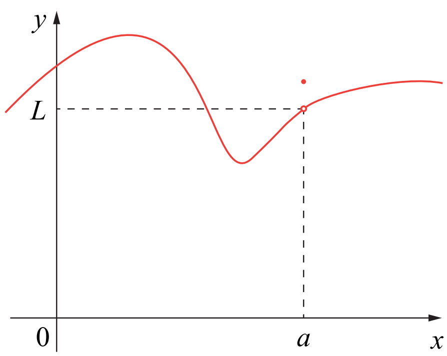
Figura 1.6 Gráfico da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$.

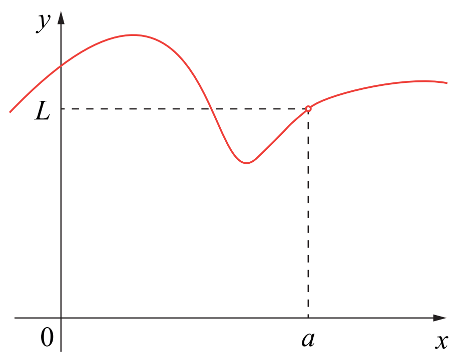
1.5 Tipos de descontinuidades

Quando uma função não é contínua em um ponto a, dizemos que a função é descontínua em a. A rigor não tem sentido em falarmos de descontinuidade em pontos que não pertençam ao domínio, pois neste caso não teríamos o valor da função para este ponto para comparar com o valor do limite neste ponto. Mas se uma função está definida em um intervalo contendo um ponto a, exceto no próprio a, dizemos que f é descontínua em a.

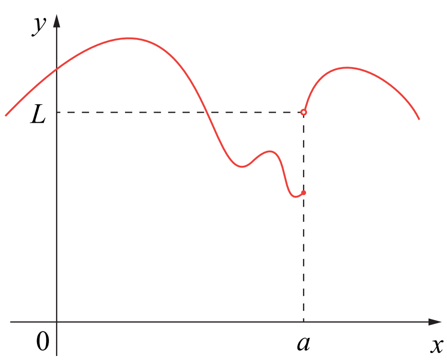
Os tipos de descontinuidades de uma função são:

(i) Removíveis, quando $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, mas é diferente de $f(a)$, ou $f(a)$ não está definido;

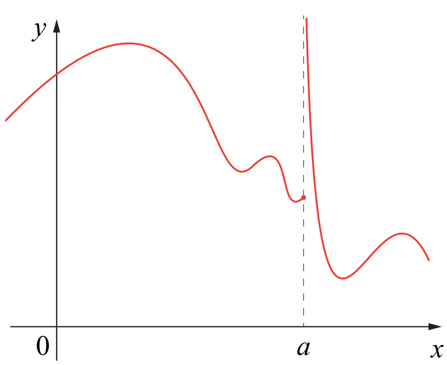


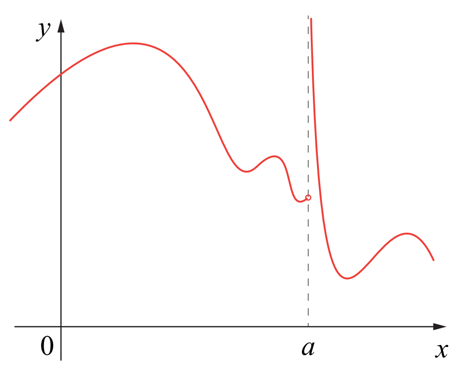


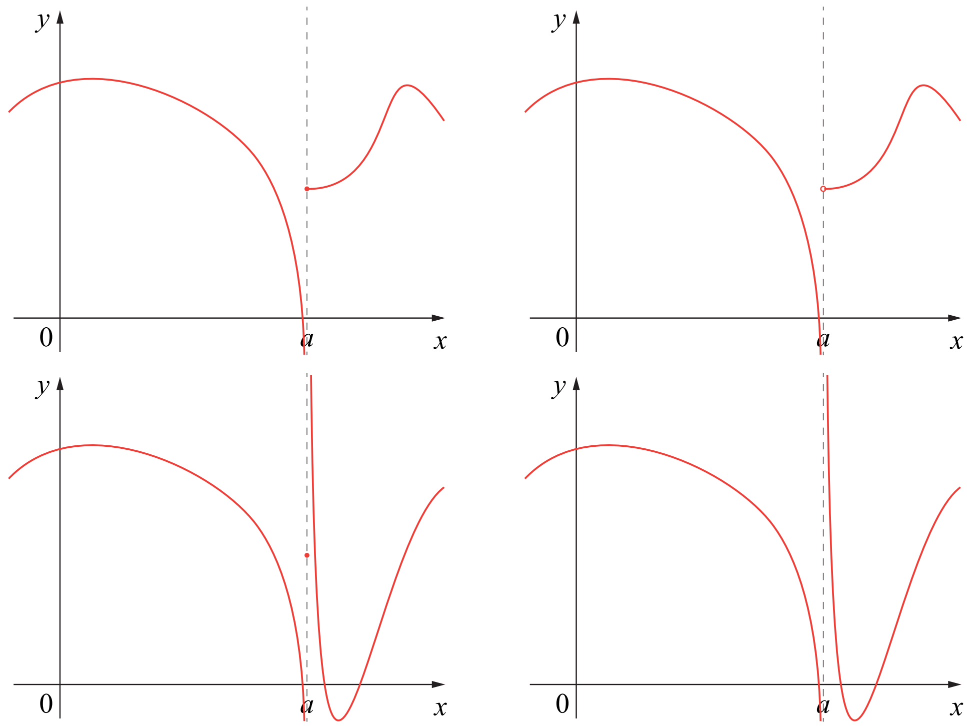
(ii) Salto, quando os limites laterais existem e são distintos;



(iii) Infinita, quando um dos limites laterais é infinito.







O primeiro tipo de descontinuidade, o removível, tem esse nome por podermos definir uma nova função de tal forma que esta nova função seja continua e que coincida com a anterior exceto na descontinuidade.

Exemplo 1.21. *Considere a função* $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$*. Temos que o domínio de* f *é o conjunto dos números reais não nulos. Mas como* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$*, podemos definir a função*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Note que a função g *é contínua em* 0*.*

Exemplo 1.22. *Encontre, se existir, as assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$*.*

Solução. *Temos que* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$*. Logo, a reta* $y = 0$ *é a única assíntota horizontal. Os pontos de descontinuidades de* $f(x)$ *são as raízes do denominador, que são* -2 *e* 2*. Calculando os limites laterais em* -2 *e* 2

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty.$$

Assim, as assíntotas verticais são $x = -2$ *e* $x = 2$*. A figura 1.6 mostra o gráfico de* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$*.*

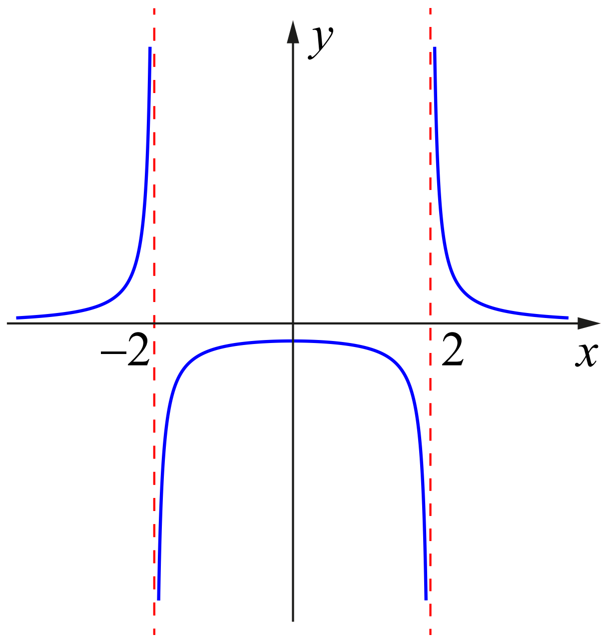


Figura 1.7 Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

Exemplo 1.23. *Uma concentração de água salgada na base de 50 g de sal por litro de água corre para um tanque que contem inicialmente 50 l de água pura.*

(a) *Se o fluxo de água salgada é de 5 l/min, determine o volume $V(t)$ de água e a quantidade $s(t)$ de sal no tanque após t minutos.*

(b) *Estabeleça uma fórmula para a concentração $c(t)$, após t minutos.*

(c) *O que ocorre com a concentração após um longo período de tempo?*

Solução.

(a) *Como o volume inicial é de 50 l e a cada minuto 5 l é jogado no tanque temos*

$$V(t) = 50 + 5t.$$

A quantidade inicial de sla é nula e a cada minuto temos 5 l de água com 50 g de sal em cada litro. Logo,

$$s(t) = 5 \cdot 50t = 250t.$$

(b) *A concentração é dada por* $c(t) = \dfrac{s(t)}{V(t)}$. *Logo*

$$c(t) = \frac{250t}{50+5t} = \frac{50t}{10+t}.$$

(c) *para sabermos o que ocorre com a concentração após um longo período de tempo, basta calcularmos o limite de* $c(t)$ *com* x *tendendo a* $+\infty$*. calculando,*

$$\lim_{x\to+\infty} c(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{50t}{10+t} = \lim_{x\to+\infty} \frac{50t}{t\left(\frac{10}{t}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{50}{\frac{10}{t}+1} = 50.$$

Logo, a concentração se estabiliza em 50 g/l.

1.5.1 Assíntotas oblíquas

Quando a função $f(x)$ é uma função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ com o grau da função polinomial $p(x)$ sendo exatamente um grau a mais do que o grau da função polinomial $q(x)$. Com isso temos que existem polinômios $g(x)$ e $r(x)$, tais que $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$, sendo o grau de $g(x)$ exatamente 1, existem valores reais tais que $g(x) = ax + b$. Assim, $f(x) = g(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$.

Como o grau de $r(x)$ é menor do que o grau de $q(x)$ temos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{r(x)}{q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0.$$

Portanto o gráfico de f tende à reta $ax+b$ quando x tende a $\pm\infty$. Por isso, a reta $ax+b$ é chamada de *assíntota oblíqua* do gráfico da função f. Note que quando uma função possui uma assíntota oblíqua, ela não possui assíntota horizontal. (Por quê?)

Exemplo 1.24. *Analise o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^2-9}{2x-4}$ *em relação a existência de assíntotas.*

bf Solução. A função f *é uma função racional com domínio* $\mathbb{R}\setminus\{2\}$*, logo se tiver assíntota vertical será a reta* $x = 2$*. Calculando os limites laterais em* $x = 2$*, temos*

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x^2-9}{2x-4} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to2^+} \frac{x^2-9}{2x-4} = -\infty.$$

Com isso tems que a reta $x = 2$ *é realmente a assíntota vertical.*

Como $f(x)$ *é uma função racional em que o polinômio do numerador tem exatamente um grau a mais que o polinômio do denominador, temos que o gráfico de* f *tem uma assíntota oblíqua, e consequentemente não possui assíntota horizontal. Para obtermos a equação da assíntota oblíqua basta realizarmos a divisão de polinômios. Temos que*

$$\frac{x^2-9}{2x-4} = \left(\frac{1}{2}x+1\right) - \frac{5}{2x-4},$$

assim, a assíntota oblíqua do gráfico de f *é a reta* $y = \frac{1}{2}x + 1$*. A figura 1.8 ilustra o gráfico de* f*.*

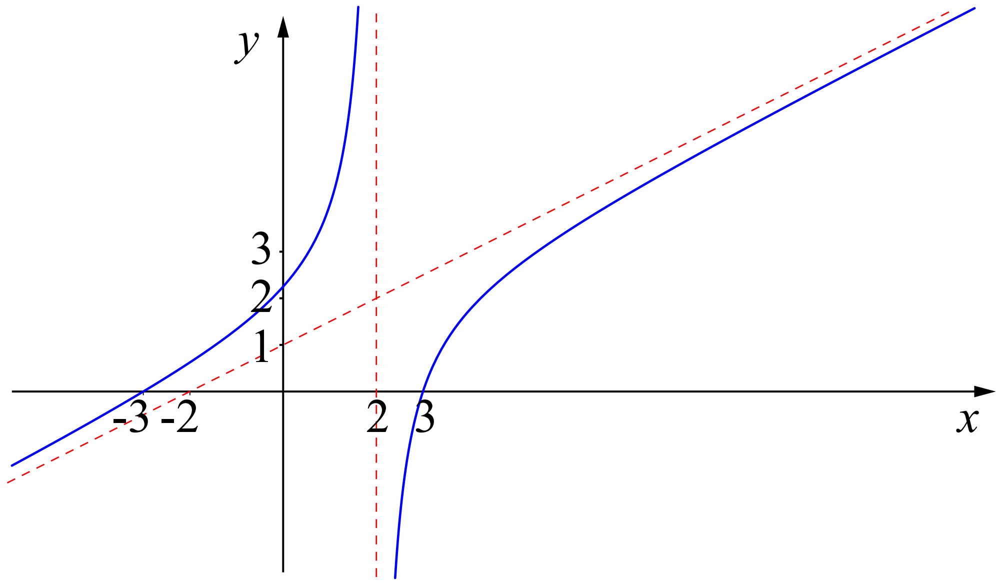


Figura 1.8 Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x - 4}$, com suas assintotas $x = 2$ e $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Exercícios Recomendados

EP 2. *Calcule os limites*

(a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x - 5}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x + 3)^3 (2 - 3x)^2}{x^5 + 5}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + a} - \sqrt{x}\right)$.

(g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x\right)$.

(h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt[3]{1 - x^3}\right)$.

(i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x + 8x^3} - 2x\right)$.

(j) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

EP 3. *Determine as assíntotas das funções*

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x+1}$.

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$.

(c) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x+3}$.

(d) $f(x) = \dfrac{8-x^3}{2x^2}$.

(e) $f(x) = \dfrac{0,5x^3+3x-1}{6-x^2}$.

Exercícios Avançados

EA 1. *Sejam*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

e

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

polinômios de graus n *e* m*, respectivamente. Prove que*

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$.

UNIDADE 2

Derivada

2.1 Primeiras palavras

A palavra *derivada* de uma função é a operação que informa como se apresenta a variação da função. Este conceito moderno chamado de *derivada* tem sua origem em duas situações clássicas: a velocidade instantânea de um objeto e reta tangente a uma curva, em particular ao gráfico de uma função. Estas situações clássicas serão abordadas num primeiro instante deste capítulo com o objetivo de introduzir o conceito formal e abstrato de *derivada* de forma mais suave.

2.2 Pré-derivada

2.2.1 Velocidade instantânea

Quando é informado que um automóvel está a uma velocidade de 80 km/h, isso significa que a cada hora ele percorrerá 80 km. Mas esta informação não é, a princípio, muito precisa, pois o automóvel pode parar neste intervalo de tempo e acabar não percorrendo tal distância. Melhorando a informação: se o automóvel está em movimento com uma velocidade de 80 km/h, significa que se ele permanecer com esta velocidade por 1 hora ele percorrerá 80 km. Porém, a velocidade medida é sempre a velocidade média. Mas, então o que vem a ser velocidade instantânea ou, simplesmente, velocidade de um automóvel?

A ideia da velocidade instantânea é, na verdade, o valor obtido quando o intervalo de tempo da medição é tomado tendendo a 0. Considerando Δs variação o espaço no intervalo Δt, definimos a velocidade instantânea sendo

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Faremos uma análise mais detalhada. Um ponto móvel M desloca-se ao longo de uma linha reta horizontal, a partir de um ponto O (ver figura 2.1.).

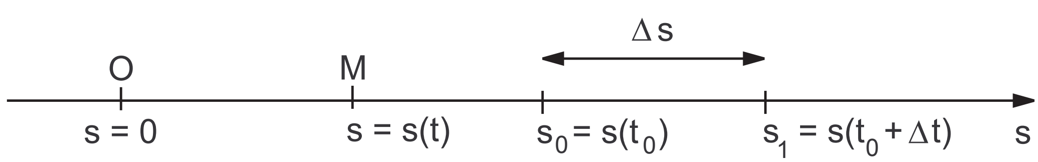


Figura 2.1 Deslocamento de um objeto móvel sobre um eixo orientado.

O deslocamento s, de M, em relação ao ponto O, é a distância de O a M, se M está à direita de O, e é o negativo dessa distância se M está à esquerda de

O. Assim, s é positivo ou negativo, conforme M se encontre, respectivamente, à direita ou à esquerda de O.

Com estas convenções, a reta passa a ser *orientada*, o que chamamos de *eixo*, sendo O sua origem.

O deslocamento s depende do instante de tempo t, ou seja, s é uma função da variável t: $s = s(t)$.

Em um determinado instante t_0, o deslocamento de M é $s_0 = s(t_0)$. Em um instante posterior t_1, o deslocamento de M é $s_1 = s(t_1)$.

Definição 2.1. *A* velocidade média *do ponto* M*, no intervalo de tempo* $[t_0, t_1]$ *é dada por*

$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Podemos também escrever $t_1 = t_0 + \Delta t$, ou seja, $\Delta t = t_1 - t_0$, e também $\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Teremos então

$$v_m = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Por exemplo, vamos supor que $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ (ponto móvel uniformemente acelerado). Assim, no instante $t = 0$ o ponto móvel está em $s(0) = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 = 0$.

A partir de um certo instante t_0, temos uma variação de tempo Δt. Seja $t_1 = t_0 + \Delta t$. Podemos ter $\Delta t > 0$ ou $\Delta t < 0$ (quando $\Delta t < 0$, t_1 antecede t_0). Teremos então

$$s(t_1) = s(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(at_0^2 + 2at_0\Delta t + a(\Delta t)^2\right)$$

A variação do deslocamento do ponto móvel, nesse intervalo de tempo, será

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{2}at_0^2 + at_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2$$

ou seja,

$$\Delta s = at_0\Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}.$$

A velocidade média do ponto, no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, será dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{at_0\Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2}.$$

Se $\Delta t \approx 0$, então também teremos $\Delta s = at_0\Delta t + \dfrac{a(\Delta t)^2}{2} \approx 0$. No entanto,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \approx at_0.$$

Definição 2.2. *De um modo geral, definimos a* velocidade instantânea $v(t_0)$, *do ponto* M, *no instante* t_0, *como sendo o* limite *da velocidade média no intervalo de* t_0 *a* $t_0 + \Delta t$, *quando* Δt tende a zero, *e escrevemos*

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

No nosso exemplo,

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(a t_0 + \frac{a \Delta t}{2} \right) = a t_0.$$

Exemplo 2.1. *Um atleta percorre uma pista de* 110 *m de modo que a distância* $s(t)$ *percorrida após* t *segundos é dada por* $s(t) = \dfrac{1}{5}t^2 + 8t$ *metros. Determine a velocidade do atleta*

(a) no início da corrida;

(b) após 5 segundos;

(c) na chegada.

Solução. *Temos que a velocidade num instante* t_0 *é*

$$v(t_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Assim,

(a) no início da corrida temos $t_0 = 0$. *Logo,* $v(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{s(\Delta t) - s(0)}{\Delta t}$. *Calculando a velocidade*

$$\begin{aligned} v(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(\Delta t) - s(0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{1}{5}(\Delta t)^2 + 8(\Delta t)\right] - 0}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{5}(\Delta t) + 8 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Portanto, a velocidade no início da corrida é de 8 *m/s.*

(b) Após 5 segundos, temos que $t = 5$.*Logo,* $v(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{s(5 + \Delta t) - s(5)}{\Delta t}$.

Calculando a velocidade

$$
\begin{aligned}
v(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(5+\Delta t) - s(5)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{1}{5}(5+\Delta t)^2 + 8(5+\Delta t)\right] - \left(\frac{1}{5}(5)^2 + 8(5)\right)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{1}{5}(25 + 10\Delta t + (\Delta t)^2) + 40 + 8\Delta t\right] - (45)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5 + 2\Delta t + \frac{1}{5}(\Delta t)^2 + 40 + 8\Delta t - 45}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10\Delta t + \frac{1}{5}(\Delta t)^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 10 + \frac{1}{5}\Delta t \\
&= 10.
\end{aligned}
$$

Portanto, a velocidade no início da corrida é de 10 *m/s.*

(c) *Na chegada não sabemos de imediato qual foi o tempo gasto, mas sabemos que* $s(t_0) = 100$*. Logo, para descobrir o tempo gasto é preciso resolver a equação* $s(t) = \frac{1}{5}t^2 + 8t = 100$*. Mas,*

$$\frac{1}{5}t^2 + 8t = 100 \Rightarrow t^2 + 40t = 500 \Rightarrow t^2 + 40t - 500 = 0.$$

Logo, precisamos resolver a seguinte equação do segundo grau $t^2 + 40t - 500 = 0$*. Dela, obtemos os valores* $t = -50$ *e* $t = 10$*, e como os valores de* t *são positivos temos que* $t = 10$*. Agora, podemos aplicar o limite para calcularmos a velocidade do atleta ao final da corrida, para* $t = 10$*:*

$$
\begin{aligned}
v(10) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(10+\Delta t) - s(10)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{1}{5}(10+\Delta t)^2 + 8(10+\Delta t)\right] - \left(\frac{1}{5}(10)^2 + 8(10)\right)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{1}{5}(100 + 20\Delta t + (\Delta t)^2) + 80 + 8\Delta t\right] - (20 + 80)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20 + 4\Delta t + \frac{1}{5}(\Delta t)^2 + 80 + 8\Delta t - 100}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta t + \frac{1}{5}(\Delta t)^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 12 + \frac{1}{5}\Delta t \\
&= 12.
\end{aligned}
$$

Portanto, a velocidade do atleta na chegada é de 12 *m/s.*

2.2.2 Reta tangente

Uma reta é tangente a um círculo se a interseção dessa reta com ele é apenas um ponto. Devido às propriedades geométricas esta definição é satisfatória. No entanto, a definição de reta tangente a uma curva qualquer, ou até mesmo para o gráfico de uma função, não se aplica. A figura 2.2 mostra que essa definição nos leva à ambiguidade, pois tanto a reta r, quanto a reta s seriam "tangentes" ao gráfico ao gráfico da função.

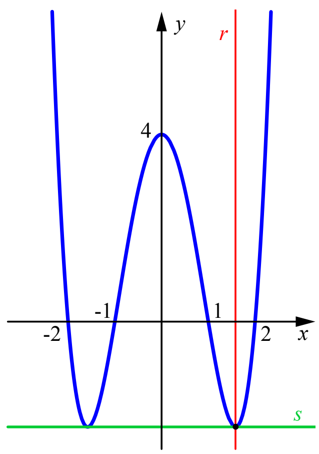


Figura 2.2 Retas "tangentes" à curva.

Com isso, é necessário uma definição mais apropriada para *reta tangente*. Define-se a reta tangente ao gráfico de uma função no ponto P_0 a reta "limite" das retas secantes ao gráfico que passam por P_0, ver figura 2.3.

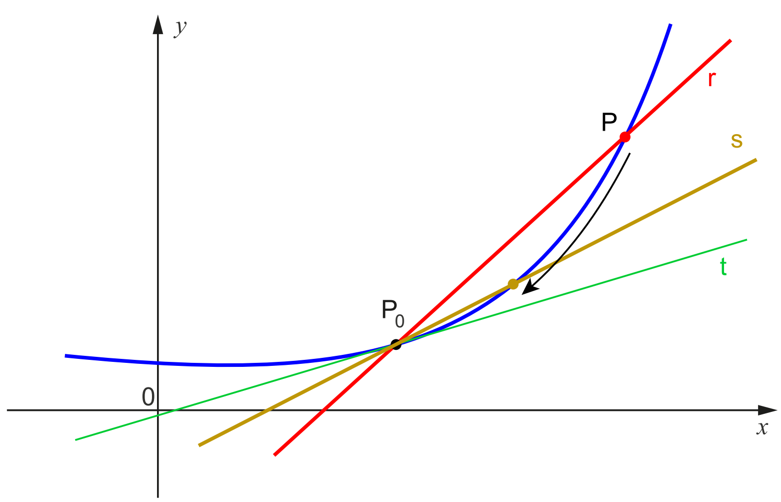


Figura 2.3 Reta tangente vista como a reta limite das restas secantes.

Mas precisamos "concretizar" essa definição algebricamente. Da figura 2.4, podemos ver que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto P_0 é o limite dos coeficientes angulares das retas secantes que passam por P_0 quando Δx tende a 0, ou seja $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

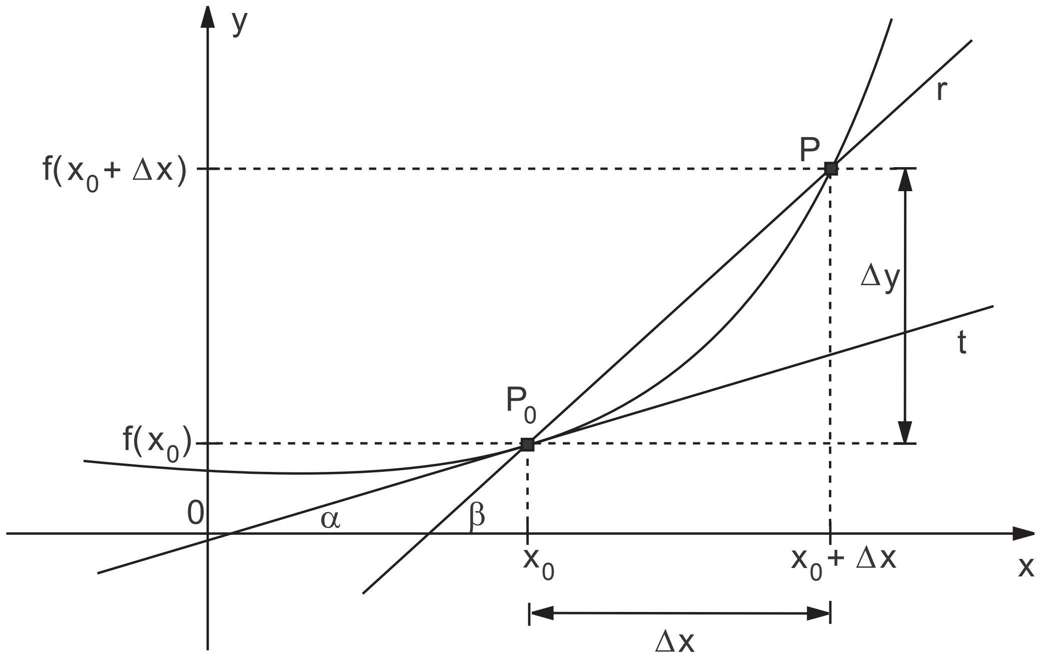


Figura 2.4 Definindo a reta tangente pelo coeficiente angular.

Exemplo 2.2. *Qual é a equação da reta* t*, que tangencia a parábola* $y = x^2$*, no ponto* $P = (-1, 1)$*? Qual é a equação da reta* r*, normal à parábola nesse ponto?*

Solução. *Sendo* $y = x^2$*, temos* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$*. Em* P*, temos* $x_0 = -1$*, logo o coeficiente angular da reta* t *é dado por*

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-1 + \Delta x)^2 - (-1)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (-2 + \Delta x) \\
&= -2.
\end{aligned}
$$

Assim, a reta t*, tangente à curva* $y = x^2$ *no ponto* P*, tem equação*

$$y - 1 = (-2)(x - (-1)),$$

ou seja, $y = -2x - 1$.

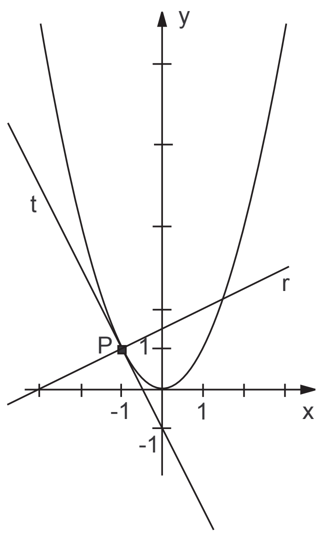


Figura 2.5 Representação gráfica da curva $y = x^2$ e da reta t tangente à curva no ponto $P = (-1, 1)$.

Exercícios Recomendados

EP 1. *A posição de um ponto P sobre um eixo x, é dada por $x(t) = 4t^2 + 3t - 2$, com t medido em segundos (s) e $x(t)$ em centímetros (cm).*

(a) Determine as velocidades médias de P nos seguintes intervalos de tempo: $[1;\, 1,2]$, $[1;\, 1,1]$, $[1;\, 1,01]$, $[1;\, 1,001]$.

(b) Determine a velocidade de P no instante 1 s.

(c) Determine os intervalos de tempo em que P se move no sentido positivo e aqueles em que P se move no sentido negativo. (P se move no sentido positivo ou negativo se $x(t)$ aumenta ou diminui, respectivamente, à medida em que t aumenta.)

EP 2. *Se um objeto é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial 110 m/s, sua altura $h(t)$, acima do chão ($h = 0$), após t segundos, é dada (aproximadamente) por $h(t) = 110t - 5t^2$ metro.*

(a) Quais são as velocidades do objeto nos instantes 3 e 4 segundos?

(b) Em que instante o objeto atinge sua altura máxima?

(c) Em que instante atinge o chão?

(d) Com que velocidade atinge o chão?

EP 3. *Considere a função* $y = f(x) = \dfrac{5}{1+x^2}$.

(a) *Ache as equações das retas tangentes ao gráfico de* $f(x)$ *nos pontos* $P = (0,5)$, $Q = (1,5/2)$ *e* $R = (-2,1)$;

(b) *Esboce o gráfico dessa curva,* plotando *pontos com os seguintes valores de* $x = -3$, -2, -1, 0, 1, 2 *e* 3. *No mesmo sistema cartesiano, esboce também as retas tangentes à curva nos pontos* P, Q *e* R.

EP 4. *Escreva as equações das retas tangente aos gráficos da função no ponto determinado*

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$ *no ponto de abcissa* $x = 3$.

(b) $f(x) = x^2$ *no ponto de abcissa* p.

2.3 Derivada

Nos dois casos apresentados na seção anterior, tivemos o limite como ferramenta para definirmos os conceitos de reta tangente e velocidade instantânea. Apesar da natureza distinta das situações, uma geométrica e a outra física, elas estão relacionadas com o limite de uma variação média de uma função real de uma única variável.

Definição 2.3. *Dada uma função* $f(x)$*, a função derivada* $f'(x)$ *(leia-se* "f linha de x"*) é a função definida quando consideramos, para cada* x*, sujeito a uma variação* $\Delta x \neq 0$*, a variação correspondente de* $y = f(x)$*,* $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ *e então calculamos o valor limite da razão*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

quando Δx *tende a* 0*. Ou seja,*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

desde que o limite exista.

Para um valor específico de $x = x_0$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

é a derivada de f, ou de $f(x)$, no ponto x_0.

A definição de derivada é importante para o entendimento de sua utilização em modelagem matemáticas de problemas, e para o entendimento dos resultados obtidos. Mas, é claro que o cálculo das derivadas não será feito diretamente pela definição, exceto em casos particulares de funções.

A classe funções mais simples é a das funções constantes, como não há variação, $\Delta y = 0$, temos

Proposição 2.1 (Derivada de função constante)**.** *Se* $f(x)$ *é uma função constante, então* $f'(x)$ *é a função nula.*

Demonstração. Como $f(x)$ é uma função constante temos que $f(x) = k$, para todo domínio de f e para algum valor real k, temos que $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = k - k = 0$, para todo x no domínio de f. Assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0,$$

para todo x no domínio de f. Portanto, $f'(x)$ é a função nula. □

A seguir, apresentamos a regra de derivação para as funções $f(x) = x^n$, para algum n inteiro positivo.

Proposição 2.2 (Tombamento da potência)**.** *Se* $f(x) = x^n$*,* n *inteiro positivo, então* $f'(x) = nx^{n-1}$

Demonstração. Da álgebra elementar, temos que o desenvolvimento da otência $(x + \Delta x)^n$ é

$$x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2(\Delta x)^{n-2} + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

Logo, como $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \frac{nx^{n-1}(\Delta x) + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x} \\ &= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x) + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Portanto, $(x^n)' = nx^{n-1}$. ☐

Outras notações são utilizadas para representar derivadas. Sendo $y = f(x)$, denota-se também a derivada de $f(x)$ por:

$$\frac{dy}{dx}, \quad D_x f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(x)$$

e denota-se $f'(x_0)$ por:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}, \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \text{ou} \quad D_x f(x_0).$$

O significado do valor $f'(x_0)$ é a taxa de variação, instantânea, de y, ou da função $f(x)$, no ponto $x = x_0$.

A operação de calcular a derivada de uma função é chamada de *derivação* ou *diferenciação*. Se o valor $f'(x_0)$ existir, diremos que a função f é diferenciável, ou derivável, em x_0. Se a função for diferenciável em todo seu domínio, diremos, simplesmente, que a função f é diferenciável, ou derivável.

A próxima proposição apresenta mais quatro regras de derivação.

Proposição 2.3. *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *funções reais de uma variável diferenciáveis e* c *uma constante real qualquer, então*

- $(cf(x))' = cf'(x)$.
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
- $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$.
- $(fg(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$

Demonstração. Ver demais títulos da bibliografia. □

Exemplo 2.3. *Sendo* $f(x) = 2x^3 - 3x^5$, *calcule* $f'(x)$.

Solução. *Das regras de derivação, temos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 - 3x^5)' \\ &= (2x^3 + (-3)x^5)' \\ &= (2x^3)' + ((-3)x^5)' && ((f+g)' = f' + g') \\ &= 2(x^3)' + (-3)(x^5)' && ((cf)' = cf') \\ &= 2 \cdot 3x^2 + (-3) \cdot 5x^4 && ((x^n)' = nx^{n-1}) \\ &= 6x^2 - 15x^4 \end{aligned}$$

Exemplo 2.4. *Seja* $y = -3t^6 + 21t^2 - 98$, *calcule* $\dfrac{dy}{dt}$.

Solução. *Aplicando as regras de derivação, temos*

$$\frac{dy}{dt} = (-3t^6 + 21t^2 - 98)' = -18t^5 + 42t$$

Exemplo 2.5. *Consideremos a função polinomial* $p(x) = (x^2 + x + 2)(3x - 1)$. *Calcule a derivada de* $p(x)$ *utilizando a regra do produto.*

Solução. *Aplicando a fórmula da derivada de um produto, obtemos*

$$\begin{aligned} p'(x) &= (x^2 + x + 2)'(3x - 1) + (x^2 + x + 2)(3x - 1)' \\ &= (2x + 1)(3x - 1) + (x^2 + x + 2) \cdot 3 \\ &= 9x^2 + 4x + 5 \end{aligned}$$

O exemplo a seguir mostra a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exemplo 2.6. *Seja* $y = \dfrac{1}{x}$, *calcular* $\dfrac{dy}{dx}$.

Solução. *Temos* $y = \dfrac{1}{x}$ *e*

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Logo, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}$. *Então,*

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Com o mesmo procedimento do último exemplo, podemos provar a seguinte regra:

Proposição 2.4. *Se $g(x)$ é uma função derivável, tal que $g(x) \neq 0$, para todo x no domíno de g, então*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Demonstração. Note que $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$. Sendo $y = 1/g(x)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)} \\
&= \frac{1}{g(x)+\Delta g} - \frac{1}{g(x)} \\
&= \frac{g(x) - (g(x)+\Delta g)}{(g(x)+\Delta g)\cdot g(x)} \\
&= \frac{-\Delta g}{(g(x)+\Delta g)\cdot g(x)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta g}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(g(x)+\Delta g)g(x)}$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta g}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(g(x)+\Delta g)g(x)}.$$

Como $\lim\limits_{\Delta x \to} |deltag = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -g'(x) \cdot \frac{1}{(g(x))^2} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

□

Exemplo 2.7. *Verifique que, sendo n um inteiro positivo, $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.*

Solução. *Aplicando o resultado da proposição 2.4, temos*

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Proposição 2.5 (Derivada de um quociente)**.**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Demonstração. Exercício ao aluno! **Dica:** $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$. □

Exemplo 2.8. *Calcular* y', *sendo* $y = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

Solução. *Aplicando a fórmula para a derivada de um quociente, temos*

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)' \\ &= \frac{(x^3-1)'(x^3+1)-(x^3+1)'(x^3-1)}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^3+1)-3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2} \end{aligned}$$

2.4 Regra da cadeia

A *regra da cadeia* é uma regra de derivação que nos permite calcular a derivada de uma *composição* (ou um *encadeamento*) de funções, tais como $f(g(x))$ ou $f(g(h(x)))$, conhecendo-se as derivadas $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$.

Quando temos uma função composta, tal como $y = (x^3+x-1)^{10}$, podemos decompô-la em funções *elementares*. Simplesmente escrevemos $y = u^{10}$, com $u = x^3 + x - 1$.

Na notação de Leibniz, a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

No caso, teremos então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 10u^9 \cdot (3x^2+1) \\ &= 10(x^3+x-1)^9(3x^2+1) \end{aligned}$$

Repetindo tudo, passando da notação de Leibniz para a notação de Lagrange, temos $y = f(u)$, com $u = g(x)$, e então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u) \cdot g'(x) \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Teorema 2.6 (Derivação em cadeia)**.** *Se* $y = f(u)$ *e* $u = g(x)$ *então*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Em outras palavras, sendo $y = f(g(x))$*, tem-se*

$$y' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

A ideia intuitiva que inspira a *regra da cadeia* é a seguinte: sendo $y = f(u)$ e $u = g(x)$, temos $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ e, $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$

Assumindo, por simplificação, que $\Delta u \neq 0$ sempre que $\Delta x \neq 0$, o que nem sempre ocorre, temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Note que quando Δx tende a 0, Δu também tende a 0, pois g é contínua, e assim

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

e portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Nos dispensaremos da tarefa de fazer uma dedução mais rigorosa da regra da cadeia, um procedimento possível mas deveras sofisticado.

Exemplo 2.9. *Calcular* $\frac{dy}{dx}$*, sendo* $y = ((x^2 + 1)^{10} + 1)^8$*.*

Solução. *Escrevemos*

$$y = u^8, \quad u = v^{10} + 1, \quad v = x^2 + 1.$$

Assim, estamos compondo (encadeando) três funções. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\
&= 8u^7 \cdot 10v^9 \cdot 2x \\
&= 160(v^{10} + 1)^7 (x^2 + 1)^9 x \\
&= 160x((x^2 + 1)^{10} + 1)^7 (x^2 + 1)^9
\end{aligned}$$

2.5 Derivação implícita

Muitas vezes, duas variáveis x e y são tais que, em um certo intervalo de valores de x, y depende de x, ou seja, y é uma função da variável x, mas em lugar de uma fórmula $y = f(x)$, temos uma equação $F(x, y) = c$, inter-relacionando ambas as variáveis, tal como nos dois exemplos a seguir.

(1) $x^2 + y^2 = 2$

(2) $x^3 + y^3 = x + y + xy$

Às vezes, é possível resolver a equação dada em y, ou seja, "isolar" y no primeiro membro da equação, expressando explicitamente y como variável dependendo de x. Por exemplo, no caso da equação (1), podemos fazer

$$y^2 = 2 - x^2,$$

e então,

$$y = \pm\sqrt{2 - x^2}.$$

Neste caso, deduzimos então que as funções $y = f_1(x) = \sqrt{2 - x^2}$ e $y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}$ ambas satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 2$.

No caso da equação (2), podemos verificar que, por exemplo, o par $(1, 0)$ satisfaz a equação, mas não nos é óbvio como resolver a equação em y e obter uma função $y = f(x)$ satifazendo $f(1) = 0$ e $x^3 + (f(x))^3 = x + f(x) + xf(x)$.

No entanto, em ambos os casos, é quase sempre possível obter a derivada $\frac{dy}{dx}$, em um determinado ponto x_0, se conhecemos também o valor correspondente y_0.

Para isto, derivamos ambos os membros da equação $F(x, y) = c$, considerando y como função de x, e usamos as regras de derivação, bem como a regra da cadeia, quando necessário.

Exemplo 2.10. *Determine* $\frac{dy}{dx}$*, sendo* y *uma função de* x *dada implicitamente pela equação* $x^2 + y^2 = 2$*.*

Solução. *Inicialmente note que, sendo* y *uma função de* x*, temos, pela regra da cadeia,* $(y^2)' = 2y \cdot y'$*. Assim, para obtermos* $\frac{dy}{dx}$*, ou* y'*, no caso da equação* $x^2 + y^2 = 2$*, fazemos*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 2 &\Rightarrow (x^2 + y^2)' = (2)' \\ &\Rightarrow (x^2)' + (y^2)' = 0 \\ &\Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \\ &\Rightarrow yy' = -x \\ &\Rightarrow y' = -\frac{x}{y}, \end{aligned}$$

desde que $y \neq 0$*. Isto quer dizer que, se* y *é função de* x *e* $Y \neq 0$ *satisfazendo* $x^2 + y^2 = 2$*, então* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$*.*

Como vimos, as funções $y = f_1(x) = \sqrt{2-x^2}$ *e* $y = f_2(x) = -\sqrt{2-x^2}$ *ambas satisfazem* $x^2 + y^2 = 2$. *Pela derivação "implícita" efetuada acima, temos*

(i) Se $y = f_1(x)$, *então* $\dfrac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f_1(x)}$. *Neste caso,* $y' = -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$;

(ii) Se $y = f_2(x)$, *então* $\dfrac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f_2(x)}$. *Neste caso,* $y' = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

Exemplo 2.11. *Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$ *a partir da equação* $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$ *por derivação implícita.*

Solução. *Para obtermos* $\dfrac{dy}{dx}$ *(ou* y'*) no caso da equação* $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$, *fazemos*

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y &\Rightarrow (x^3 + y^3)' = (x^2y^2 + x + y)' \\
&\Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' = (x^2y^2)' + 1 + y' \\
&\Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' + 1 + y' \\
&\Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' + 1 + y' \\
&\Rightarrow 3y^2y' - 2x^2yy' - y' = 1 + 2xy^2 - 3x^2 \\
&\Rightarrow (3y^2 - 2x^2y - 1)y' = 1 + 2xy^2 - 3x^2 \\
&\Rightarrow y' = \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1},
\end{aligned}$$

desde que $3y^2 - 2x^2y - 1 \neq 0$.

No que no último exemplo não sabemos como é a expressão de y em função somente de x. No próximo exemplo veremo que não precisamos conhecer tal expressão.

Exemplo 2.12. *Obtenha a reta tangente à curva* $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$ *no ponto* $P = (1, 0)$.

Solução. *Note que o problema só faz sentido porque o ponto* $(1, 0)$ *de fato pertence à curva* $1^3 + 0^3 = 1^2 \cdot 0^2 + 1 + 0$.

O cálculo de $\dfrac{dy}{dx}$, *já foi realizado no exemplo anterior, em que calculamos* $y' = \dfrac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}$.

Como $y(1) = 0$, *o coeficiente angular da reta tangente procurada é*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}\right|_{x=1} = \frac{1-3}{-1} = 2.$$

Portanto, a reta procurada tem equação $y - 0 = 2(x - 1)$, *ou seja,* $y = 2x - 2$.

Proposição 2.7. *Sejam* p *e* q *inteiros, com* $q > 0$*, então*

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Ou seja, se r *é um expoente racional, então*

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Demonstração. Sendo p e q inteiros, $q > 0$, se $y = x^{\frac{p}{q}}$, então $y^q = x^p$. Por derivação implícita, obtemos então que $(y^q)' = (x^p)'$. Logo, $qy^{q-1}y' = px^{p-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\ &= \frac{px^p x^{-1}}{qy^q y^{-1}} \\ &= \frac{px^p x^{-1}}{qx^p y^{-1}} \\ &= \frac{p}{q} y x^{-1} \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}} x^{-1} \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.13. *Calcule a derivada de* $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 5}$.

Solução. *Temos* $f(x) = (3x^2 + 3x + 5)^{\frac{1}{3}}$.

Aplicando derivação em cadeia e a regra 2.7, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(3x^2 + 3x + 5)^{\frac{1}{3}}]' \\ &= \frac{1}{3}(3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 3x + 5)' \\ &= \frac{1}{3}(3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(6x + 3) \\ &= (3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(2x + 1) \\ &= \frac{2x + 1}{(3x^2 + 3x + 5)^{2/3}} \\ &= \frac{2x + 1}{\sqrt[3]{(3x^2 + 3x + 5)^2}} \end{aligned}$$

Solução alternativa. *Sendo* $y = f(x)$*, temos* $y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 5}$*, e portanto,*

$$y^3 = 3x^2 + 3x + 5.$$

Aplicando derivação implícita, obtemos $3y^2y' = 6x + 3$*, ou seja,*

$$y' = \frac{6x+3}{3y^2}.$$

Logo,

$$y' = \frac{2x+1}{(\sqrt[3]{3x^2+3x+5})^2} = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{(3x^2+3x+5)^2}}.$$

Exercícios Recomendados

EP 5. *Calcule* $f'(x)$*, para cada uma das funções* $f(x)$ *dadas abaixo, cumprindo as seguintes etapas*

I. *Primeiro desenvolva a expressão* $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$*, fazendo as simplificações cabíveis.*

II. *Em seguida obtenha, uma expressão simplificada para* $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$*.*

III. *Finalmente, calcule o limite* $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$*.*

(a) $f(x) = 17 - 6x$

(b) $f(x) = 7x^2 - 5$

(c) $f(x) = x^3 + 2x$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$

(f) $f(x) = x^5$

(g) $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$

EP 6. *Usando as regras de derivação estabelecidas, calcule as derivadas das seguintes funções.*

(a) $f(t) = -6t^3 + 12t^2 - 4t + 7$

(b) $f(t) = (3t + 5)^2$

(c) $f(x) = (-2x^2 + 1)^3$

(d) $f(x) = (3x^2 - 7x + 1)(x^2 + x - 1)$

(e) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$

EP 7. *Determine o* domínio *de cada uma das seguintes funções. Represente-o como um intervalo ou uma reunião de intervalos de* $\mathbb{R}$*. No nosso contexto, o domínio de uma função* f *é o conjunto de todos os números reais* x *para os quais* $f(x)$ *é um número real.*

(a) $f(x) = x^3 - 5x + 3$

(b) $f(x) = -\sqrt{4-x}$

(c) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

EP 8. *Utilizando regras de derivação previamente estabelecidas, calcule as derivadas das seguintes funções.*

(a) $f(x) = \dfrac{4x-5}{3x+2}$

(b) $f(z) = \dfrac{8 - z + 3z^2}{2 - 9z}$

(c) $f(w) = \dfrac{2w}{w^3 - 7}$

(d) $s(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9x + 2}{7}$

EP 9. *Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$

(a) $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + 1\right)^5 + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^4$

(b) $y = \dfrac{((x^3+7)^4 + x)^5}{x^2 + 1}$

(c) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{10}$

EP 10. *Calcule as derivadas das seguintes funções.*

(a) $f(x) = (x^2 - 3x + 8)^3$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^4}$

(c) $F(v) = (17v - 5)^{1000}$

(d) $s(t) = (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-2}$

(e) $k(u) = \dfrac{(u^2+1)^3}{(4u-5)^5}$

EP 11. *Determine a equação da reta tangente à curva no ponto indicado, e os pontos do gráfico em que a reta tangente à curva é horizontal, nos casos*

(a) $y = (4x^2 - 8x + 3)^4, \quad P = (2, 81)$.

(b) $y = (2x - 1)^{10}, \quad P = (1, 1)$.

EP 12. *Se* $k(x) = f(g(x))$, *com* $f(2) = -4$, $g(2) = 2$, $f'(2) = 3$ *e* $g'(2) = 5$, *calcule* $k'(2)$.

EP 13. *Determine* y', *em que* y *é uma função de* x *dada implicitamente pela equação*

(a) $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

(b) $\dfrac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

(c) $(y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$

EP 14. *Verifique primeiramente que o ponto* P *pertence à curva dada e ache a equação da reta tangente à curva no ponto* P.

(a) $xy = -16, \quad P = (-2, 8)$;

(b) $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0, \quad P = (2, -3)$.

EP 15. *Calcule as derivadas das seguintes funções.*

(a) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$

(b) $f(x) = (7x + \sqrt{x^2+3})^6$

(c) $f(t) = \dfrac{4}{(9t^2 + 16)^{2/3}}$

(d) $g(z) = \dfrac{\sqrt[3]{2z+3}}{\sqrt{3z+2}}$

(e) $F(v) = \dfrac{5}{\sqrt[5]{v^5 - 32}}$

EP 16. *Calcule* $\frac{dy}{dx}$ *se* *(a)* $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$

(b) $3x^2 + \sqrt[3]{xy} = 2y^2 + 20$

EP 17. *Uma função é* par *se* $f(-x) = f(x)$ *para todo* x *em seu domínio, e é* ímpar *se* $f(-x) = -f(x)$ *para todo* x *em seu domínio. Sendo* f *derivável, demonstre que*

(i) Se f *é par, então* f' *é ímpar;*

(ii) Se f *é ímpar, então* f' *é par.*

2.6 Derivadas de funções trigonométricas

Nesta seção serão cálculadas as derivadas das funções trigonométricas. Estaremos também apresentando as funções trigonométricas inversas e deduzindo suas derivadas.

Para as demonstrações das derivadas das funções sen e $\cos$ usaremos o *primeiro limite fundamental trigonométrico*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Teorema 2.8. *As derivadas das funções* sen *e* $\cos$ *são:*

$$D_x \operatorname{sen} x = \cos x \qquad D_x \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

Demonstração. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Consideremos $\Delta x = h$, assim

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}. \end{aligned}$$

Logo, $f'(x) = \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$. Como $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ e $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$, temos

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x.$$

Portanto, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para função $\cos$ basta usarmos a relação $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \\ &= (\operatorname{sen} x) \cdot (-1) \\ &= -\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

□

Uma vez que conhecemos as derivadas de sen e $\cos$ conseguimos obter as derivadas das demais funções trigonométricas utilizando a regra do quociente, o que nos fornece o seguinte resultado.

Proposição 2.9. *As derivadas das funções trigonométricas são:*

(i) $D_x \operatorname{tg} x = \sec^2 x$*;*

(ii) $D_x \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cossec}^2 x$*;*

(iii) $D_x \sec x = \sec x \ \operatorname{tg} x$*;*

(iv) $D_x \operatorname{cossec} x = -\operatorname{cossec} x \ \operatorname{cotg} x$*.*

2.7 Funções trigonométricas inversas e suas derivadas

Definição 2.4 (Função arco-seno)**.** *Para cada número real* a*,* $-1 \leq a \leq 1$*, existe um único arco orientado* α*,* $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$*, tal que* $\operatorname{sen} \alpha = a$ *(ver figura 2.6). O valor* α *é chamado de* arcosseno de a*. Note que o arco-seno de* a *é o arco cujo seno é* a*. Denotamos o arco coseno de* a *por* $\operatorname{arcsen} a$*.*

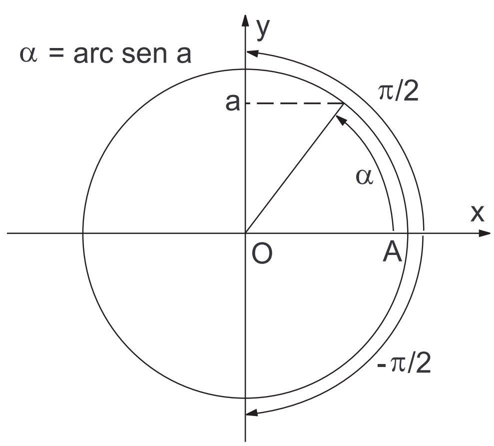


Figura 2.6 Arco-seno.

Da definição de arco-seno temos que

$$\alpha = \operatorname{arcsen} a \quad \text{se, e somente se, } \operatorname{sen} \alpha = a \text{ e } -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2.$$

Exemplo 2.14. *Temos*

$$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Definição 2.5 (Função arco-cosseno)**.** *Para cada número real* a*,* $-1 \leq a \leq 1$*, existe um único arco orientado* β*,* $0 \leq \beta \leq \pi$*, tal que* $\cos \beta = a$ *(ver figura 2.7). O valor* β *é chamado de* arco-cosseno de a*. Note que o arco-cosseno de* a *é o arco cujo cosseno é* a*. Denotamos o arco-cosseno de* a *por* $\arccos a$*.*

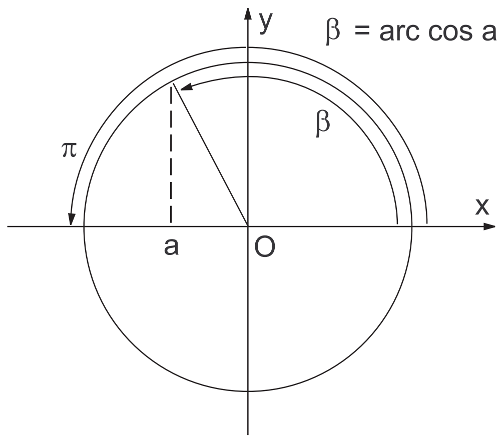


Figura 2.7 Arco-cosseno.

Da definição de arco-cosseno temos que

$$\beta = \arccos a \quad \text{se, e somente se, } \cos\beta = a \text{ e } 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Exemplo 2.15. *Temos*

$$\arccos 1 = 0, \quad \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arccos(-1) = \pi.$$

Definição 2.6 (Função arco-tangente)**.** *Para cada número real a, existe um único arco orientado γ, $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, tal que $\operatorname{tg}\gamma = a$. (ver figura 2.8). O valor γ é o* arco-tangente de a*. Note que o arco-tangente de a é o arco cuja tangente é a. enotamos o arco-tangente de a por $\operatorname{arctg} a$.*

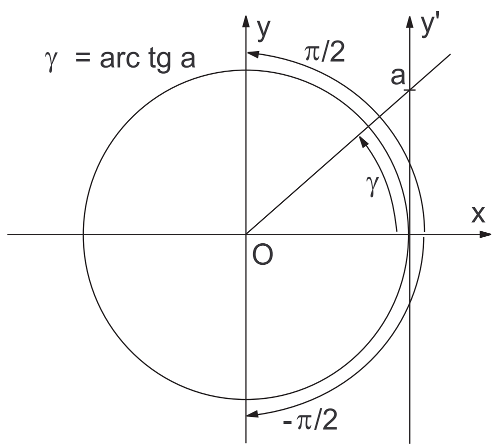


Figura 2.8 Arco-tangente.

Da definição de arco-tangente temos que

$$\gamma = \operatorname{arctg} a \quad \text{se, e somente se, } \operatorname{tg}\gamma = a \text{ e } -\pi/2 < \gamma < \pi/2.$$

A proposição a seguir mostra as derivadas das três funções inversas trigonométricas.

Proposição 2.10. *Temos as seguintes derivadas*

(i) $D_x(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *para* $-1 < x < 1$.

(ii) $D_x(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *para* $-1 < x < 1$.

(iii) $D_x(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (i) Sendo $-1 < x < 1$, $y = \operatorname{arcsen} x$ se, e somente se,$\operatorname{sen} y = x$ e $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$. Por derivação implícita da equação $\operatorname{sen} y = x$, temos

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} y)' = (x)' &\Rightarrow (\cos y) \cdot y' = 1 \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Portanto, $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(ii) Para $-1 < x < 1$, $y = \arccos x$ se, e somente se, $\cos y = x$ e $0 < y < \pi$. Por derivação implícita temos

$$\begin{aligned}(\cos y)' = 1 &\Rightarrow -(\operatorname{sen} y) \cdot y' = 1 \\ &\Rightarrow y' = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Portanto, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(iii) Finalmente, para $x \in \mathbb{R}$, $y = \operatorname{arctg} x$ se, e somente se, $\operatorname{tg} y = x$ e $-\dfrac{pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$. Por derivação implícita temos

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} y)' = 1 &\Rightarrow (\sec^2 y) \cdot y' = 1 \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Portanto, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

□

Exercícios Recomendados

EP 1. *Sendo* $f(x) = \operatorname{sen} x$*, mostre que* $f'(x) = \cos x$*, fazendo uso da fórmula*

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

para calcular o limite de

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$

quando $\Delta x \to 0$*.*

EP 2. *A distância* $d = OA$ *(veja figura 2.9) que um projétil alcança, quando disparado de um canhão com velocidade inicial* v_0*, por um cano inclinado com um ângulo de elevação* φ *em relação ao chão (horizontal), é dada pela fórmula*

$$d = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} 2\varphi$$

sendo g *a aceleração da gravidade local. Qual é o ângulo* φ *que proporciona alcance máximo?*

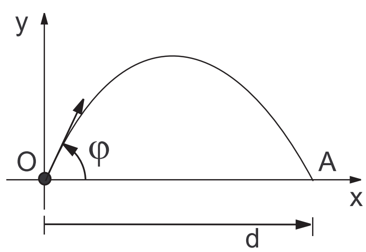


Figura 2.9 Ilustação do disparo do projétil.

EP 3. *Calcule as derivadas das seguintes funções.*

(a) $y = \sec \sqrt{x-1}$

(b) $y = \operatorname{cossec}(x^2 + 4)$

(c) $y = \operatorname{cotg}(x^3 - 2x)$

(d) $f(x) = \cos 3x^2$

(e) $y = \dfrac{\cos 4x}{1 - \operatorname{sen} 4x}$

(f) $g(x) = \cos^2 3x$

(g) $y = \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x$

(h) $f(x) = \text{tg}^3(3x+1)$

(i) $y = x^2 \sec^2 5x$

(j) $f(x) = \ln|\text{cossec}\, x + \text{cotg}\, x|$

(k) $y = e^{-3x}\, \text{tg}\, \sqrt{x}$

(l) $g(x) = \ln(\ln \sec 2x)$

(m) $y = x^{\text{sen}\, x}$

(n) $f(x) = \ln|\sec x + \text{tg}\, x|$

(o) $y = \text{arcsen}\, \sqrt{x}$

(p) $f(x) = (1 + \arccos 3x)^3$

(q) $f(x) = \ln \text{arctg}\, x^2$

(r) $y = 3^{\text{arcsen}\, x^3}$

(s) $g(x) = (\text{tg}\, x)^{\text{arctg}\, x}$

EP 4. *Determine y' por derivação implícita.*

(a) $y = x\ \text{sen}\, y$

(b) $e^x\ \cos y = x\, e^y$

(c) $x^2 + x\ \text{arcsen}\, y = ye^x$

EP 5. *Esboce os gráficos das funções, analisando-as previamente através de derivadas e limites apropriados.*

(a) $y = x + \text{sen}\, x$

(b) $y = \text{arctg}\, x$

(c) $y = x + \text{arctg}\, x$

2.8 Funções exponenciais e logarítmicas

Nesta secção será feita uma pequena revisão das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$, e também, uma apresentação do número e, uma constante muito importante da matemática.

2.8.1 Pequena revisão de potências

Sabemos que, sendo a um número real positivo, e $\dfrac{m}{n}$ um número racional, defini-se $a^{m/n}$ por

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Para definirmos a potência a^α para um valor real α precisamos de argumentos matemáticos mais sofisticados.

Se α é um número irracional, existe uma sequência de números racionais que tende a α (uma sequência de aproximações de α por números racionais), ou seja, existe uma sequência de números racionais

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$.

Por exemplo, se $\alpha = \sqrt{2} \approx 1,414213562$, existe uma sequência de aproximações de $\sqrt{2}$, cujos cinco primeiros termos são dados na primeira coluna da tabela abaixo:

$\alpha_1 = 1,4$	$(\alpha_1^2 = 1,96)$	$\lvert\alpha_1 - \alpha\rvert \approx 0,014213562 < 0,1$
$\alpha_2 = 1,41$	$(\alpha_2^2 = 1,9881)$	$\lvert\alpha_2 - \alpha\rvert \approx 0,004213562 < 0,01$
$\alpha_3 = 1,414$	$(\alpha_3^2 = 1,999396)$	$\lvert\alpha_3 - \alpha\rvert \approx 0,000213562 < 0,001$
$\alpha_4 = 1,4142$	$(\alpha_4^2 = 1,99996164)$	$\lvert\alpha_4 - \alpha\rvert \approx 0,000013562 < 0,0001$
$\alpha_5 = 1,41421$	$(\alpha_5^2 = 1,99998992)$	$\lvert\alpha_5 - \alpha\rvert \approx 0,000003562 < 0,00001$

Uma calculadora nos fornece uma aproximação de $\sqrt{2}$ com 12 casas decimais: $\sqrt{2} \approx 1,414213562373$. A sequência acima, de aproximações sucessivas de $\sqrt{2}$, é tal que $|\alpha_n - \sqrt{2}| < 10^{-n}$, e assim $\lim\limits_{n\to+\infty} |\alpha_n - \sqrt{2}| = 0$, e então $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \sqrt{2}$ (a segunda coluna da tabela acima sugere que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^2 = 2$).

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e sendo α um número irracional, e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ uma sequência de racionais com limite α, a^α é definido como o limite da sequência

$$a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, a^{\alpha_3}, a^{\alpha_4}, \ldots.$$

Por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ é o limite da sequência

$$2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \ldots.$$

Uma calculadora nos fornece as aproximações:

$$
\begin{aligned}
2^1 &= 2 & & \\
2^{1,4} &= 2^{14/10} = \sqrt[10]{2^{14}} & &\approx 2,6390 \\
2^{1,41} &= 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}} & &\approx 2,6574 \\
2^{1,414} &= 2^{1414/1000} & &\approx 2,6647 \\
2^{1,4142} &= 2^{14142/10000} & &\approx 2,6651
\end{aligned}
$$

No que diz respeito a potências de base real positiva e expoente real, temos as seguintes boas propriedades, que aceitaremos sem demonstração.

Proposição 2.11. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, *e* $x, y \in \mathbb{R}$, *então*

(i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;

(iv) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;

(v) $a^0 = 1$;

(vi) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.

2.8.2 A função exponencial

Sendo a um número real, positivo, $a \neq 1$, define-se a função exponencial de base a por $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tomamos $a \neq 1$ pela simples razão de que $1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que torna a^x constante no caso em que $a = 1$ (funções constantes não são classificadas como funções exponenciais). Além disso, tomamos $a > 0$ porque, se $a < 0$, a^x não se define para uma infinidade de valores reais de x. Por exemplo, se $a = -4$ então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a^{1/2n} = (-4)^{1/2n} = \sqrt[2n]{-4}$ não se define como número real.

Assumiremos que, se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial dada por $f(x) = a^x$, é contínua em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Assumiremos também que se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente, com $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, e se $0 < a < 1$ a função é decrescente, com $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0^+ (= 0)$.

Na figura 2.10 temos esboços dos gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

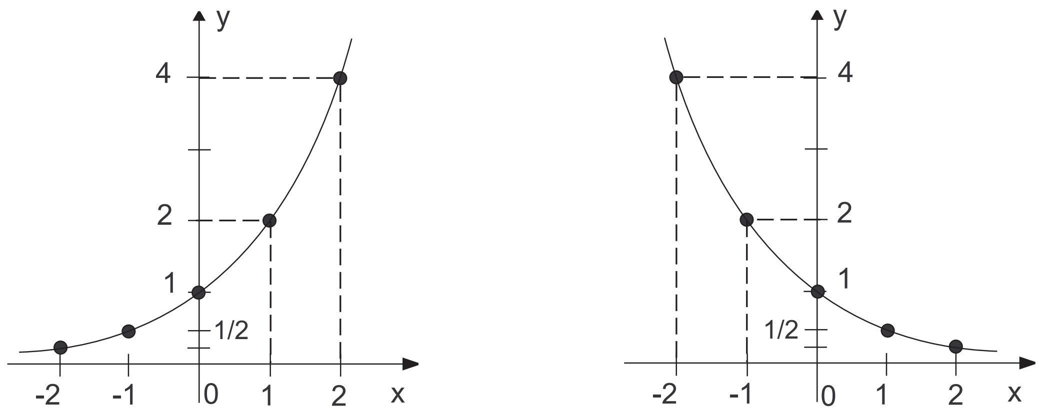


Figura 2.10 Gráficos de $y = 2^x$ à esquerda e de $y = (1/2)^x$ à direita.

Baseados nos gráficos acima temos a seguinte *álgebra de limites*:

- Se $a > 1$,

$$a^{+\infty} = +\infty \quad \text{e} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ = 0$$

- Se $0 < a < 1$,

$$a^{+\infty} = 0^+ = 0 \quad \text{e} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Por exemplo,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = 2^{+\infty} = +\infty,$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0,$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty.$

2.8.3 Logaritmos e funções logarítmicas

Se $a > 0$, $a \neq 1$, e $x > 0$, o *logaritmo de* x *na base* a, denotado por $\log_a x$, é o expoente ao qual devemos elevar a para obtermos x, ou seja

$$\log_a x = y \text{ se, e somente se, } a^y = x.$$

Assim $a^{\log_a x} = x$.

Por exemplo,

- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$;
- $\log_9 27 = \dfrac{3}{2}$, pois $9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$;
- $\log_2 \dfrac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = 1/4$;
- $\log_{1/2} 16 = -4$, pois $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 16$;
- $\log_2 5 \approx 2,3219$, pois $2^{2,3219} \approx 4,9999$.

Note que $\log_2 5$ não é um número racional, pois se $\log_2 5 = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros positivos, então $2^{m/n} = 5$. Daí, $2^m = (2^{m/n})^n = 5^n$, o que é impossível pois 2^m é par e 5^n é ímpar.

Listamos aqui, sem dedução, algumas propriedades elementares dos logaritmos:

Proposição 2.12. *Sendo x e y reais positivos, z real qualquer, e $a, b > 0$, com $a, b \neq 1$, então*

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a x^z = z \cdot \log_a x$;
- $\log_a x^{1/z} = \dfrac{\log_a x}{z}$, *se* $z \neq 0$;
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Assim, por exemplo, a passagem dos logaritmos decimais (base 10) para os logaritmos de base 2 é dada por

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2} = \frac{\log x}{\log 2}.$$

Sendo a função $f(x) = a^x$ contínua e crescente quando $a > 0$, e decrescente quando $0 < a < 1$, temos que $\log_a x$ é definida para todo $x > 0$.

Por exemplo, $f(x) = 2^x$ é crescente, $2^2 = 4$ e $2^3 = 8$. Pela continuidade de f, a imagem do intervalo $[2,3]$, pela função f, é o intervalo $[4,8]$. Existe então $x_0 \in [2,3]$ tal que $2^{x_0} = 5$. Assim, $\log_2 5 = x_0$. Portanto, realmente existe o número real $\log_2 5$.

Além disso, se $a > 0$, $\log_a$ é crescente, e se $0 < a < 1$, $\log_a$ é decrescente.

Na figura 2.11, temos esboços dos gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

Admitiremos que $f(x) = \log_a x$ é contínua no seu domínio $]0, +\infty[$, ou seja, se $x_0 > 0$, então $\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$. Além disso, temos ainda (confira isto observando os gráficos da figura 2.11).

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \log_a(0^+) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

bem como também (confira observando os gráficos da figura 2.11)

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

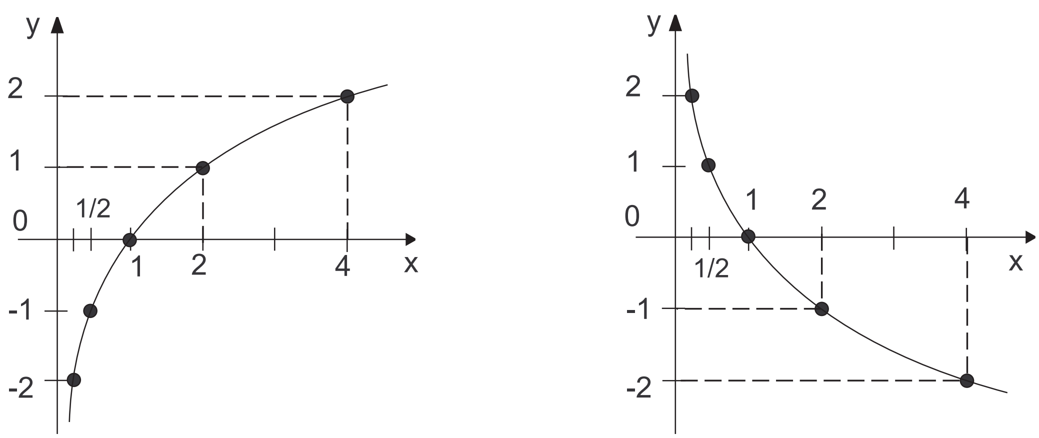


Figura 2.11 Gráficos de $y = \log_2 x$ à esquerda e de $y = \log_{1/2} x$ à direita.

2.8.4 O número e

Na matemática universitária, há duas constantes numéricas muito importantes. São elas o número $\pi \approx 3,14159$, e o número $e \approx 2,71828$. A constante π é conhecida pela constante que aparece em geometria e trigonometria, que é a relação entre o comprimento da circunferência e seu raio. Para constante e daremos a seguinte definição:

Definição 2.7. *O número e é definido como sendo o limite*

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

sendo n apenas valor naturais. O número e é irracional.

Tabela 2.1

n	$1/n$	$1+\dfrac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	$2^1 = 2$
10	$0,1$	$1,1$	$(1,1)^{10} \approx 2,59374$
100	$0,01$	$1,01$	$(1,01)^{100} \approx 2,70481$
1000	$0,001$	$1,001$	$(1,001)^{1000} \approx 2,71692$
10000	$0,0001$	$1,0001$	$(1,0001)^{10000} \approx 2,71815$
100000	$0,00001$	$1,00001$	$(1,00001)^{100000} \approx 2,71828$

Observe a tabela 2.1 de valores (aproximados) de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, para $n = 1$, 10, 100, 1000, 10000, 100000. Note que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{+\infty} = 1$.

Assim, podemos enganosamente intuir que, quando n é muito grande, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 1^n = 1$ (mesmo calculadoras de boa qualidade podem nos induzir a este erro). Neste caso, nossa intuição é falha, pois pode ser demonstrado que o número $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ cresce à medida em que n cresce, sendo $a_1 = 2$, e $2 < a_n < 3$ para cada $n \geq 2$. Na tabela 2.1, ilustramos o fato de que quando n é muito grande,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828.$$

Assim, temos que o símbolos $1^{-\infty}$ e $1^{+\infty}$ significam indeterminações. Vamos admitir, sem demonstração, que também, para x real

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Definição 2.8. *Se $x > 0$, chama-se* logaritmo natural *ou* logaritmo neperiano *de x, denotado por $\ln x$, ao logaritmo*

$$\ln x = \log_e x.$$

Como $e \approx 2,71828 > 1$, a função $f(x) = \ln x$ é crescente e seu gráfico tem, qualitativamente, a forma do gráfico de $g(x) = \log_2 x$, figura 2.11 gráfico à esquerda. A passagem dos logaritmos naturais para os logaritmos decimais (base 10) é dada por

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

2.8.5 Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

Veremos agora como são as derivadas das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$. O próximo Teorema ilustra a importância da constante e como base de uma função exponencial natural. Antes de enunciarmos o teorema, veremos um lema que será importante na demonstração do teorema.

Lema 2.13. *Temos que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Demonstração. Calcularemos o limite através de uma interessante mudança de variável. Fazendo $e^h - 1 = z$, temos $e^h = 1 + z$, e então $h = \log_e(1+z)$. Logo, $h \to 0$ se, e somente se, $z \to 0$. Então,

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\log_e(1+z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\dfrac{\log_e(1+z)}{z}}$$
$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{\log_e\left[(1+z)^{1/z}\right]} = \frac{1}{\log_e e} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Teorema 2.14. *As derivadas das funções exponenciais são:*

(i) Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$.

(ii) Se $f(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, então $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Demonstração. (i) Seja $f(x) = e^x$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot 1 \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Portanto, sendo $f(x) = e^x$, temos $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = e^x$.

(ii) Para calcular a derivada de a^x, fazemos

$$a^x = e^{\log_e a^x} = e^{x \log_e a} = e^{x \ln a} = e^{(\ln a)x}$$

e aplicando a regra da cadeia, $(e^u)' = e^u \cdot u'$, obtemos

$$(a^x)' = \left[e^{(\ln a)x}\right]' = e^{(\ln a)x} \cdot ((\ln a)x)' = e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

□

Quanto a funções logarítmicas, temos o seguinte

Teorema 2.15. *As derivadas das funções logarítmicas são:*

(i) $D_x(\ln x) = \dfrac{1}{x}$;

(ii) $D_x(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$;

(iii) $D_x(\ln |x|) = \dfrac{1}{x}$;

(iv) $D_x(\log_a |x|) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Demonstração. (i) Se $y = \ln x$, então $y = \log_e x$, e portanto $x = e^y$. Por derivação implícita em relação a x, temos $(x)' = (e^y)'$. Logo, $1 = e^y \cdot y'$. Portanto, $y' = \dfrac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$, ou seja, $(\ln x)' = 1/x$.

(ii) Temos que $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{(\ln x)'}{\ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Para derivar $\ln |x|$, ou $\log_a |x|$, lembremo-nos de que $|x| = x$ quando $x > 0$, e $|x| = -x$ quando $x < 0$. Assim, se $x > 0$, recaímos nos ítens (i) e (ii).

Se $x < 0$, $(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{-1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. O item (iv) é deduzido analogamente. □

Agora estamos em condições de provar que a regra do “tombamento”da potência é válida para qualquer potência real.

Proposição 2.16. *Se α é uma constante real qualquer e $x > 0$, então*

$$D_x(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Demonstração. Se $y = x^\alpha$ então $\ln y = \ln x^\alpha = \alpha \ln x$. Por derivação implícita, em relação a x, temos que $(\ln y)' = (\alpha \ln x)'$. Logo, $\dfrac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \dfrac{1}{x}$. Portanto, $y' = y \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha x^\alpha \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$. □

No exemplo seguinte, fazemos uso da função $\ln$ para derivar uma função exponencial de base e expoente variáveis.

Exemplo 2.16 (Uma função exponencial de base e expoente variáveis)**.** *Calcular a derivada de* $f(x) = x^x$*.*

Solução. *Sendo* $y = x^x$*, temos* $\ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x$*. Derivando ambos os membros em relação a* x*, temos*

$$\begin{aligned}(\ln y)' = (x \cdot \ln x)' &\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot (\ln x)' \\ &\Rightarrow y' = y\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(1 + \ln x).\end{aligned}$$

Portanto, $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$.

Exercícios Recomendados

EP 1. *Calcule os seguintes limites. Lembre-se que* $1^{-\infty}$ *e* $1^{+\infty}$ *são símbolos de indeterminação.*

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$*;*
Sugestão. *Para contornar a indeterminação* $1^{+\infty}$*, faça* $1 + \frac{2}{x} = 1 + \frac{1}{y}$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$*;*
Sugestão. *Para contornar a indeterminação* $1^{+\infty}$*, faça* $\frac{x}{1+x} = 1 + \frac{1}{y}$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$*;*

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x+3}\right)^{x}$*;*

(e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x+3}\right)^{x}$*;*

(f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3x}\right)^{2x}$.

EP 2. *Usando o resultado do problema anterior, calcule*

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} n \cdot \left(a^{1/n} - 1\right)$ *(sendo* $a > 0$*,* $a \neq 1$*);*

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{x}$*;* Sugestão. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(a \cdot \dfrac{e^{ax}-1}{ax}) = a \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{ax}$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$*;* Sugestão. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}$.

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}$.

EP 3. *Sendo* $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, *calcule os limites laterais* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

EP 4. *Sendo* $g(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-a}}}$, *calcule os limites laterais* $\lim_{x\to a^+} g(x)$ *e* $\lim_{x\to a^-} g(x)$.

EP 5. *Calcule as derivadas das seguintes funções.*

(a) $y = e^{-3x}$;

(b) $y = e^{4x+5}$;

(c) $y = a^{x^2}$;

(d) $y = 7^{x^2+2x}$;

(e) $y = e^x(1-x^2)$;

(f) $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$;

(g) $y = x^{1/x}$;

(h) $y = x^{\pi}\pi^{x}$;

(i) $y = \ln|ax+b|$;

(j) $y = \log_a(x^2+1)$;

(k) $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$;

(l) $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$;

(m) $y = \ln|x^2+2x|$;

(n) $y = \log_{10}(3x^2+2)^5$;

(o) $y = x\ln x$;

(p) $y = (\ln x)^3$;

(q) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+\lambda})$ $(\lambda \neq 0)$;

(r) $y = \log_{10}(\ln x)$;

(s) $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|$ $(a \neq 0)$

EP 6. *Calcule* y', *calculando* $\ln y$, *expandindo o segundo membro, utilizando propriedades de logaritmos, e então derivando implicitamente.*

(a) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$;

(b) $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$;

(c) $y = \dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$;

(d) $y = \sqrt{(3x^2+2)\sqrt{6x-7}}$.

EP 7. *Calcule* dy/dx*, se* $y = f(x)$ *é definida implicitamente pela equação*

(a) $3y - x^2 + \ln(xy) = 2$;

(b) $x \ln y - y \ln x = 1$;

(c) $e^{xy} - x^3 + 3y^2 = 11$.

EP 8. *Determine a equação da reta tangente à curva* $y = x^2 + \ln(2x-5)$ *no ponto dessa curva de abcissa* 3.

EP 9. *A posição* s *de um ponto móvel* P *sobre um eixo horizontal* s *é dada por* $s(t) = t^2 - 4\ln(1+t)$, $t \geq 0$*, sendo* s *dado em centímetros e* t *em segundos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto* P *em um instante* t *qualquer. Determine os intervalos de tempo em que o ponto* P *se move*

(a) para a esquerda, isto é, em direção contrária à do eixo s*, e*

(b) para a direita.

Exercícios avançados

EA 1. *Mostre que, sendo* $a > 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$. Sugestão: *Trate o caso* $a = 1$ *em separado. Para* $a \neq 1$*, faça a mudança de variável* $a^h - 1 = z$*, e então* $h = \ln(z+1)/\ln a$.

EA 2. *Responda as seguintes perguntas:*

(i) Qual número real é maior, $(0,1)^{0,1}$ *ou* $(0,2)^{0,2}$*?*

(ii) Qual é o menor valor de x^x*, sendo* x *real e positivo?*

EA 3. *Mostre que* $\pi^e < e^\pi$*, sem o uso de máquinas de calcular.* Sugestão. *Considere* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$*. Mostre que* f *é crescente no intervalo* $]0, e]$ *e decrescente no intervalo* $[e, +\infty[$*. Use então o fato de que* $\pi > e$.

2.9 Taxas relacionadas

Na linguagem do cálculo diferencial, se uma variável u é função da variável v, a *taxa de variação (instantânea) de* u*, em relação a* v, é a derivada $\dfrac{du}{dv}$.

Em várias problemas de cálculo, duas ou mais grandezas variáveis estão relacionadas entre si por uma equação. Por exemplo, na equação $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2}$, temos quatro variáveis, v_1, v_2, θ_1 e θ_2, relacionadas entre si.

Se temos variáveis, como u, v e w, relacionadas entre si por uma equação, podemos ainda ter as três como funções de uma única variável s. Por derivação implícita ou derivação em cadeia, podemos relacionar as várias derivadas $\dfrac{du}{ds}$, $\dfrac{dv}{ds}$ e $\dfrac{dw}{ds}$, ou ainda, por exemplo, $\dfrac{du}{dv}$, $\dfrac{dv}{dw}$. Problemas em que duas ou mais grandezas variáveis estão interrelacionadas, e nos quais são levadas em conta as taxas de variações instantâneas, de algumas dessas grandezas em relação às outras, são chamados na literatura do cálculo de problemas de *taxas relacionadas*.

Exemplo 2.17. *Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura* H *e raio do topo circular igual a* R*. Encontrando-se inicialmente vazio, o tanque começa a encher-se de água, a uma vazão constante de* k *litros por minuto. Exprima a velocidade com que sobe o nível da água (*dh/dt*), em função da profundidade* h*. Com que velocidade a água sobe no instante em que* $h = 0$*?*

Solução. *O volume da água quando esta tem profundidade* h *é dado por* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$*, sendo* r *o raio da superfície (circular) da água. Veja figura 2.12.*

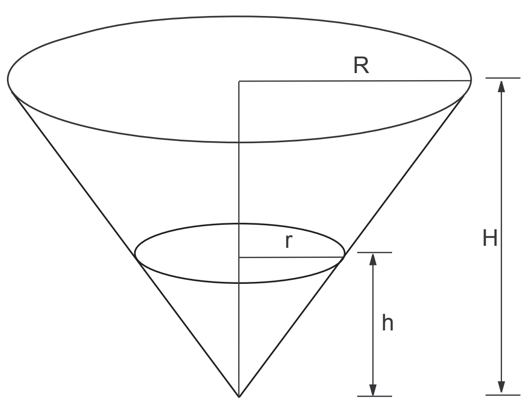


Figura 2.12 Tanque na forma de um cone invertido.

Sendo R *o raio do topo da caixa, e* H *sua altura, por razões de semelhança* *de triângulos, temos* $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$*, daí* $r = \frac{Rh}{H}$*. Com isso, obtemos*

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rh}{H}\right)^2 h = \frac{\pi R^2}{3H^2}h^3.$$

A taxa de variação do volume de água no tempo, isto é, sua vazão*, é constante, ou seja* $\frac{dV}{dt} = k$*, para alguma constante* k *(litros por minuto).*

Por derivação em cadeia, temos $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$*. Como* $\frac{dV}{dt} = k$*, temos*

$$k = \left(\frac{\pi R^2}{H^2}h^2\right) \cdot \frac{dh}{dt}.$$

Logo,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{kH^2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{h^2}.$$

Assim, estabelemos que a velocidade de subida do nível da água é inversamente proporcional ao quadrado de sua profundidade. Quando $h = 0$*, temos,* $\frac{dh}{dt} = +\infty$*. Na prática, este resultado nos diz que nossa modelagem matemática não nos permite determinar a velocidade de subida da água no instante em que o tanque começa a encher-se.*

Exemplo 2.18. *Uma escada de* 5 *m de comprimento está encostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa (velocidade) de* 2 *cm/seg. Com qual velocidade o topo da escada cai no momento em que a base da escada está a* 3 *m da parede?*

Solução. *Na figura 2.13 temos um diagrama geométrico para o problema, em que denotamos por* x *e* y *as distâncias da base e do topo da escada à base da parede, respectivamente.*

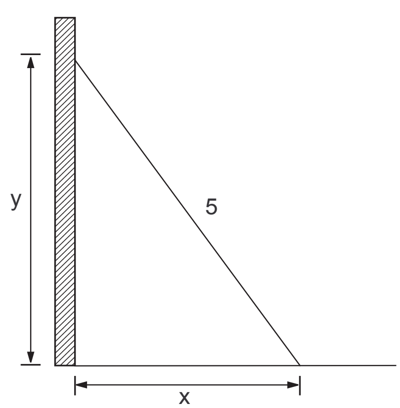


Figura 2.13 Ilustração da situação da escada.

Temos $\frac{dx}{dt} = 2$ *cm/seg. Pelo teorema de Pitágoras,* $x^2 + y^2 = 25$*, e derivando implicitamente em relação a* t*, temos* $2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$*, ou seja,*

$$y \cdot \frac{dy}{dt} = -x \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Quando $x = 3$ *m* $= 300$ *cm, temos* $y = 4$ *m* $= 400$ *cm, e então* $\frac{dy}{dt} = -1,5$ *cm/seg. Nesse instante, a velocidade com que o topo da escada cai é* $1,5$*cm/seg.*

Exercícios Recomendados

EP 10. *Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura de* 5 *m e raio da base (isto é, do topo) de* 1 *m. O tanque se enche da água à taxa de* 2 *m*^{3}*/min. Com que velocidade sobe o nível da água no instante em que ela tem* 3 *m de profundidade ?*

EP 11. *O gás de um balão esférico escapa à razão de* 2 *dm*^{3}*/min. Mostre que a taxa de variação da superfície* S *do balão, em relação ao tempo, é inversamente proporcional ao raio.*
Dado. A superfície de um balão de raio r **tem área** $S = 4\pi r^2$.

EP 12. *Um ponto móvel desloca-se, em um sistema de coordenadas cartesianas, ao longo da circunferência* $x^2 + y^2 = r^2$ *(*r *constante) com uma velocidade cuja componente em* x *é dada por* $\frac{dx}{dt} = y$ *(cm/seg). Calcule a componente da velocidade em* y*,* $\frac{dy}{dt}$*. Seja* θ *o deslocamento angular desse ponto móvel, medido a partir do ponto* $(1, 0)$ *no sentido anti-horário. Calcule a velocidade angular* $\frac{d\theta}{dt}$*. Em que sentido o ponto se desloca sobre a circunferência, no sentido horário ou no anti-horário?*

EP 13. *No exemplo 2.18, uma escada de* 5 *m de comprimento está recostada em uma parede. Mostre que é fisicamente impossível manter a base da escada escorregando-se, afastando-se da parede a uma velocidade constante, até o momento em que o topo da escada toque o chão.*
Sugestão. Avalie a velocidade com que o topo da escada toca o chão.

EP 14. *Prende-se a extremidade* A *de uma haste de* 3 *m de comprimento a uma roda de raio* 1 *m, que gira no sentido anti-horário à taxa de* $0,3$ *radianos por segundo. A outra extremidade da haste está presa a um anel que desliza livremente ao longo de um outra haste que passa pelo centro da roda (ver figura 2.14). Qual é a velocidade do anel quando* A *atinge a altura máxima?*

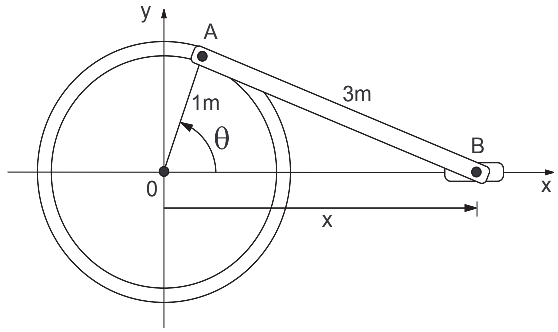


Figura 2.14 Ilustração da questão EP 14.

2.10 Diferenciais

Quando uma função $f(x)$ é derivável em um ponto x_0, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Assim, se chamamos

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon$$

teremos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$.

Como $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, temos $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$. Como $\varepsilon \approx 0$ quando $|\Delta x|$ é suficientemente pequeno, temos, para um tal Δx, a aproximação

$$\Delta f \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Chama-se *diferencial de* f *em* x_0 a expressão simbólica

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx.$$

O produto $f'(x_0) \cdot \Delta x$, é o valor da diferencial de f no ponto x_0, $df(x_0)$, quando $dx = \Delta x$.

A expressão dx, *diferencial da variável* x, pode assumir qualquer valor real. A importância da diferencial é que quando $dx = \Delta x$ e este é suficientemente pequeno, temos $\Delta f \approx df$, ou mais explicitamente,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Em geral, é mais fácil calcular $f'(x_0) \cdot \Delta x$ do que $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Nos primórdios do cálculo, matemáticos diziam que dx seria uma variação "infinitesimal" de x, atribuída a x_0, e que $df(x_0)$ seria a variação infinitesimal, sofrida por $f(x_0)$, correspondente à variação dx atribuída a x_0. Esses matemáticos chegavam a escrever "$f(x + dx) - f(x) = f'(x)\, dx$".

Ainda hoje, muitos textos de cálculo para ciências físicas, referem-se a "um elemento de comprimento dx", "um elemento de carga elétrica dq", "um elemento de massa dm", "um elemento de área dA" etc., quando querem referir-se a quantidades "infinitesimais" dessas grandezas.

Na figura 2.15 temos uma interpretação geométrica da diferencial de uma função f em um ponto x_0, quando dx assume um certo valor Δx.

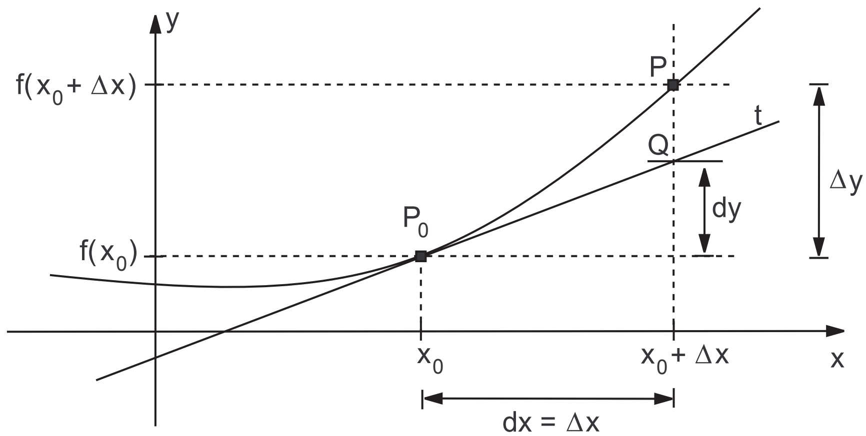


Figura 2.15 Note que, quanto menor Δx, melhor a aproximação $dy \approx \Delta y$. Na figura, t é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. As coordenadas do ponto Q, sobre a reta t, são $x_0 + \Delta x$ e $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ (verifique).

Sumarizando, quando x sofre uma variação Δx,

(i) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ é a variação sofrida por $f(x)$;

(ii) $dy = f'(x)\Delta x$ é a diferencial de f, em x, para $dx = \Delta x$;

(iii) $\Delta y \approx dy$, se Δx é suficientemente pequeno.

Convenciona-se dizer ainda que

(iv) $\dfrac{\Delta x}{x}$ é a *variação relativa* de x, correspondente à variação Δx;

(v) $\dfrac{\Delta y}{y} \approx \dfrac{dy}{y}$ é a variação relativa de $y = f(x)$, correspondente à variação Δx, sofrida por x.

Exemplo 2.19. *Mostre que se* h *é suficientemente pequeno, vale a aproximação*

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a},$$

com $a > 0$. *Com tal fórmula, calcule valores aproximados de* $\sqrt{24}$ *e* $\sqrt{104}$. *Compare com resultados obtidos em uma calculadora.*

Solução. Sendo $y = f(x) = \sqrt{x}$, usamos a aproximação $\Delta y \approx dy$. Temos $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ e $dy = f'(x)\,dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Considerando $x = a^2$ e $dx = \Delta x = h$, teremos $\sqrt{a^2 + h} - \sqrt{a^2} \approx \frac{h}{2a}$, e portanto

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Temos então $\sqrt{24} = \sqrt{5^2 + (-1)} \approx 5 + \dfrac{-1}{2 \cdot 5} = 4,9$, e $\sqrt{104} = \sqrt{10^2 + 4} \approx 10 + \dfrac{4}{2 \cdot 10} = 10,2$. Por uma calculadora, obteríamos $\sqrt{24} \approx 4,898979$ e $\sqrt{104} \approx 10,198039$.

Dizemos que um número real x está representado em notação científica quando escrevemos x na forma $x = a \cdot 10^n$, com $1 \leq |a| < 10$ e n inteiro (positivo ou negativo). Assim, por exemplo, em notação científica temos os números $2,46 \cdot 10^{-5}$ e $4,584 \cdot 10^{11}$, enquanto que, convertendo à notação científica os números $-0,023 \cdot 10^8$ e $452,36 \cdot 10^3$, teremos $-0,023 \cdot 10^8 = -2,3 \cdot 10^6$, e $452,36 \cdot 10^3 = 4,5236 \cdot 10^5$.

Exemplo 2.20. *Estimar, em notação científica, uma aproximação de* $\dfrac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$*, quando* $n = 10^{28}$*.*

Solução. *(uma calculadora pode não dar conta desta tarefa)*

Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$*, temos* $df = -\dfrac{2}{x^3}dx$*.*

$\dfrac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = f(n+1) - f(n) = \Delta f$*, para* $x = n$ *e* $\Delta x = 1$*.*

Pela aproximação $\Delta f \approx df$*, teremos, quando* $n = 10^{28}$*,*

$\Delta f \approx f'(n)\Delta x = -\dfrac{2}{n^3} = \dfrac{-2}{10^{84}} = -2 \cdot 10^{-84}$.

Exemplo 2.21. *Quando estima-se que a medida de uma grandeza é* M *unidades, com possível erro de* E *unidades, o* erro relativo *dessa medição é* E/M*. O erro relativo da medição indica o erro médio (cometido na medição) por unidade da grandeza.*

O raio r *de uma bolinha de aço é medido com a medição cujo erro máximo é de* 1%*. Determine o maior erro relativo que pode ocorrer na aferição de seu volume.*

Solução. *O volume de uma bola de raio* r *é dado por* $V = \frac{4}{3}\pi r^3$*.*

Sendo $V = \frac{4}{3}\pi r^3$*, temos* $dV = 4\pi r^2\,dr$*.*

O erro ΔV*, na aferição do volume, correspondente ao erro* Δr *na medição do raio, quando* Δr *é bem pequeno, é aproximadamente* dV*. Temos então*

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2(\Delta r)}{(4/3)\pi r^3} = \frac{3\Delta r}{r}.$$

Para $\frac{\Delta r}{r} = \pm 0,01$ *(erro máximo relativo na medição do raio), temos* $\frac{\Delta V}{V} \approx \pm 0,03$*, e portanto* 3% *é o maior erro possível na medição do volume.*

Observação 2.1. *Se o gráfico de* f *afasta-se muito rapidamente da reta tangente ao ponto* $(x_0, f(x_0))$*, quando* x *afasta-se de* x_0*, a aproximação* $\Delta y \approx dy$ *pode falhar, quando tomamos um valor de* Δx *que julgamos suficientemente pequeno, por não sabermos quão "suficientemente pequeno" devemos tomá-lo. Isto pode ocorrer quando a derivada* $f'(x_0)$ *tem valor absoluto muito grande.*

Como um exemplo, seja $f(x) = x^{100}$*. Temos* $f(1,08) = (1,08)^{100} \approx 2199,76$*, por uma calculadora confiável (confira). No entanto, o uso de diferenciais nos dá* $f(1 + \Delta x) \approx f(1) + f'(1)\Delta x = 1 + 100\Delta x$*, e portanto, para* $\Delta x = 0,08$*,* $f(1,08) \approx 1 + 100 \cdot 0,08 = 9$*.*

A razão dessa discrepância é que $f'(1) = 100$*, o que torna o gráfico de* f *com alta inclinação no ponto* $x_0 = 1$*. Nesse caso, somente um valor muito pequeno de* Δx *torna válida a aproximação* $\Delta f \approx df$*. Por exemplo,* $(1,0005)^{100} \approx 1,0513$*, por uma calculadora, enquanto que,* $(1,0005)^{100} \approx 1,05$*, pela aproximação* $\Delta f \approx df$*.*

Exercícios Recomendados

EP 1. *Se* $w = z^3 - 3z^2 + 2z - 7$*, use a diferencial* dw *para obter uma aproximação da variação de* w *quando* z *varia de* 4 *a* $3,95$*.*

EP 2. *Estima-se em* 8 *polegadas o raio de um disco plano circular, com margem de erro de* $\pm 0,06$ *polegadas. Ulizando diferenciais, estime a margem de erro no cálculo da área do disco (uma face). Qual é o erro relativo no cálculo dessa área ?*

EP 3. *Usando diferenciais, deduza a fórmula aproximada* $\sqrt[3]{a^3 + h} \approx a + \frac{h}{3a^2}$*. Utilize-a para calcular aproximações de* $\sqrt[3]{63}$ *e* $\sqrt[3]{65}$*. (Compare com os resultados obtidos em uma calculadora eletrônica).*

EP 4. *A área* A *de um quadrado de lado* s *é dada por* s^2*. Para um acréscimo* Δs *de* s*, ilustre geometricamente* dA *e* $\Delta A - dA$*.*

2.11 Gráficos

Existe o processo simples de esboçar o gráfico de uma função contínua ligando-se um número finito de pontos $P_1 = (x_1, f(x_1)), \ldots, P_n = (x_n, f(x_n))$, de seu gráfico, no plano xy. Mas este procedimento nem sempre revela as nuances do gráfico.

Nesta seção, veremos como as derivadas são ferramentas auxiliares no esboço desses gráficos, provendo informações qualitativas que não podem ser descobertas por meio de uma simples plotagem de pontos.

Relembrando as definições de funções crescente e decrescente.

Definição 2.9. *Uma função* $f(x)$ *é crescente no intervalo* I *(*$I \subset \mathbb{R}$*) se, nesse intervalo, quando* x *aumenta de valor,* $f(x)$ *também aumenta de valor. Em outras palavras,* f *é crescente se vale a implicação*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$*. A figura 2.16 ilustra este comportamento.*

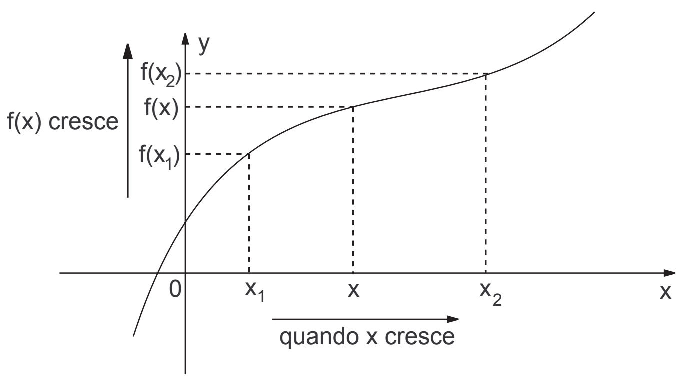


Figura 2.16 f é crescente em um certo intervalo I.

Definição 2.10. *Uma função* $f(x)$ *é decrescente no intervalo* I *(*$I \subset \mathbb{R}$*) se, nesse intervalo, quando* x *cresce em valor,* $f(x)$ *decresce. Em outras palavras,* f *é decrescente se vale a implicação*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$*. A figura 2.17 ilustra este comportamento.*

A derivada pode ser usada para inventigar se uma função é crescente ou decrescente, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.17. *Suponhamos que* f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e tem derivada nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$.

(i) Se $f'(x) > 0$ *nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$*, então* f *é crescente no intervalo* $[a, b]$*.*

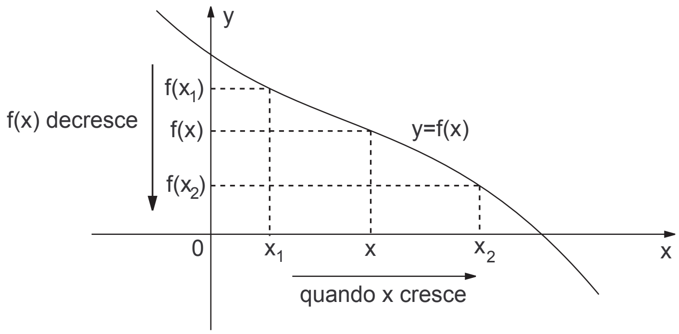


Figura 2.17 f é decrescente em um certo intervalo I.

(ii) Se $f'(x) < 0$ nos pontos do intervalo aberto $]a, b[$, então f é decrescente no intervalo $[a, b]$.

Não iremos demonstrar o teorema 2.17 aqui. Apenas ilustraremos geometricamente o fato de que esse teorema é bastante plausível.

Na figura 2.18, em que f é crescente em um certo intervalo $[a, b]$, todas as retas tangentes ao gráfico de f, no intervalo $]a, b[$, são inclinadas para a direita. Então, os coeficientes angulares dessas retas são todos positivos. Como o coeficiente angular em um ponto $P = (c, f(c))$ é $f'(c)$, temos $f'(c) > 0$ para cada $c \in]a, b[$.

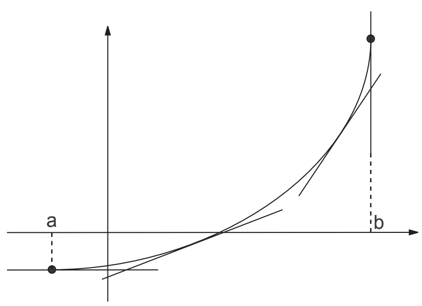


Figura 2.18 Derivada positiva.

O comportamento de $f'(x)$ nos extremos do intervalo não precisa ser levado em consideração. Na figura 2.18, temos $f'(a) = 0$ e $f'(b) = +\infty$ (a reta tangente em $(b, f(b))$ é vertical, $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = +\infty$).

Na figura 2.19, em que f é decrescente em um certo intervalo $[a, b]$, todas as retas tangentes ao gráfico de f, no intervalo $]a, b[$, são inclinadas para a esquerda. Daí os coeficientes angulares dessas retas são todos negativos. Como o coeficiente angular em um ponto $P = (c, f(c))$ é $f'(c)$, temos $f'(c) < 0$ para cada $c \in]a, b[$.

O comportamento de $f'(x)$ nos extremos do intervalo não precisa ser le-

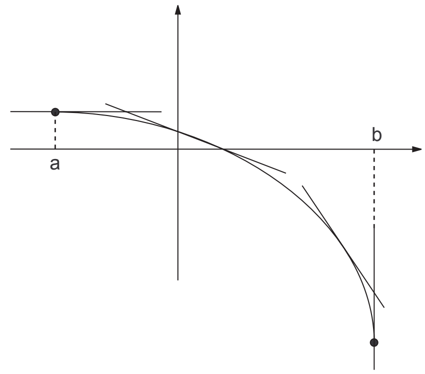


Figura 2.19 Os coeficientes angulares, das retas tangentes, sempre negativos, é indicativo de função decrescente.

vado em consideração. Na figura 2.19, temos $f'(a) = 0$ e $f'(b) = -\infty$ (a reta tangente em $(b, f(b))$ é vertical, $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = -\infty$).

Definição 2.11. *Seja* $f(x)$ *uma função cujo domínio contém o intervalo aberto I.*

(i) O gráfico de $y = f(x)$ *é* côncavo para cima *(ou* tem concavidade voltada para cima*) no intervalo aberto* I *se, exceto pelos pontos de tangência, a curva* $y = f(x)$ *está, nesse intervalo, sempre no semi-plano acima de cada reta tangente a ela nesse intervalo (veja figura 2.20).*

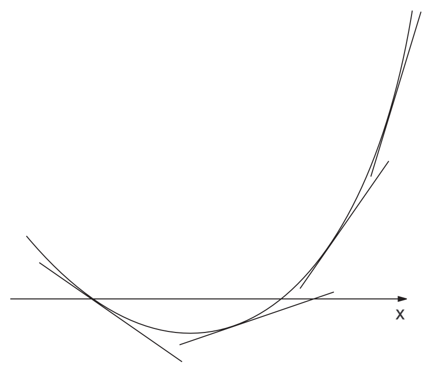


Figura 2.20 Note que as medidas dos coeficientes das retas tangentes crescem à medida em que x cresce.

(ii) O gráfico de $y = f(x)$ *é* côncavo para baixo *(ou* tem concavidade voltada para baixo*) no intervalo aberto* I *se, exceto pelos pontos de tangência, a curva* $y = f(x)$ *está, nesse intervalo, sempre no semi-plano abaixo de cada reta tangente a ela (veja figura 2.21).*

Dizemos que o intervalo I *é aberto quando* I *tem uma das formas:* $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ *e* $[-\infty, +\infty[$.

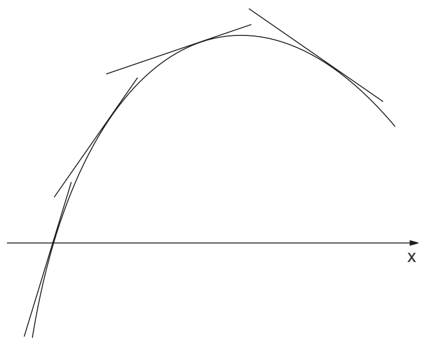


Figura 2.21 Note que as medidas dos coeficientes das retas tangentes decrescem à medida em que x cresce.

2.11.1 Derivadas de ordem superior e concavidades do gráfico

A concavidade de um gráfico está relacionado a uma derivada, que é a derivada da derivada. fomalizaremos o conceito de derivadas de ordem superior.

Definição 2.12. *Seja* f *uma função e* f' *sua derivada. A segunda derivada de* f*, denotada por* f'' *(lê-se "f duas linhas"), sendo a derivada da derivada de* f*, ou seja*

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$$

desde que o limite exista.

Costuma-se denotar também a segunda derivada de uma função $f(x)$ por

$$f^{(2)}(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ou} D_x^2 f(x).$$

Analogamente, definem-se as derivada de ordem maiores do que dois,

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = (f''(x))' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

e para cada $n \geq 2$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

A seguir será apresentado um teorema que relaciona a segunda derivada de uma função com a concavidade de seu gráfico.

Teorema 2.18. *Sendo* $f(x)$ *derivável duas vezes nos pontos do intervalo aberto* I,

(i) se $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in I$*, então a curva* $y = f(x)$ *é côncava para cima em* I*;*

(ii) *se* $f''(x) < 0$ *para todo* $x \in I$*, então a curva* $y = f(x)$ *é côncava para baixo em* I*.*

Demonstração. O teorema 2.18 não será demonstrado, serão apresentadas apenas as ideias usadas na demonstração.

Se $f''(x) > 0$ nos pontos $x \in I$ então, pelo teorema 2.17, a função $f'(x)$ é crescente em I. Assim, $f'(x)$ cresce à medida em que x cresce, como na figura 2.20. Desse modo, temos a curva $y = f(x)$ côncava para cima em I; se $f''(x) < 0$ nos pontos $x \in I$ então, pelo teorema 2.17, a função $f'(x)$ é decrescente em I. Assim, $f'(x)$ decresce à medida em que x cresce, como na figura 2.21. Desse modo, temos a curva $y = f(x)$ côncava para baixo em I. $\square$

Definição 2.13 (Pontos de inflexão da curva $y = f(x)$)**.**
O ponto $P = (x_0, f(x_0))$ *é um* ponto de inflexão *da curva* $y = f(x)$ *se esta curva é côncava para cima (ou para baixo) em um intervalo* $]\alpha, x_0[$ *(*α *real ou* $-\infty$*) e côncava para baixo (respectivamente, para cima) em um intervalo* $]x_0, \beta[$ *(*β *real ou* $+\infty$*).*

Isto quer dizer que o ponto $P = (x_0, f(x_0))$ *é um ponto de mudança do sentido de concavidade do gráfico de* f*. Veja figura 2.22.*

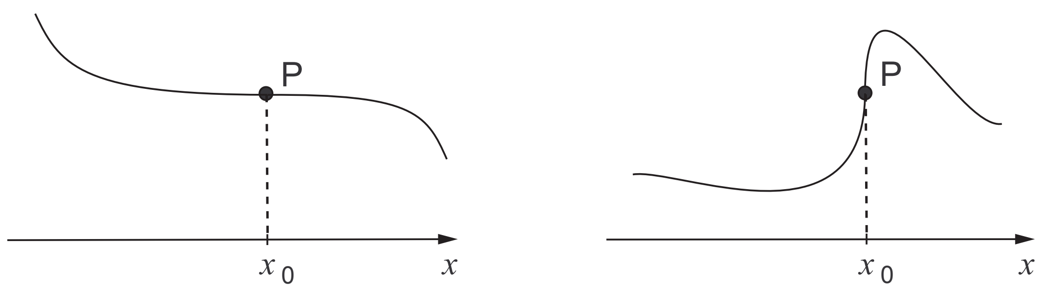


Figura 2.22 P é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Tendo em vista o resultado do teorema 2.18, se $f''(x)$ é contínua, os candidatos a pontos de inflexão são os pontos $(x, f(x))$ para os quais $f''(x) = 0$.

Exemplo 2.22. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = x^2 - 3x$*.*

Solução. *Temos* $f'(x) = 2x - 3$ *e* $f''(x) = 2$*. Assim,* f *e suas derivadas* f' *e* f'' *são todas contínuas em* $\mathbb{R}$*. Analisando a variação de sinal de* $f'(x)$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3/2$$

Assim, $f(x)$ *é crescente no intervalo* $[3/2, +\infty[$ *e decrescente no intervalo* $]-\infty, 3/2]$*. Desse modo, em* $x_0 = 3/2$*, temos um ponto mínimo local, que acontece* *ser o ponto de mínimo de* $f(x)$*. Note que* $f'(3/2) = 0$*, o que significa que a reta tangente ao gráfico em* $(3/2, f(3/2))$ *deve ser horizontal. Como* $f''(x) = 2 > 0$ *para todo* x*, o gráfico de* f *tem a concavidade sempre voltada para cima.*

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$*, e com os elementos deduzidos anteriormente, e notando que* $f(3/2) = -9/4$*, e que* 0 *e* 3 *são as raízes de* f *(soluções da equação* $f(x) = 0$*), temos o esboço da curva* $y = x^2 - 3x$ *na figura 2.23.*

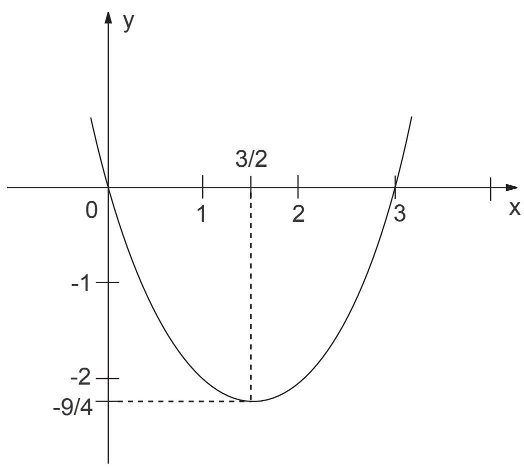


Figura 2.23 Esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x$.

Exemplo 2.23. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = x^3 - 3x^2$*.*

Solução. *Temos* $f'(x) = 3x^2 - 6x$ *e* $f''(x) = 6x - 6$*. Assim,* f *e suas derivadas* f' *e* f'' *são todas contínuas em* $\mathbb{R}$*. Analisando a variação de sinal de* $f'(x)$

$$f'(x) = 3x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 2$$

Assim, $f(x)$ *é crescente no intervalo* $]-\infty, 0]$ *e também é crescente no intervalo* $[2, +\infty[$*, sendo decrescente no intervalo* $[0, 2]$*. Observe que* 0 *e* 2 *são raízes de* $f'(x)$*. Assim, nos pontos* $(0, f(0)) = (0, 0)$ *e* $(2, f(2)) = (2, -4)$ *as retas tangentes ao gráfico de* f *são horizontais. Analisando a variação de sinal de* $f''(x)$*, temos*

$$f''(x) = 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Assim, o gráfico de f *tem concavidade voltada para cima quando* $x > 1$ *e para baixo quando* $x < 1$*. Assim, o ponto* $P = (1, f(1)) = (1, -2)$ *é ponto de inflexão do gráfico.*

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$*, e com os elementos deduzidos anteriormente, e notando que* 0 *e* 3 *são as raízes de* f *(soluções da equação*

$f(x) = 0$*), temos o esboço da curva* $y = x^3 - 3x^2$ *na figura 2.24.*

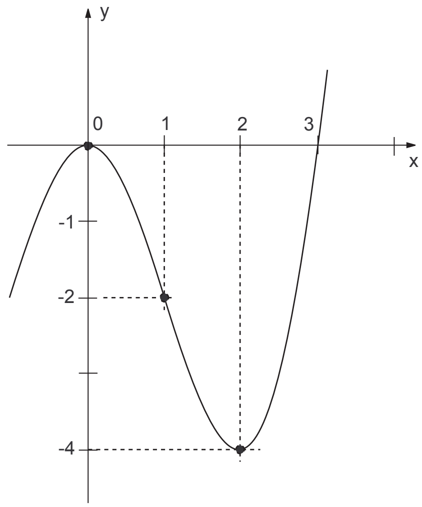


Figura 2.24 Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Exemplo 2.24. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Solução. *Temos que o domínio da função é* $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$*, e que*

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty.$$

Logo, a reta de equação $x = 2$ *é uma assíntota vertical do gráfico de* f.

Para análise do crescimento ou decrescimento da função observaremos o sinal de sua derivada. Temos que

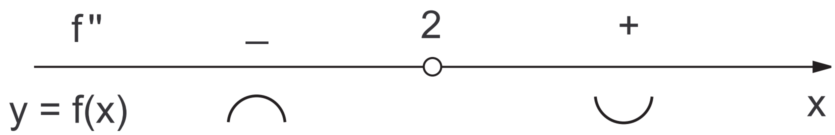
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)'(x-2) - (x-2)'(2x+1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{-5}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Note que $f'(x) < 0$ *para todo* x *em* $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. *Logo, a função é decrescente nos dois intervalos contidos em seu domínio* $]-\infty, 2[$ *e* $]2, +\infty[$.

Calculando a segunda derivada da função f *para a análise da concavidade do gráfico, temos*

$$f''(x) = \left[\frac{-5}{(x-2)^2}\right]' = [-5(x-2)^{-2}]' = 10(x-2)^{-3}.$$

Da análise do sinal da segunda derivada obtemos o seguinte diagrama fornece os sinais de f'' *e as direções das concavidades do gráfico de* f. *Como* $2 \notin D(f)$, *o gráfico não tem ponto de inflexão.*



Finalmente, analisaremos a existência de assíntota horizontal. Calculando os limites quando x tende a $-\infty$ e $+\infty$ temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2 = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Logo, a reta $y = 2$ é a assíntota horizontal do gráfico de f. A figura 2.25 é o gráfico de uma função com base nos aspectos estudados anteriormente.

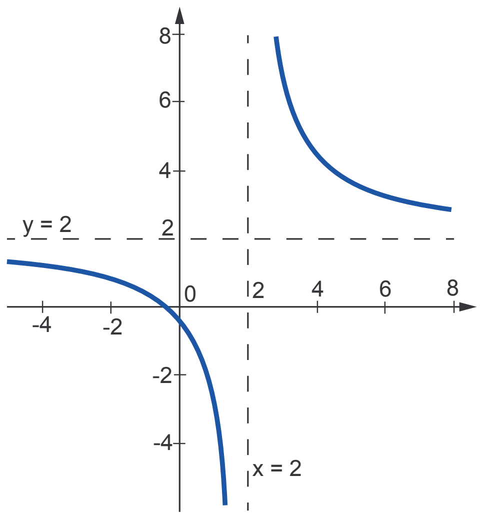


Figura 2.25 Gráfico da função $\dfrac{2x+1}{x-2}$.

Exemplo 2.25. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Solução. *Temos que o domínio da função é $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. Note que a função é uma função racional em que o grau do polinômio do numerador é exatamente um grau maior do que o grau do denominador. Logo, o gráfico terá uma assíntota oblíqua, e, consequentemente, não terá assíntota horizontal. Calculando os limites laterais de f no ponto $x = 1$, temos*

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Assim, a reta vertical de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f. Como $x^2-2x+2 = (x-1)(x-1)+1$, podemos expressar a função f por

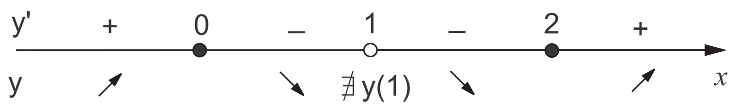
$$f(x) = \frac{(x-1)(x-1)+1}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1}.$$

Temos que a assíntota oblíqua tem a equação $y = x-1$.

Calculando a derivada de f*, obtemos*

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(x^2+2x+2)'(x-1)-(x-1)'(x^2+2x+2)}{(x-1)^2}\\
&= \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}\\
&= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\\
&= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Logo, as raízes de $f'(x)$ *são* $x=0$ *e* $x=2$*. O diagrama abaixo mostra em quais intervalos a função é crescente ou decrescente. Temos que* y *cresce em* $]-\infty,0]$

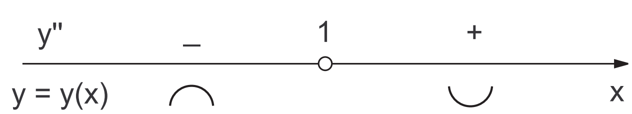


e em $[2,+\infty[$*, e decresce em* $[0,1[$ *e em* $]1,2]$*.*

Calculando a segunda derivada de f*, obtemos*

$$\begin{aligned}
y'' &= \left[\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right]'\\
&= \frac{(x^2-2x)'(x-1)^2-[(x-1)^2]'(x^2-2x)}{(x-1)^4}\\
&= \frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}\\
&= \frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}\\
&= \frac{2}{(x-1)^3}.
\end{aligned}$$

O diagrama a seguir mostra os sinais de y'' *e as concavidades da curva* $y=f(x)$*.*



Como $x=1$ *não pertene ao domínio de* f*, o gráfico não tem ponto de inflexão. A figura 2.26 ilustra o gráfico da função* $f(x)$*.*

Exemplo 2.26. *Esboce o gráfico da função* $f(x)=(x+2)\sqrt[3]{(x-3)^2}$*.*

Solução. *O domínio de* f *é* $D(f)=\mathbb{R}$*, e como* f *é contínua em todo* $\mathbb{R}$ *(por quê?) seu gráfico não apresenta assíntotas verticais.*

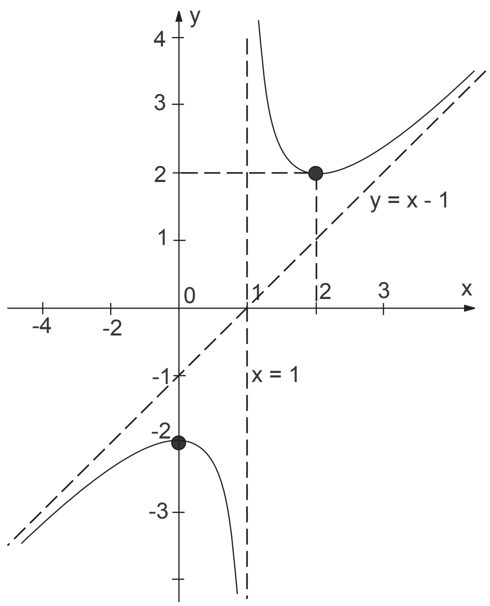


Figura 2.26 Gráfico da função $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

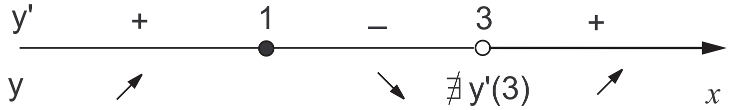
Antes de calcular a derivada de f*, note que* $f(x) = (x+2)\sqrt[3]{(x-3)^2} = (x+2)(x-3)^{2/3}$*. Assim, pela regra do produto,*

$$y' = (x-3)^{2/3} + (x+2)\cdot\frac{2}{3}(x-3)^{-1/3}.$$

Para facilitar o cálculo da segunda deriva e análise de sinais, colocaremos em evidência a fração $1/3$*, e também a potência de* $x-3$ *de menor expoente*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}(x-3)^{-1/3}\cdot[3(x-3)^1 + 2(x+2)] \\ &= \frac{1}{3}(x-3)^{-1/3}\cdot(5x-5) \\ &= \frac{5}{3}(x-3)^{-1/3}\cdot(x-1) \\ &= \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x-3}} \end{aligned}$$

Note que a função f *é contínua em todos os pontos de* $\mathbb{R}$*, mas* $f'(x)$ *não está definida em* $x=3$*. O diagrama abaixo mostra os sinais da derivada.*



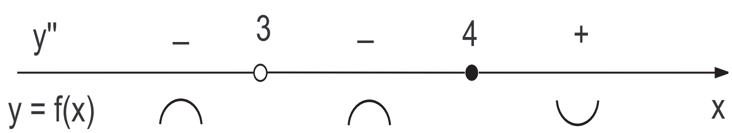
Temos então que f *cresce em* $]-\infty, 1]$*, decresce em* $[1,3]$ *e cresce novamente em* $[1,+\infty[$*. Aqui temos algo novo, pois a função* f *não tem derivada em* $x=3$*. Como é a geometria do gráfico de* f *nas proximidades do ponto* $x=3$*? A* *resposta a esta questão virá com o estudo das concavidades do gráfico. Temos*

$$
\begin{aligned}
y'' &= \left[\frac{5}{3}(x-3)^{-1/3}\cdot(x-1)\right]' \\
&= \frac{-5}{9}(x-3)^{-4/3}(x-1)+\frac{5}{3}(x-3)^{-1/3} \\
&= \frac{5}{9}(x-3)^{-4/3}[-(x-1)+3(x-3)^{1}] \\
&= \frac{5}{9}(x-3)^{-4/3}(2x-8) \\
&= \frac{10}{9}(x-3)^{-4/3}(x-4).
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$f''(x) = \frac{10(x-4)}{9\sqrt[3]{(x-3)^4}}.$$

O diagrama abaixo mostra os sinais de y'' *e as concavidades do gráfico de* f*. Resista à tentação de simplificar o radical* $\sqrt[3]{(\quad)^4}$*!*



Temos que o ponto $(4, f(4)) = (4, 6)$ *é ponto de inflexão do gráfico. A figura 2.27 ilustra o gráfico de* f*.*

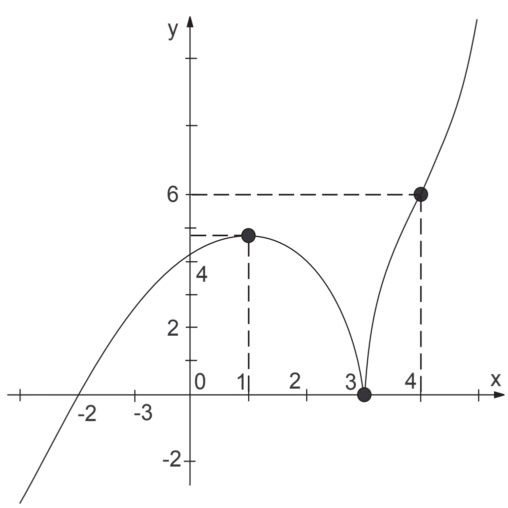


Figura 2.27 Gráfico da função $(x+2)\sqrt[3]{(x-3)^2}$

Neste esboço levamos em conta as aproximações $f(1) = 3\sqrt[3]{4} \approx 4,8$*,* $f(0) = 2\sqrt[3]{9} \approx 4,2$*. Levamos em conta também que* -2 *e* 3 *são raízes de* f*. Note que, antes e pouco depois de* $x_0 = 3$*, o gráfico tem concavidade voltada para baixo. Como* f *decresce em* $[1,3]$ *e cresce em* $[3,+\infty[$*, temos, no gráfico de* f*,* *a formação de um "bico" agudo no ponto $(3, 0)$. Isto explica a inexistência de derivada em x_0. Não há reta tangente ao gráfico no ponto $(3, 0)$.*

Quando f é contínua em um intervalo contendo um ponto x_0 no seu interior, e f' é contínua em todos os pontos desse intervalo, exceto em x_0 e, além disso, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$, temos uma reta vertical tangente ao gráfico de f em $P = (x_0, f(x_0))$. Estes dois casos são ilustrados na figura 2.28.

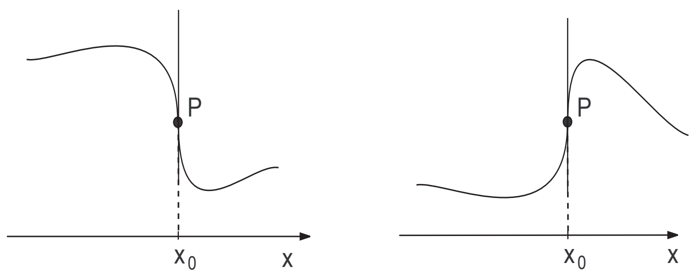


Figura 2.28 À esquerda, $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$. À direita, $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$

Quando $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$, o gráfico forma um bico em $P = (x_0, f(x_0))$, tal como no ponto $(3, 0)$ da figura 2.27 ou no ponto P do gráfico à esquerda na figura 2.29. Quando $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$, temos novamente um bico em P, só que agora apontando para cima, tal como no gráfico à direita na figura 2.29.

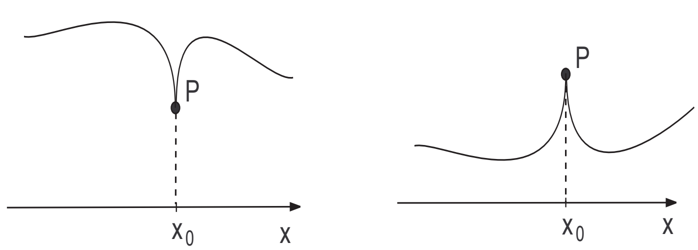


Figura 2.29 À esquerda, $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$, e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$. À direita, $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$, e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$

Exercícios Recomendados

EP 1. *Cada uma das funções $f(x)$ dadas abaixo tem como domínio todo o conjunto $\mathbb{R}$. Para cada uma delas,*

(i) Calcule $f'(x)$ e determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente;

(ii) *Calcule* $f''(x)$ *e determine quais são os intervalos em que a concacidade da curva* $y = f(x)$ *é para cima, e em quais é para baixo;*

(iii) *Determine os pontos de inflexão da curva* $y = f(x)$*;*

(iv) *Calcule as raízes de* f *(soluções da equação* $f(x) = 0$*), quando isto não for difícil;*

(v) *Calcule os limites* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *e* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$*;*

(vi) *A partir dos dados coletados acima, faça um esboço bonito do gráfico de* f.

(a) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

(c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$

(e) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

(f) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

EP 2. *Para cada uma das funções dadas abaixo,*

(i) *Determine o domínio da função e, com base nisto, verifique se a curva* $y = f(x)$ *tem retas assíntotas verticais.*

(ii) *Calcule* $f'(x)$ *e determine os intervalos em que* f *é crescente e aqueles em que* f *é decrescente;*

(iii) *Calcule* $f''(x)$ *e determine os intervalos em que a curva* $y = f(x)$ *é côncava para cima e aqueles em que ela é côncava para baixo;*

(iv) *Determine os pontos de inflexão da curva* $y = f(x)$*;*

(v) *Calcule as raízes de* f *(soluções da equação* $f(x) = 0$*), quando isto não for difícil;*

(vi) *Verifique se a curva* $y = f(x)$ *tem retas assíntotas horizontais ou inclinadas.*

(vii) *A partir dos dados coletados acima, faça um esboço bonito do gráfico de* f.

(viii) Indique os pontos do gráfico em que a reta tangente é vertical e os pontos em que inexiste tal reta tangente (procure por pontos onde f é contínua, mas f' não é definida).

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

(f) $f(x) = 2x - 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$

2.12 Máximos e mínimos

Nesta seção estaremos explorando procedimentos estratégicos para determinar os *valores extremos* de uma função f, ou seja, o *valor máximo* e o *valor mínimo* de uma função f, em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, sem recorrer a um esboço do gráfico de f nesse intervalo. Iniciaremos esta seção com as definições de máximos e mínimos locais.

Definição 2.14 (Pontos de máximo e pontos de mínimo locais)**.** *Um ponto x_0, no domínio da função f.*

(i) o ponto x_0 é um ponto de mínimo local de f *se existe um intervalo $[a, b]$ contido no domínio de f, com $a < x_0 < b$, tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x em $[a, b]$. Isto ocorre quando existem intervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ tais que f é decrescente em $[a, x_0]$ e é crescente em $[x_0, b]$. Veja figura 2.30.*

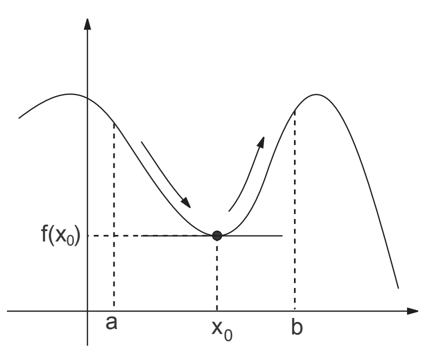


Figura 2.30 O ponto x_0 é um ponto de mínimo local.

(ii) o ponto x_0 é um ponto de máximo local de f *se existe um intervalo* $[a, b]$ *contido no domínio de* f*, com* $a < x_0 < b$*, tal que* $f(x) \leq f(x_0)$ *para todo* x *em* $[a, b]$*. Isto ocorre quando existem intervalos* $[a, x_0]$ *e* $[x_0, b]$ *tais que* f *é crescente em* $[a, x_0]$ *e é decrescente em* $[x_0, b]$*. Veja figura 2.31.*

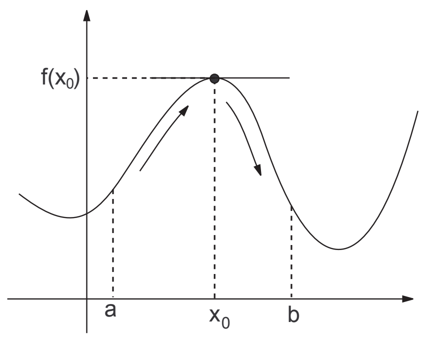


Figura 2.31 O ponto x_0 é um ponto de máximo local.

O teorema a seguir nos fornece uma condição suficiente para que possamos garantir que uma função possua valor de máximo e mínimo (global).

Teorema 2.19 (Weierstrass)**.** *Se uma função* f *é contínua em um intervalo fechado* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*, então existem pontos* x_0 *e* x_1 *em* $[a, b]$ *tais que* $f(x_0)$ *e* $f(x_1)$ *são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de* $f(x)$*, para* x *em* $[a, b]$.

Os pontos x_0 e x_1 aos quais se refere o teorema de Weierstrass são chamados *ponto de mínimo de* f e *ponto de máximo de* f, respectivamente. O teorema é ilustrado na figura 2.32.

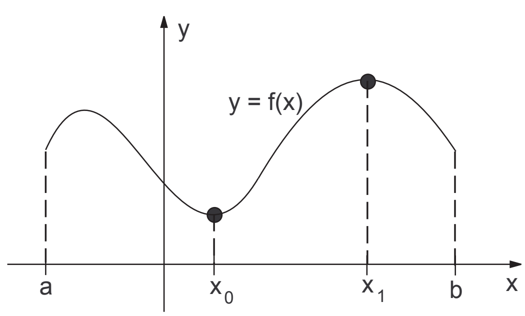


Figura 2.32 Uma ilustração para o Teorema de Weierstrass.

Elucidando os conceitos aqui apresentados, sendo $I \subset D(f)$ um intervalo (limitado ou ilimitado), dizemos que

(i) $f(x_0)$ é o valor mínimo de f em I, se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em I;

(ii) $f(x_1)$ é o valor máximo de f em I, se $f(x_1) \geq f(x)$ para todo x em I.

Exemplo 2.27. *A função* $f(x) = x^2$ *no intervalo* $I = [-1, +\infty[$ *tem um ponto de mínimo* $x_0 = 0$*, sendo* $f(0) = 0$ *seu valor mínimo, pois* $x^2 \geq 0$ *para todo* $x \in I$*. Nesse intervalo,* f *não tem valor máximo pois* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*.*

2.12.1 Máximos e mínimos em um intervalo

Como determinar os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$, em que uma função contínua f atinge seus valores máximo e mínimo? Uma solução deste problema seria esboçar o gráfico de f nesse intervalo, conforme as estratégias desenvolvidas na seção 2.11, e então localizar os valores extremos de f. Mas como determinar os valores máximo e mínimo de f, no intervalo $[a, b]$, sem recorrer ao estudo do esboço de seu gráfico? É isto que trataremos de responder.

Teorema 2.20. *Se* f *tem derivada em um intervalo aberto* I*, e se* $x_0 \in I$ *é ponto de mínimo local ou máximo local de* f*, então* $f'(x_0) = 0$*.*

Demonstração. Suponhamos que x_0 é um ponto de mínimo local. Mostraremos que $f'(x_0) = 0$, usando a definição de derivada.

Consideremos $\Delta x \neq 0$, com $x_0 + \Delta x \in I$. Então, $f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$ e $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$. Se $\Delta x > 0$, temos $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$ e se $\Delta x < 0$, temos $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$. Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \text{ e } \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0.$$

Como $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, temos que $0 \leq f'(x_0) \leq 0$. Portanto, $f'(x_0) = 0$.

Prova-se de forma análoga para o caso em que x_0 é um ponto de máximo local. □

Observemos que se x_0 é um ponto de mínimo de f num intervalo $[a, b]$, então x_0 tem uma das seguintes características:

(i) x_0 é também um ponto de mínimo local de f, e f tem derivada em x_0. Neste caso, conforme o teorema 2.20, $f'(x_0) = 0$.

(ii) x_0 é um ponto de mínimo local de f, mas f não tem derivada no ponto x_0.

(iii) x_0 é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, ou seja, $x_0 = a$ ou $x_0 = b$.

Os casos (i), (ii) e (iii) são ilustrados na figura 2.33.

Analogamente, se x_1 é um ponto de máximo de f num intervalo $[a, b]$, então x_1 tem uma das três seguintes características:

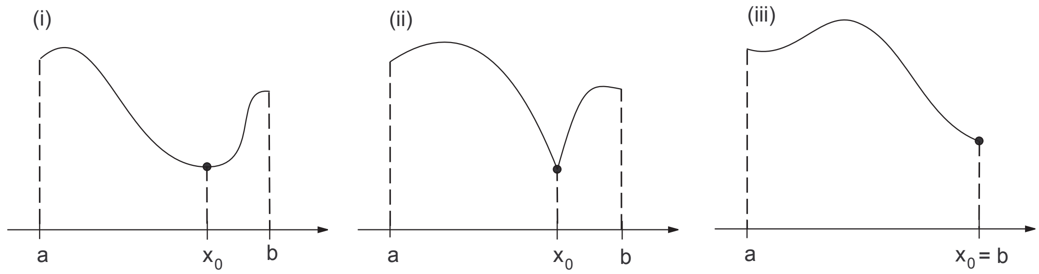


Figura 2.33 Pontos de mínimo típicos.

(i) x_1 é também um ponto de máximo local de f, e f tem derivada em x_1. Neste caso, conforme o teorema 2.20, $f'(x_1) = 0$.

(ii) x_1 é um ponto de máximo local de f, mas f não tem derivada no ponto x_1.

(iii) x_1 é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, ou seja, $x_1 = a$ ou $x_1 = b$.

Esses casos são ilustrados na figura 2.34.

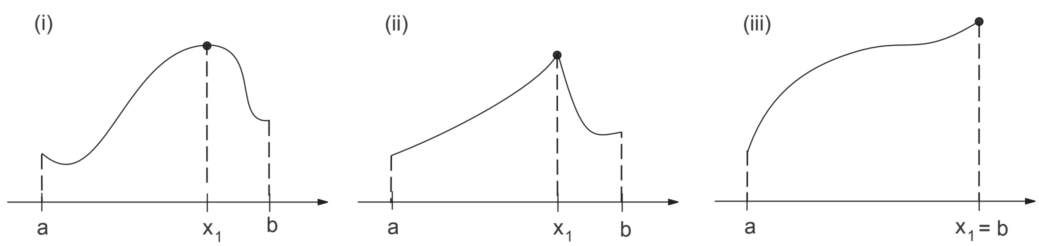


Figura 2.34 Pontos de máximo típicos.

Definição 2.15 (Ponto crítico)**.** *Seja* f *uma função. Um ponto* x *no domínio de* f *é chamado um* ponto crítico de f *se* $f'(x) = 0$ *ou se* f *é contínua em* x*, mas não existe* $f'(x)$*.*

Assim, um ponto de máximo ou de mínimo de uma função f, em um intervalo $[a, b]$, é um ponto crítico de f ou uma das extremidades do intervalo.

Exemplo 2.28. *Determine os valores máximo e mínimo de* $f(x) = 2x^3+3x^2-12x$*, no intervalo* $[-3, 3]$*.*

Solução. *A função* f *é contínua no intervalo* $[-3, 3]$*, e pelo teorema de Weierstrass ela possui valores de máximo e mínimo. Temos*

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2).$$

As soluções de $f'(x) = 0$ *são* $x_1 = -2$ *e* $x_2 = 1$*. Estes são os pontos críticos de* f *no intervalo* $[-3, 3]$*, pois a função* $f(x)$ *é diferenciável em todo o intervalos*

$]-3,3[$. *Calculando os valores de* f *nos extremos do intervalo e nos pontos críticos, temos:*

$$f(x_1) = f(-2) = 20, \quad f(x_2) = f(1) = -7, \quad f(-3) = 9 \quad e \quad f(3) = 45.$$

Por comparação dos valores obtidos, o ponto de mínimo de f*, para* $-3 \leq x \leq 3$*, é* $x_{min} = x_2 = 1$*, sendo* $f(1) = -7$ *o valor mínimo de* f *nesse intervalo. Já o ponto de máximo de* f*, para* $-3 \leq x \leq 3$*, é* $x_{max} = 3$*, sendo* $f(3) = 45$ *o valor máximo de* f *nesse intervalo. Como ilustração, temos um esboço do gráfico de* f*, no intervalo* $[-3,3]$*, na figura 2.35.*

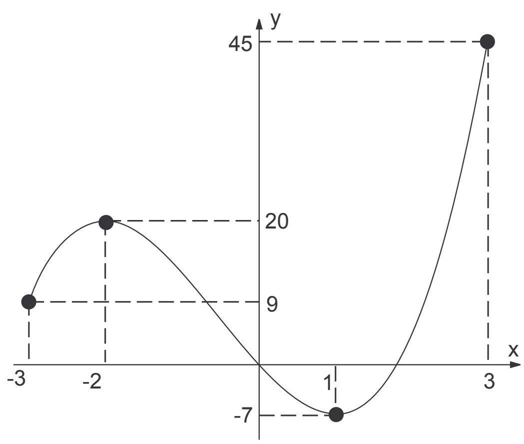


Figura 2.35 Gráfico da função $2x^3 + 3x^2 - 12x$ no intervalo $[-3,3]$.

Exemplo 2.29. *Determine os valores máximo e mínimo da função* $f(x) = (x-2)^2 \sqrt[3]{x^2}$*, no intervalo* $-1 \leq x \leq 1$*.*

Solução. *A função* f *é contínua no intervalo* $[-1,1]$*, pelo teorema de Weierstrass ela possui valores de máximo e mínimo. Temos*

$$f'(x) = \frac{4(2x^2 - 5x + 2)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Assim, $f'(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 2$ *ou* $x = 1/2$*. Note que* $2 \notin [-1,1]$ *e* f *é contínua, mas não diferenciável, no ponto* 0*. Logo, os pontos críticos de* f *são* $x_1 = 1/2$ *e* $x_2 = 0$*.*

Calculando os valores de f *nos extremos do intervalo e nos pontos críticos, temos:*

$$f(x_1) = f(1/2) = \frac{9}{4\sqrt[3]{4}} \approx 1,4, \quad f(0) = 0, \quad f(-1) = 9 \quad e \quad f(1) = 1.$$

Portanto, $f(0) = 0$ *é o valor mínimo de* f*, enquanto que* $f(-1) = 9$ *é seu valor máximo.*

No caso em que desejamos encontrar pontos de máximo e mínimo de uma função f contínua num intervalo $I \subset D(f)$, sendo I um intervalo não fechado ou ilimitado, usamos a seguinte estratégia: comparamos os valores de f no extremo que pertence ao intervalo, se existir, com os valores de f nos seus pontos críticos desse intervalo; em seguida, comparamos esses valores com os limites de $f(x)$ quando x tende a extremos que não pertencem ao intervalo.

Como reforço estratégico na pesquisa de máximos e mínimos locais, temos também o seguinte teorema.

Teorema 2.21. *Sendo f uma função contínua, com f' também contínua, em um intervalo aberto I, e x_0 um ponto de I,*

(i) se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f;

(ii) se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local de f;

Não faremos a demonstração do teorema 2.21 aqui, mas faremos a seguinte observação geométrica, que o torna intuitivamente óbvio. Se $f'(x_0) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f em $P = (x_0, f(x_0))$ é horizontal. Se, além disso, $f''(x_0) > 0$, temos a concavidade do gráfico de f em P voltada para cima, e assim x_0 é um ponto de mínimo local de f. Se $f''(x_0) < 0$, a concavidade do gráfico de f em P é voltada para baixo, e x_0 é então um ponto de máximo local de f. Estas duas possibilidades são ilustradas na figura 2.36.

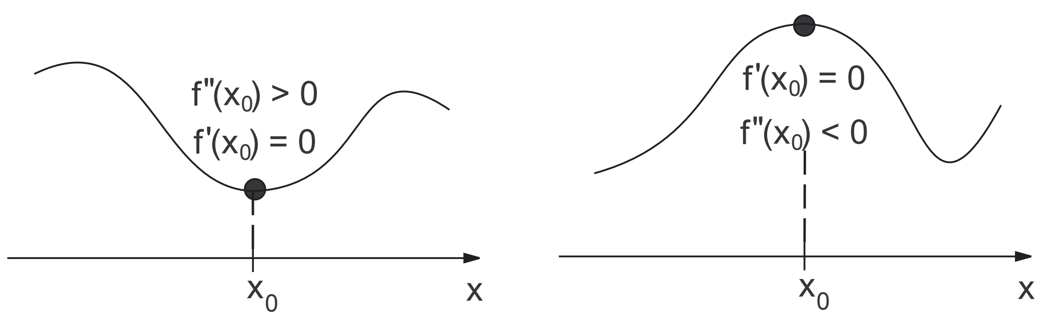


Figura 2.36 Teste da segunda derivada.

Exemplo 2.30. *Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, da função $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, para $x > 0$.*

Solução. *Estamos procurando os valores máximo e mínimo de f no intervalo $]0, +\infty[$. Temos*

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2},$$

e portanto $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$, pois $x > 0$. Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

a função f não tem valor máximo em $]0, +\infty[$. Da segunda derivada, temos $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ e $f''(1) > 0$. Assim, $x_1 = 1$ é ponto de mínimo local de f. Como f não tem outros pontos críticos, 1 é o ponto de mínimo global de f, sendo $f(1) = 2$ o valor mínimo de f no intervalo $]0, +\infty[$.

Uma das aplicações da obtenção de valores de máximo e mínimo de uma função é a resolução de problemas de otimização. O exemplo a seguir terá embutida em sua resolução uma sugestão de diretrizes para abordar esse tipo de problema.

Exemplo 2.31. *Qual é a maior área retangular que pode ser cercada com 200 m de tela de arame?*

Solução.

Passo 1: *Analisar o problema, desenhando um diagrama que contenha todas as informações, e introduza as variáveis.*

Fazemos isto na figura 2.37

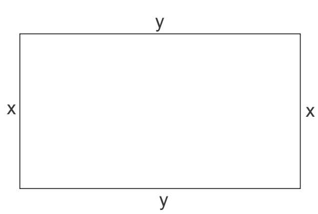


Figura 2.37 O perímetro do retângulo é $2x + 2y$.

Passo 2: *Expressar a quantidade a ser maximizada como uma função de uma variável, determinando o domínio dessa função a partir das condições do problema.*

A área do retângulo deve ser maximizada, sob a condição de que o perímetro é 200 m. Essa área é dada por $A = xy$. Como $y = 100 - x$, temos

$$A = A(x) = x(100 - x)$$

e, nas condições do problema, temos $0 < x < 100$. Note que se $x = 0$ ou $x = 100$ não haveria caixa (caso degenerado).

Passo 3: *Determinar o ponto de máximo e o valor máximo da função no intervalo em que ela está definida.*

Usando os procedimentos discutidos anteriormente, sendo $A(x) = 100x - x^2$*, temos*

$$A'(x) = 100 - 2x,$$

e $A'(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 50$. *E,* $A(50) = 50 \cdot (100 - 50) = 50^2 = 2500$. *Portanto, o valor máximo de* $A(x)$ *é* 2500 *m*^{2}*, e é atingido quando* $x = 50$ *m. Assim, o retângulo de perímetro* 200 *m com área máxima é um quadrado de* 50 *m de lado.*

Exemplo 2.32. *Uma grande caixa deve ser construída cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos de uma folha retangular de zinco, de* 3 *m por* 8 *m, dobrando-se os quatro lados (abas laterais) para cima e soldando-se as arestas verticais que ficaram justapostas. Encontre o maior volume possível para esta caixa.*

Solução.

Passo 1: *Um diagrama contendo todas as informações do problema, bem como a introdução de uma variável, é mostrado na figura 2.38*

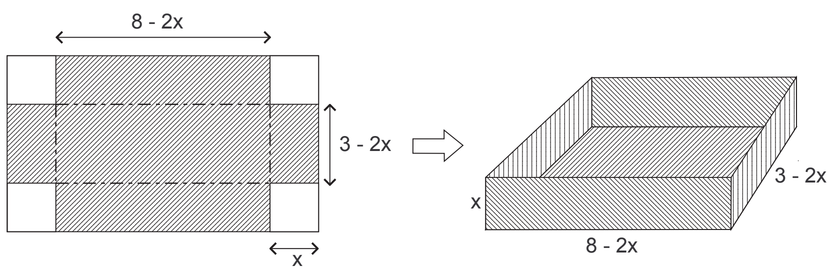


Figura 2.38 Ilustração do modelo da caixa a ser construída.

Passo 2: *O volume da caixa da figura 2.38 é dado por*

$$V = V(x) = x(8 - 2x)(3 - 2x), \text{ para } 0 < x < 3/2.$$

Note que os casos $x = 0$ *e* $x = 3/2$ *são casos degenerados.*

Passo 3: *A derivada* $V'(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 2/3$*, pois* $x = 3$ *não pertence ao domínio da função considerada. Assim, o único ponto crítico de* V *é* $2/3$. *Como* $V > 0$*, o ponto crítico só pode ser máximo local, e portanto, máximo absoluto. Assim,* $x = 2/3$ *é ponto de máximo de* V*, e as dimensões da caixa de volume máximo são* $20/3$*,* $5/3$ *e* $2/3$ *m, tendo ela volume* $200/27$ *m*^{3}.

Exemplo 2.33. *Deseja-se construir uma lata cilíndrica totalmente fechada de volume ν, gastando-se em sua confecção a menor quantidade de material possível. Determine a razão entre a altura e o diâmetro dessa lata.*

Solução.

Passo 1: *Diagramas contendo todas as informações do problema, bem como a introdução de variável, estão na figura 2.39*

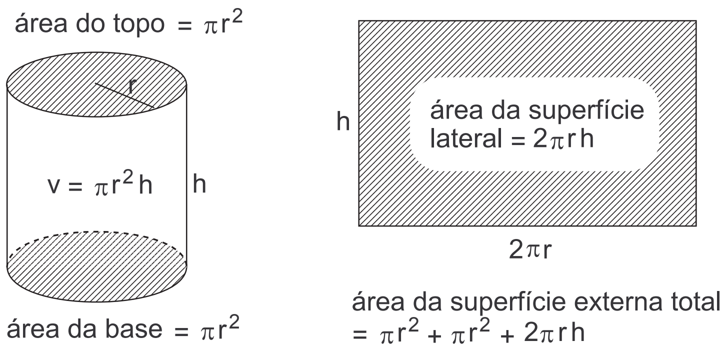


Figura 2.39 Ilustração do modelo da lata cilíndrica a ser construída.

Passo 2: *A superfície externa total da lata cilíndrica, ilustrada na figura 2.39, é dada por*

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Como $\nu = \pi r^2 h$, *temos* $h = \dfrac{\nu}{\pi r^2}$, *e então*

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\nu}{r}$$

sendo $S(r)$ *definida somente para* $r > 0$.

Passo 3: *Temos que* $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2\nu}{r^2}$, *e* $S' = 0$ *se, e somente se,* $r = \sqrt[3]{\dfrac{\nu}{2\pi}}$, *e este é o único ponto crítico de* S *no intervalo* $r > 0$.

Temos também que $\lim\limits_{r\to 0} S(r) = +\infty$ *e* $\lim\limits_{r\to +\infty} S(r) = +\infty$. *Assim,* $S(r)$ *não tem valor máximo, e seu único ponto crítico só pode ser ponto de mínimo local. Isto é confirmado observando-se que* $S''(r) = 4\pi + \dfrac{4\nu}{r^3} > 0$ *para todo* $r > 0$. *Portanto, o gráfico de* $S = S(r)$ *tem convavidade voltada para cima, o que confirma* $r = \sqrt[3]{\dfrac{\nu}{2\pi}}$ *como seu ponto de mínimo local, e também ponto de mínimo absoluto da função* S.

Sendo $r = \sqrt[3]{\dfrac{\nu}{2\pi}}$, *temos*

$$\frac{h}{r} = \frac{\nu}{\pi r^3} = \frac{\nu}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{\nu}{2\pi}}\right)^3} = \frac{\nu}{\pi\left(\dfrac{\nu}{2\pi}\right)} = 2$$

Portanto, $h = 2r$, ou seja, a altura da lata deve ser igual ao diâmetro da base se quisermos minimizar o material a ser gasto em sua confecção.

Exercícios Recomendados

EP 1. *Encontre os pontos de máximo e de mínimo, bem como os valores máximo e mínimo, das funções dadas, nos intervalos indicados.*

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+4)$, $x \in [-4, 2]$

(b) $f(x) = x^2 + 2x - 4$, $x \in [-2, 2]$.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$.

EP 2. *Um recipiente de lata, de forma cilíndrica e aberto no topo, deve ter capacidade de v litros. Determine a razão entre a altura h e o diâmetro d da base de modo que a quantidade de lata usada na sua fabricação seja a menor possível.*

EP 3. *Um estudante quer construir um viveiro retângular para seu hamster, usando a parede de um cômodo como um dos lados e cercando os demais três lados com 3 metros de tela disponíveis, obtendo a maior área retangular possível. Quais devem ser as dimensões de seu viveiro?*

EP 4. *Determinar as dimensões de um cilindro, de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio R. Sugestão. Faça um desenho visualizando o cilindro de perfil dentro da esfera. No desenho, você terá um retângulo dentro de um círculo. Demarque a altura h do cilindro, e diâmetro da sua base, $2r$. Demarque também o raio R da esfera. Use o teorema de Pitágoras obter relações entre h e r. O volume do cilindro é dado por* $V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = \pi r^2 \cdot h$.

EP 5. *Determinar as dimensões de um cilindro, inscrito em uma esfera de raio R, cuja área da superfície externa total é a máxima possível.*

EP 6. *Na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, inscreva um retângulo, de área máxima, com dois de seus lados paralelos ao eixo x (e os outros dois paralelos ao eixo y).*

S*ugestão. Os quatro vértices do retângulo, todos pertencentes à elipse, serão pontos (x, y), $(-x, y)$, $(x, -y)$ e $(-x, -y)$.*

EP 7. *Qual ponto da parábola $y = x^2 + 1$ está mais próximo do ponto $A = (3, 1)$?*
Sugestão. *A distância de um ponto qualquer $P = (x, y)$ ao ponto A é dada por*

$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$. *Se* P *é um ponto da parábola, temos* $y = x^2 + 1$, *e então* $d = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$. *Como* $d \geq 0$, *temos que* d *terá seu valor mínimo quando* d^2 *assumir seu valor mínimo. Assim, basta procurarmos o valor mínimo de* $f(x) = (x-3)^2 + x^4$.

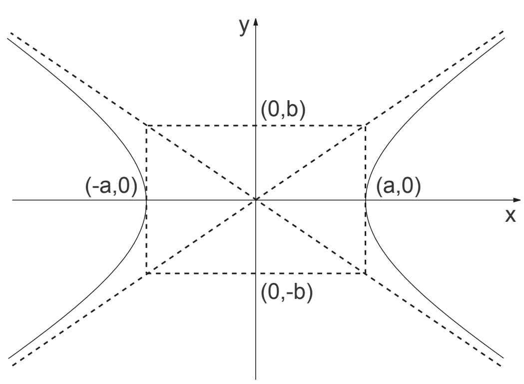
EP 8. *Um veterinário tem* 100 *m de tela de arame. Com isto deseja construir seis canis, primeiro cercando uma região retangular e depois subdividindo essa região em seis retângulos menores, por meio de cinco cercas divisórias internas, paralelas a um dos lados. Que dimensões externas, dessa região retangular, maximizam sua área total, se o veterinário gasta os* 100 *m de tela nessa construção?*

EP 9. *Ao procurar o ponto da hipérbole* $x^2 - y^2 = 1$ *mais próximo da origem, Joãozinho raciocinou da seguinte maneira.*

Temos que procurar, dentre os pontos da hipérbole, aquele para o qual $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ tem valor mínimo. Como $d \geq 0$, d será mínimo quando d^2 for mínimo. Agora, sendo $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole, temos $y^2 = x^2 - 1$, logo $d^2 = x^2 + y^2 = 2x^2 - 1$.

Procurando o valor mínimo de $d^2 = f(x) = 2x^2 - 1$, calculamos $f'(x) = 4x$. Temos $f'(x) = 0$ se e somente se $x = 0$. Para $x = 0$ porém, temos $y^2 = 0^2 - 1 = -1$, uma impossibilidade. Logo, não há nenhum ponto da hipérbole cuja distância à origem seja mínima.

Explique o erro no raciocínio de Joãozinho, já que um esboço da hipérbole (faça-o) revela que os pontos $(\pm 1, 0)$ *são seus pontos mais próximos da origem.* Sugestão. *Para quais valores de* x *define-se* d*?*



2.13 Limites indeterminados e a regra de L'Hospital

Nesta seção, estaremos apresentando as *regras de L'Hospital*, regras para calcular limites indeterminados, da forma $0/0$ ou ∞/∞, usando derivadas. Estaremos também examinando gráficos de funções envolvendo funções exponenciais.

Definição 2.16. *Diremos que o limite* $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ tem a forma indeterminada $0/0$*, se o quociente de funções reais* $f(x)/g(x)$ *está definido em um conjunto da forma* $I - \{a\}$ *(sendo* I *um intervalo, e* a *uma extremidade ou ponto interior de* I*),* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são contínuas e deriváveis para* $x \neq a$*, e* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$*.*

Definição 2.17. *Diremos que o limite* $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ tem a forma indeterminada ∞/∞*, se o quociente de funções reais* $f(x)/g(x)$ *está definido em um conjunto da forma* $I - \{a\}$ *(sendo* I *um intervalo, e* a *uma extremidade ou ponto interior de* I*),* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são contínuas e deriváveis para* $x \neq a$*, e* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$*,* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$*.*

Os mesmos conceitos são definidos analogamente se tivermos $x \to a^+$ ou $x \to a^-$, ou ainda se $a = \pm\infty$.

São duas as chamadas regras de L'Hospital. Uma para forma indeteminada $0/0$ e outra para forma indeterminada ∞/∞. Ambas podem ser enunciadas conjuntamente em um único teorema (que não demonstraremos).

Teorema 2.22 (Regras de L'Hospital)**.** *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ *tem uma forma indeterminada* $0/0$ *ou* ∞/∞*, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

caso o limite $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ *exista (sendo finito ou infinito). O mesmo vale se* a *é substituído por* a^+ *ou* a^-*, ou se* $a = +\infty$ *ou* $-\infty$*.*

Exemplo 2.34. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2}$

Solução. *Um cálculo direto nos dá a forma indeterminada* $0/0$*. Pelo método tradicional, usando fatorações, fazemos*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(3x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{3x+1} = \frac{3}{7}.$$

Porém, aplicando regras de L'Hospital, não necessitamos da fatoração:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - x - 2)'}{(3x^2 - 5x - 2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{6x-5} = \frac{3}{7}.$$

No caso de quociente de polinômios, não precisamos das regras de L'Hospital, mas às vezes as regras de L'Hospital são nosso único recurso para o cálculo de um limite.

Exemplo 2.35. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

Solução. *O limite é indeterminado, da forma $0/0$, a agora não podemos colocar em evidência nenhuma potência de x. Aplicando L'Hospital, temos*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x^3)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} && \text{(}= 0/0\text{, L'Hospital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} \\
&= \frac{1}{6} && \text{(usando } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\text{)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.36. *Calcular* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$

Solução. *Aqui temos uma indeterminação da forma ∞/∞. Aplicando L'Hospital, temos*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^{2x})'}{(x^3)'} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2} && \text{(}= \infty/\infty\text{, L'Hospital)} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{(2e^{2x})'}{(3x^2)'} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{4e^{2x}}{6x} && \text{(}= \infty/\infty\text{, L'Hospital)} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{8e^{2x}}{6} = \frac{+\infty}{6} = +\infty
\end{aligned}
$$

No cálculo de limites, sabemos que também $0 \cdot \infty$ e $(+\infty) - (+\infty)$ são símbolos de indeterminação. No caso $0 \cdot \infty$ também podemos aplicar regras de L'Hospital, após uma manipulação conveniente das funções no limite.

Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ é indeterminado na forma $0 \cdot \infty$, isto é, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Neste caso, primeiramente fazemos

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = 0/0,$$

e então, aplicando L'Hospital, calculamos

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{(1/g(x))'},$$

ou então

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \infty/\pm\infty$$

e então, por L'Hospital, calculamos

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{(1/f(x))'}.$$

Exemplo 2.37. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$.

Solução. *Temos* $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty)$. *Recorde-se que* $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ *(veja seção 2.8). Neste caso, fazemos*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} && (= -\infty/+\infty) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

Além da três indeterminações já estudas, existem mais três. São elas: 0^0, ∞^0 e 1^∞. Em toda a literatura de matemática universitária, adota-se, ainda que sub-liminarmente às vezes, a definição $0^0 = 1$. No cálculo de limites, no entanto, 0^0 é um símbolo de indeterminação.

Consideremos a função $f(x) = x^{k/\ln x}$, sendo k uma constante, definida para $x > 0$. Vimos na seção 2.8, que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$. Assim, utilizando *álgebra de limites*, temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^{k/\ln 0^+} = 0^{k/-\infty} = 0^0.$$

No entanto, $f(x) = x^{k/\ln x} = e^{\ln(x^{k/\ln x})} = e^{\frac{k}{\ln x}\cdot \ln x} = e^k$, ou seja, $f(x)$ é a função constante e^k, e portanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^k$.

Suponhamos que o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ tem uma das formas indeterminadas 0^0, ∞^0 ou 1^∞. Aqui deveremos ter $f(x) > 0$ no domínio da função f^g.

Em qualquer um desses casos, fazemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)},$$

e então

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L,$$

em que $L = \lim\limits_{x\to a} [g(x) \cdot \ln f(x)]$.

Para as formas indeterminadas 0^0, ∞^0 e 1^∞, o limite $L = \lim\limits_{x\to a} [g(x) \cdot \ln f(x)]$ terá sempre a forma indeterminada $0 \cdot \infty$ (ou $\infty \cdot 0$), e recaímos então em um caso anteriormente estudado.

Exemplo 2.38. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ *(aqui,* $x \to 0$ *significa* $x \to 0^+$*).*

Solução. *Aqui temos uma indeterminação* 0^0. *Seguindo procedimento descrito acima, fazemos*

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\cdot \ln x},$$

e então, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^L$, *sendo* $L = \lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$. *Pelo exemplo 2.37,* $L = 0$, *e portanto,* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

Exemplo 2.39. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x}$.

Solução. *Aqui temos uma indeterminação* 1^∞. *Fazemos* $(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x} = e^{\ln(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\operatorname{sen} 2x)}$. *Então,* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x} = e^L$, *sendo*

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\operatorname{sen} 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen} 2x)}{x} \qquad (= 0/0).$$

Aplicando L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen} 2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+\operatorname{sen} 2x)]'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\operatorname{sen} 2x}(2\cos 2x) = 2.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x} = e^2$.

As regras de L'Hospital, nos casos de indeterminação $0/0$ e ∞/∞, dizem que $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, mas somente quando este último limite é efetivamente computável.

No exemplo a seguir, temos uma indeterminação ∞/∞ para a qual a regra de L'Hospital não se aplica porque o limite $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ não existe, mas o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ é calculável.

Exemplo 2.40. *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução. *Temos* $\operatorname{sen} x \geq -1$, *então* $x+\operatorname{sen} x \geq x-1$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$. *Logo,* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\operatorname{sen} x) \geq \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$. *Assim,* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\operatorname{sen} x) = +\infty$, *e o limite* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x}$ *é indeterminado na forma* ∞/∞.

Aplicando L'Hospital, temos $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$. *Este limite não existe, pois quando* x *cresce indefinidamente,* $\cos x$ *fica oscilando indefinidamente entre* -1 *e* $+1$.

Entretanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$, *pois, sendo* $x>0$, *como* $-1\leq\operatorname{sen} x\leq 1$,

$$-\frac{1}{x}\leq\frac{\operatorname{sen} x}{x}\leq\frac{1}{x}.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, *temos* $0\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\leq 0$, *e portanto* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$. *Logo,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1+0 = 1.$$

Para finalizar será apresentado mais um exemplo envolvendo o esboço de gráficos.

Exemplo 2.41. *Esboce o gráfico de* $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

Solução. *Temos* $D(f) = \mathbb{R} =$ *e*

$$f'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Os pontos críticos de f *são* $\pm\sqrt{2}/2$. *Assim, Temos* $f'(x) > 0$ *se* $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$; *e* $f'(x) < 0$ *se* $x > \sqrt{2}/2$ *ou se* $x < -\sqrt{2}/2$. *Portanto,* f *é crescente em* $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$, *e decrescente em cada um dos intervalos* $[\sqrt{2}/2, +\infty[$ *e* $]-\infty, -\sqrt{2}/2]$.

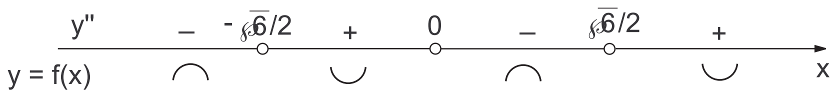
O ponto $x_1 = -\sqrt{2}/2$ *é um ponto de mínimo local de* f *e* $x_2 = \sqrt{2}/2$ *é um ponto de máximo local de* f. *Temos* $f(-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}e^{-1/2}$ *e* $f(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}e^{-1/2}$. *Para o esboço do gráfico, usaremos* $\sqrt{2}e^{-1/2} \approx 1,4 \cdot 0,6 = 0,84$.

Temos, também,

$$f''(x) = -12xe^{-x^2} + 8x^3e^{-x^2} = 4e^{-x^2}(2x^3 - 3x) = 4e^{-x^2}x(2x^2 - 3).$$

E, $f''(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = \pm\sqrt{6}/2$ *ou* $x = 0$.

A variação de sinais de f'', *com a correspondente análise das concavidades do gráfico de* f, *é dada no diagrama abaixo. Logo, são pontos de inflexão*



do gráfico os pontos

$$P_1 = (-\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}e^{-3/2}), \quad P_2 = (0,0) \quad \text{e} \quad P_3 = (\sqrt{6}/2, \sqrt{6}e^{-3/2}).$$

Temos,

$$f(-\sqrt{6}/2) = -\sqrt{6}e^{-3/2} \approx -0,6, \quad f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(\sqrt{6}/2) = \sqrt{6}e^{-3/2} \approx 0,6.$$

Pesquisando a existência de assíntotas do gráfico temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \pm\infty \cdot e^{-\infty} = \pm\infty \cdot 0.$$

Para evitarmos a indeterminação, fazemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} (= \frac{\infty}{\infty}).$$

Aplicando regras de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = \frac{2}{\pm\infty} = 0.$$

Assim, a reta $y = 0$ *(eixo* x*) é assíntota horizontal do gráfico de* f. *Com base nos elementos estudados, o gráfico de* f *é esboçado na figura 2.40.*

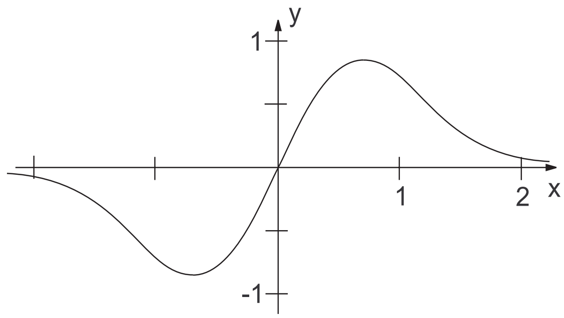


Figura 2.40 Esboço do gráfico da função $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

Exercícios Recomendados

EP 1. *Calcule os seguintes limites, aplicando regras de L'Hospital se necessário.*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$ *(n inteiro positivo)*

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^{-x}$ *(n inteiro positivo)*

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} 2x)}{\ln(\operatorname{sen} 3x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2)^x$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{1/x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$

(l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\lambda e^{-x}$ *(λ real positivo)*

EP 2. *Calcule as equações das retas assíntotas do gráfico de cada uma das seguintes funções.*

(a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

(b) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(c) $y = 2x \cdot e^{-1/x}$

(d) $y = x^2 e^{-x}$

(e) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

EP 3. *Esboce os gráficos das seguintes funções.*

(a) $y = 2xe^{-x}$

(b) $y = e^{-x^2}$

(c) $y = 2x^2 e^{-x^2}$

(d) $y = \dfrac{2\ln(2x)}{x}$.

UNIDADE 3

Integral

3.1 Primeiras palavras

Neste capítulo será estudado o conceito de integral. Apesar da formalização da integral ser possível apenas com o desenvolvimento do conceito de limite, sua utilização já era feitas por alguns povos antigos. Os gregos, muito antes do *Cálculo*, já utilizavam, de forma intuitiva, a técnica de integração para calcular área de círculo, por exemplo. Mas nosso objetivo está além da formalização, precisamos ter métodos de cálculo de integral de forma a não dependermos somente de sua definição para realização deste cálculo.

Veremos que a integral indefinida, que nos auxiliará no cálculo da *integral de Riemann*, é na verdade uma especie de operação inversa da derivação. Depois de apresentarmos a definição de *integral definida*, suas propriedades e técnicas de seu cálculo, serão apresentados algumas aplicações.

3.2 Integrais indefinidas

Nesta seção será apresentado o conceito de *integral indefinida*, que é o processo de antiderivação.

3.2.1 Antiderivadas

Definição 3.1. *Sendo* $f(x)$ *e* $F(x)$ *definidas em um intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*, dizemos que* F *é uma* antiderivada*, ou uma* primitiva*, de* f *em* I*, se*

$$F'(x) = f(x),$$

para todo $x \in I$*. Ou seja,* F *é antiderivada ou primitiva de* f *se* F *é uma função cuja derivada é* f*. O cálculo da antiderivada é chamado de* antiderivação*.*

Exemplo 3.1. *Como primeiros exemplos, temos*

$f(x)$	*primitiva de* $f(x)$
$3x^2$	x^3
2	$2x+7$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$4-\cos x$

Proposição 3.1. *Se* F *é antiderivada de* f *em* I*, e* C *é uma constante, então* $F+C$ *também é uma antiderivada de* f *em* I*.*

Demonstração. De fato, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então $[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$. Portanto, $F(x) + c$ também é uma antiderivada de $f(x)$ em I. $\square$

Assim, por exemplo x^3, $x^3 + 5$ e $x^3 - \sqrt{2}$ são primitivas de $3x^2$. Veremos agora que, em um intervalo I, duas primitivas de uma mesma função diferem entre si por uma constante.

A proposição anterior nos garante que se tivermos uma antiderivada de uma função f, basta somarmos uma constante para obtermos uma nova antiderivada de f. A proposição a seguir, garantirá mais do que isso. Ela garantirá que quaisquer duas antiderivadas diferem prla soma de uma constante.

Proposição 3.2. *Se* F_1 *e* F_2 *são antiderivadas de* f*, em* $I \subset \mathbb{R}$*, então existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $F_1(x) = F_2(x) + c$*, para todo* $x \in I$*.*

Para demonstrar a proposição 3.2, faremos uso do seguinte resultado.

Lema 3.3. *Se* f *é contínua no intervalo* $[a, b]$ *e* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in]a, b[$*, então* f *é constante em* $[a, b]$*, ou seja, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = c$ *para todo* $x \in [a, b]$*.*

Poderíamos aceitar o lema 3.3 como evidente e seguir adiante. No entanto, este lema é consequência de um teorema importante sobre funções deriváveis, conhecido como teorema do valor médio. Como tornaremos a fazer uso do teorema do valor médio mais adiante, julgamos oportuno citá-lo agora.

Teorema 3.4 (Teorema do valor médio)**.** *Suponhamos que* f *é uma função contínua no intervalo* $[a, b]$ *e derivável no intervalo* $]a, b[$*. Então existe* $w \in]a, b[$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(w).$$

Aceitaremos este teorema sem demonstração, e faremos uma interpretação geométrica de seu resultado.

O quociente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é a taxa de variação média, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, da função f, no intervalo $[a, b]$, sendo $\Delta x = b - a$ e $\Delta f = f(b) - f(a)$. Ele é o coeficiente angular da reta passando por $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. O teorema do valor médio diz que essa taxa de variação média é também a taxa de variação instantânea de f, em relação a x, df/dx, em algum ponto w no interior do intervalo. Em termos geométricos, a inclinação da reta AB coincide com a inclinação de uma reta tangente ao gráfico de f em um ponto $(w, f(w))$, para algum $w \in]a, b[$. A figura 3.1 ilustra o teorema do valor médio.

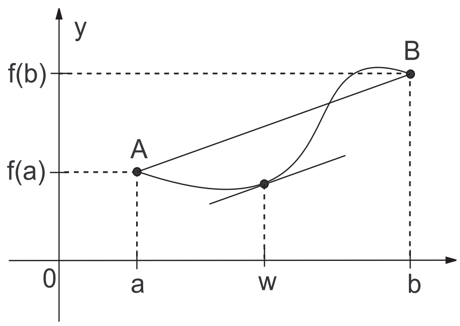


Figura 3.1 $\dfrac{f(b)-(f(a)}{b-a} = f'(w)$.

Uma interpretação cinemática do teorema do valor médio é a seguinte: a velocidade média de um ponto móvel, em movimento retilíneo, no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, coincide com sua velocidade instantânea em algum instante $t_0 \in]t_1, t_2[$, isto é,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = s'(t_0)$$

em um instante t_0, com $t_1 < t_0 < t_2$.

Por exemplo, se um carro, com velocidade variável, faz um percurso de 180 km em duas horas, sua velocidade média é $\frac{180\text{km}}{2\text{h}} = 90$ km/h. Intuitivamente, sabemos que em algum instante do percurso, seu velocímetro acusará a velocidade instantânea de 90 km/h.

Demonstração. (Lema 3.3) Suponhamos $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Mostraremos que, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) = f(x_2)$, e portanto f é constante em I.

Temos f contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$. Pelo teorema do valor médio, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(w)$ para algum $w \in]x_1, x_2[$. Como $f'(w) = 0$, temos $f(x_1) = f(x_2)$, e nossa demonstração termina aqui. □

Demonstração. (Proposição 3.2) Suponhamos que, $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Consideremos a função $\varphi = F_1 - F_2$. Então, $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, para todo $x \in I$. Pelo lema 3.3, φ é constante no intervalo I. Assim, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) - F_2(x) = c$ para todo $x \in I$. Portanto , $F_1(x) = F_2(x) + c$, para todo $x \in I$. □

Definição 3.2 (Integral indefinida)**.** *Sendo* F *uma primitiva de* f *no intervalo* I*, chama-se* integral indefinida de f*, no intervalo* I*, à primitiva genérica de* f *em* I*,*

$F(x) + C$, *sendo* C *uma constante real genérica. Denotamos tal fato por*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Nesta notação, omite-se o intervalo I.

O termo $f(x)$ é chamado de integrando, e x é chamada a variável de integração.

Diante da definição de integrais indefinidas, podemos listar algumas integrais indefinidas cujo cálculo é imediato.

Proposição 3.5. *Considerando os cálculo já realizados de derivadas temos,*

(i) $\displaystyle\int dx = x + C$, *para qualquer constante real* C*;*

(ii) $\displaystyle\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, *para todo* $\alpha \neq -1$ *real;*

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$.

(iv) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$.

(v) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$.

(vi) $\displaystyle\int e^{x}\, dx = e^{x} + C$.

(vii) $\displaystyle\int a^{x}\, dx = \frac{a^{x}}{\ln a}$ *(*$a > 0, a \neq 1$*).*

(viii) $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$.

(ix) $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$.

(x) $\displaystyle\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C$.

(xi) $\displaystyle\int \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cossec} x + C$.

(xii) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C$.

(xiii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$.

Demonstração. Para a dedução das integrais acima, basta verificar que a derivada do segundo membro, em cada igualdade, é a função que se encontra sob o sinal de integração. Por exemplo, se $\alpha \neq -1$,

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1) \cdot \frac{x^{\alpha+1-1}}{\alpha+1} = x^{\alpha};$$

se $x > 0$,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x;$$

e se $x < 0$,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = 1/x;$$

e como $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, temos

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x.$$

□

O teorema a seguir nos mostra a condição de *operação inversa* entre a derivada e a integral indefinida.

Teorema 3.6. *Seja* f *uma função real,*

- *se* f *é diferenciável, então*

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

- *se* f *possuir uma antiderivada, então*

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

Exemplo 3.2. *Consideremos a função* $f(x) = \operatorname{sen} x$*. Temos:*

- *como* $\operatorname{sen} x$ *é diferenciável,*

$$\int \left[\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x\right]\,dx = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C;$$

- *como* $\operatorname{sen} x$ *possui antiderivada,*

$$\frac{d}{dx}\left[\int \operatorname{sen} x\,dx\right] = \frac{d}{dx}[-\cos x + C] = -(-\operatorname{sen} x + 0) = \operatorname{sen} x.$$

A seguir temos uma proposição que reuni uma série de regras para integrais indefinidas simples.

Proposição 3.7. *Se* $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$ *e* $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$*, então, sendo* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a \neq 0$*,*

(i) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C$

(ii) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot F(x) + C$

(iii) $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$

(iv) $\int f(x-b)\,dx = F(x-b) + C$

(v) $\int f(b-x)\,dx = -F(b-x) + C$

(vi) $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$

(vii) $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Demonstração. Como $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$, e $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$. Então,

(i) $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, logo

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

com $(C = C_1 + C_2)$.

(ii) Sendo k uma constante real, $[k \cdot F(x)]' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$, logo

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + C = k\int f(x)\,dx$$

com $(kC_1 = C)$.

Das cinco propriedades restantes, as quatro primeiras são consequências imediatas da última, assim finalizaremos com a demonstração apenas da última.

Por hipótese, $F'(x) = f(x)$. Logo, $[F(ax+b)]' = F'(ax+b) \cdot (ax+b)' = af(ax+b)$, de onde $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} \cdot af(ax+b) = f(ax+b)$. Portanto, $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$. $\square$

Exemplo 3.3. *Calcule a integral* $\int (5x^3 + 2\cos x)\,dx$.

Solução. *Aplicando as propriedades citadas na proposição 3.7, temos*

$$\begin{aligned}\int (5x^3 + 2\cos x)\,dx &= \int 5x^3\,dx + \int 2\cos x\,dx \\ &= 5\int x^3\,dx + 2\int \cos x\,dx \\ &= 5\left(\frac{1}{4}x^4\right) + C_1 + 2(\operatorname{sen} x) + C_2 \\ &= \frac{5}{4}x^4 + 2(\operatorname{sen} x) + C,\end{aligned}$$

com $C = C_1 + C_2$. *Como as constantes de integração são arbitrárias, poderíamos ter aparecido com ela apenas após a última igualdade.*

A seguir serão apresentados mais alguns exemplos utilizando as regras citadas na proposição 3.7.

Exemplo 3.4. *Considerando as integrais indefinidas mais básicas podemos obter integrais mais elaboradas, como veremos neste exemplo.*

(i) Como $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$*, temos,*

(1) $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$

(2) $\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + C$

(ii) Como $\int e^x\,dx = e^x + C$*, temos*

(1) $\int e^{x-5}\,dx = e^{x-5} + C$

(2) $\int e^{2-x}\,dx = -e^{2-x} + C$

(3) $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$

(iii) Como $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ *e* $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$*, temos*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \sec^2 x\,dx - \int 1\,dx \\ &= \operatorname{tg} x - x + C.\end{aligned}$$

(iv) Para calcular a integral $\int (5\cos x + \cos 5x)\,dx$ *usamos*

$$\begin{aligned}\int (5\cos x + \cos 5x)\,dx &= 5\int \cos x\,dx + \int \cos 5x\,dx \\ &= 5\operatorname{sen} x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + C\end{aligned}$$

(v) Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$*, temos*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x + C.\end{aligned}$$

(vi) Para calcular a integral $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx$ *podemos utilizar as seguintes manipulações algébricas:*

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx &= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \int x^{-1/2} \, dx + \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln|x| + C = 2\sqrt{x} + \ln|x| + C.\end{aligned}$$

3.3 Integração por mudança de variável

Seja F uma antiderivada de f, ou seja, $f'(x) = f(x)$, em algum intervalo I. E, seja g uma função diferenciável tal que $g(x) \in D(f)$ para todo $x \in I$. Consideremos a função h, dada por

$$h(x) = F(g(x)).$$

Temos que

$$\int \frac{d}{dx} h(x) \, dx = \int \frac{d}{dx} F(g(x)) \, dx = F(g(x)) + K,$$

para alguma constante K.

Por outro lado, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Logo,

$$\int \frac{d}{dx} h(x) \, dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + K,$$

para alguma constante K.

Para simplificar, podemos adotar $u = g(x)$ e $du = g'(x) \, dx$, e assim

$$\int \frac{d}{dx} h(x) \, dx = \int f(x) \, du.$$

Com isso podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.8. *Se* F *é uma antiderivada de* f *e* g *é uma função diferenciável, então*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + K,$$

para alguma constante K. *Se* $u = g(x)$ *e* $du = g'(x)\,dx$, *então*

$$\int f(u)\,du = F(u) + K,$$

para alguma constante K.

Teremos agora uma sequência de exemplos em que será utilizado a técnica de mudança de variável.

Exemplo 3.5. *Determine a integral* $\int \sqrt{5x+7}\,dx$.

Solução. *Tomemos* $g(x) = u = 5x + 7$, *com isso temos* $du = g'(x)\,dx = 5\,dx$. *Aplicando o teorema*

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{5x+7}\,dx &= \int \frac{1}{5}5\sqrt{5x+7}\,dx \\
&= \int \frac{1}{5}\sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{5}\int \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{5}\int u^{1/2}\,du \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{1/2+1}u^{1/2+1} + K \\
&= \frac{2}{15}u^{3/2} + K \\
&= \frac{2}{15}\sqrt{u^3} + K \\
&= \frac{2}{15}\sqrt{(5x+7)^3} + K.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.6. *Calcule* $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,dx$.

Solução. *Começamos fazendo a substituição* $u = g(x) = 3 - 2x$. *Então,*

$$du = g'(x)\cdot dx = (3-2x)'\,dx = -2dx.$$

Portanto, $dx = -\frac{1}{2}du$. *Assim, temos*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\
&= -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \\
&= -u^{1/2} + C \\
&= -\sqrt{u} + C \\
&= -\sqrt{3-2x} + C.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.7. *Calcule* $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

Solução. *Como* $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ *e* $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, *tomaremos* $u = g(x) = \cos x$, *e assim* $du = (\cos x)'dx = -\operatorname{sen} x\, dx$. *Logo,*

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg} x\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx \\
&= \int \frac{-1}{u} du \\
&= -\ln|u| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.8. *Determine* $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$.

Solução. *Note que* $(x^2+5)' = 2x$. *Isto sugere fazermos* $u = g(x) = x^2+5$, *e assim* $du = 2x\, dx$, *ou seja,* $x\, dx = \dfrac{1}{2}du$.

Temos, então,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\, dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}du \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du \\
&= u^{1/2} + C \\
&= \sqrt{x^2+5} + C.
\end{aligned}$$

No próximo exemplo a integral será calculada de duas formas distintas utilizando a técnica de substituição.

Exemplo 3.9. *Calcule* $\int \cos^3(2x)\operatorname{sen}(2x)\, dx$.

Primeira solução. *Tomemos* $u = \operatorname{sen}(2x)$, *e assim* $du = 2\cos(2x)\, du$.

Então,

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx &= \int \frac{1}{2} 2\cos(2x)\cos^2(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}\cos^2(2x)\,\text{sen}(2x)[2\cos(2x)dx] \\
&= \int \frac{1}{2}[1-\text{sen}^2(2x)]\,\text{sen}(2x)[2\cos(2x)dx] \\
&= \int \frac{1}{2}(1-u^2)u\,du \\
&= \int \frac{1}{2}(u-u^3)\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(\int u\,du - \int u^3\,du\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}\right)+C \\
&= \frac{1}{4}\text{sen}^2(2x)-\frac{1}{8}\text{sen}^4(2x)+C.
\end{aligned}$$

Segunda solução. *Tomaremos* $u = g(x) = \cos(2x)$*, e assim temos que* $du = -2\,\text{sen}(2x)\,du$*. Então,*

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx &= \int \frac{-1}{2}(-2)\cos^3(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx \\
&= \int \frac{-1}{2}\cos^3(2x)[-2\,\text{sen}(2x)dx] \\
&= \int \frac{-1}{2}u^3\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int u^3\,du \\
&= -\frac{1}{2}\frac{u^4}{4}+K \\
&= -\frac{1}{8}\cos^4(2x)+K.
\end{aligned}$$

Perceba que as expressões obtidas em cada uma das soluções são distintas. Porém,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}\cos^4(2x) &= -\frac{1}{8}(\cos^2(2x))^2 \\
&= -\frac{1}{8}(1-\text{sen}^2(2x))^2 \\
&= -\frac{1}{8}(1-2\,\text{sen}^2(2x)+\text{sen}^4(2x)) \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\text{sen}^2(2x)-\frac{1}{8}\text{sen}^4(2x).
\end{aligned}$$

Tomando $K = C - \frac{1}{8}$*, temos a igualdade entre as respostas.*

A próxima proposição amplia o número fórmulas para as integrais indefinidas.

Proposição 3.9. *Sendo* $a > 0$*, e* $\lambda \neq 0$*,*

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C$

Demonstração. (i) Temos que $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2}\, dx$. Fazendo $\dfrac{x}{a} = y$, temos $dx = a\, dy$, e então

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1 + y^2}\, dy \\
&= \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^2 + 1}\, dy \\
&= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} y + C \\
&= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.
\end{aligned}$$

(ii) Para deduzir a segunda integral, note que

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{\frac{1}{2a}}{a + x} + \frac{\frac{1}{2a}}{a - x}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx &= \frac{1}{2a} \int \frac{1}{a + x}\, dx + \frac{1}{2a} \int \frac{1}{a - x}\, dx \\
&= \frac{1}{2a} \ln |a + x| - \frac{1}{2a} \ln |a - x| + C \\
&= \frac{1}{2a} \ln \frac{|a + x|}{|a - x|} + C \\
&= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.
\end{aligned}$$

(iii) Para deduzir a terceira integral, fazemos uso da integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + C,$$

e aplicando uma mudança de variável como no cálculo da primeira integral. Tente finalizar esta integral.

(iv) Para provar a quarta integral, apelaremos para definição de antiderivada, provando que

$$(\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}}.$$

De fato, sendo $u = x+\sqrt{x^2+\lambda}$, e sendo $(\sqrt{w})' = \frac{1}{2\sqrt{w}} \cdot w'$, temos

$$\begin{aligned}
(\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|)' &= (\ln|u|)' \\
&= \frac{1}{u} \cdot u' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}} \cdot (x+\sqrt{x^2+\lambda})' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}} \left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+\lambda}} \cdot \cancel{2}x\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+\lambda}+x}{\sqrt{x^2+\lambda}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}}.
\end{aligned}$$

□

Exercícios Recomendados

Calcule as seguintes integrais indefinidas, utilizando a técnica de mudança de variáveis, quando necessário.

EP 1. $\int (x+\sqrt{x})\,dx.$

EP 2. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx.$

EP 3. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}.$

EP 4. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx.$

EP 5. $\int \operatorname{sen} ax\,dx.$

EP 6. $\int \frac{\ln x}{x} dx.$

EP 7. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 3x} dx.$

EP 8. $\int \frac{dx}{3x-7}.$

EP 9. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx.$

EP 10. $\int \operatorname{cotg}(5x-7)dx.$

EP 11. $\int \operatorname{cotg} \frac{x}{3}\,dx.$

EP 12. $\int \operatorname{tg} \varphi \sec^2 \varphi \, d\varphi$. Sugestão. *Faça* $u = \operatorname{tg} \varphi$.

EP 13. $\int e^x \operatorname{cotg} e^x \, dx$. Sugestão. *Faça* $u = e^x$.

EP 14. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$. Sugestão. *Faça* $u = \operatorname{sen} x$.

EP 15. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x \, dx$.

EP 16. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. Sugestão. *Faça* $u = 2x^2 + 3$.

EP 17. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

EP 18. $\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\cos^3 x}$.

EP 19. $\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$.

EP 20. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$.

EP 21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x \, dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$. Sugestão. *Faça* $u = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.

EP 22. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

EP 23. $\int \frac{\arccos^2 x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

EP 24. $\int \frac{x \, dx}{x^2+1}$.

EP 25. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$.

EP 26. $\int \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x + 3} dx$.

EP 27. $\int \frac{dx}{x \ln x}$. Sugestão. *Faça* $u = \ln x$.

EP 28. $\int 2x(x^2+1)^4 \, dx$.

EP 29. $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$. Sugestão. *Mostre que* $\operatorname{tg}^4 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x + 1$.

EP 30. $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 1)}$.

EP 31. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$.

EP 32. $\int e^{2x} dx$.

EP 33. $\int x a^{x^2} dx$.

EP 34. $\int \frac{e^x}{3+4e^x} dx$.

EP 35. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$.

EP 36. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$.

EP 37. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.

EP 38. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$.

EP 39. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$.

EP 40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

EP 41. $\int \frac{x^2\,dx}{5-x^6}$. Sugestão. *Faça* $x^6 = (x^3)^2$*, e então* $u = x^3$*.*

EP 42. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Sugestão. *Faça* $u = x^2$*.*

EP 43. $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$.

EP 44. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$.

EP 45. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

EP 46. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

EP 47. $\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

EP 48. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

EP 49. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$. Sugestão. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx.$

3.4 Integração por partes

Há essencialmente dois métodos empregados no cálculo de integrais indefinidas de funções elementares. Um deles é a integração por mudança de variável, seção 3.3. O outro método é chamado de *integração por partes*, que apresentaremos nesta seção.

Teorema 3.10 (Integração por partes)**.** *Sejam* $u = f(x)$ *e* $v = g(x)$ *funções diferenciáveis em um certo intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*, tais que* $f'(x)$ *e* $g'(x)$ *são contínuas. Então,*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx,$$

ou seja,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Demonstração. Da regra do produto em derivação, temos

$$D_x[f(x)g(x)] = [D_x f(x)]g(x) + f(x)[D_x g(x)].$$

Logo,

$$f(x)[D_x g(x)] = D_x[f(x)g(x)] - [D_x f(x)]g(x).$$

Então, temos

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - g(x)f'(x).$$

Integrando ambos os lados da igualdade em relação a x, obtemos

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int [f(x)g(x)]'\,dx - \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

$\square$

Exemplo 3.10. *Calcule $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.*

Solução. *Tomaremos $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Assim, $du = 1\,dx = dx$, e $v = \int \operatorname{sen} x\,dx = \cos x$. Para os propósitos da integração por partes, basta tomar $v = -\cos x$, menosprezando a constante de integração, na verdade basta tomá-la igual a zero. Temos, então*

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} &= u \cdot v - \int v \cdot du \\
&= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\
&= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.
\end{aligned}$$

Com a técnica de integração por partes podemos calcular a única função elementar que está sem integral indefinida, que é a função logaritmo natural $\ln$.

Exemplo 3.11. *Determine a integral indefinida $\displaystyle\int \ln x\,dx$.*

Solução. *Tomemos $u = \ln x$ e $dv = dx$, assim $du = \dfrac{1}{x}$ e $v = \displaystyle\int dx = x$. Então, pela técnica de integração por partes*

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} &= uv - \int v\,du \\
&= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\ln x - \int 1\,dx \\
&= x\ln x - x + C \\
&= x(\ln x - 1) + C.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.12. *Determine* $\int x \ln x \, dx$.

Solução. *Tomaremos* $u = \ln x$ *e* $dv = x\, dx$. *Assim,* $du = \frac{1}{x}\, dx$ *e* $v = \int x\, dx$. *Logo,* $v = \frac{x^2}{2}$. *Temos, então*

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= \int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{x\, dx}_{dv} \\
&= u \cdot v - \int v \cdot du \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.13. *Calcule* $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Solução. *Faremos* $u = \operatorname{arctg} x$ *e* $dv = dx$. *Assim,* $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ *e* $v = x$. *Logo,*

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} &= uv - \int v\, du \\
&= x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Para calcular a integral $J = \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$ *utilizaremos uma mudança de variável fazendo* $w = 1 + x^2$. *Como* $dw = 2x\, dx$, *temos* $x\, dx = \frac{1}{2} dw$. *Logo,*

$$J = \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int \frac{1}{w}\, dw = \ln|w| + C = \ln(1+x^2) + C.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + C.$$

3.4.1 Um estratégia para integrar por partes

A técnica de integração por partes é, na verdade, transferir o cálculo de uma integral $\int u\, dv$ para o cálculo de uma integral $\int v\, du$, que tenha um método de resolução mais simples. Porém, ao aplicarmos a técnica de integração por partes em uma integral da forma $\int f(x)g(x)\, dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)g(x)\, dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv. Esta escolha apesar de ser livre, ela não pode ser qualquer, posi corremos o risco de não termos êxito no cálculo devido a escolha realizada.

De uma forma geral deve-se escolher o termo dv sendo a expressão mais complexa do integrando que seja fácil de integrar, mas corremos o risco da integral $\int v\,du$ não ser mais simples.

Apresentaremos um critério que funciona bem em algumas situações, que consiste em direcionar a escolha u e dv. Ele foi publicado como uma pequena nota em uma edição antiga da revista *American Mathematical Monthly*. Considere o seguinte esquema de funções elementares:

L	**L**ogarítmicas
I	**I**nversas de trigonométricas
A	**A**lgébricas
T	**T**rigonométricas
E	**E**xponenciais

Na tabela acima mostra que as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções elementares. O critério é: a função elementar cuja letra correspondente está mais à esquerda será u no anagrama LIATE, e a outra fará parte do dv, juntamente com dx.

Este critério foi utilizado nos exemplos apresentados nesta seção. Reveja-os e tente observar os critérios nas escolhas de u e dv.

Exemplo 3.14. *Determine a integral* $\int xe^{2x}\,dx$.

Solução. *Temos que o integrando é um produto de duas funções, uma polinomial, logo algébrica, que é* x*, e outra exponencial* e^{2x}*. Pelo critério do anagrama LIATE, devemos adotar* $u = x$ *e* $dv = e^{2x}\,dx$*, pois a letra A é anterior a E no anagrama. Assim,* $du = dx$ *e* $v = \frac{1}{2}e^{2x}$*. Então,*

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}\,dx}_{dv} &= uv - \int v\,du\\ &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + K.\end{aligned}$$

Exemplo 3.15. *Calcule* $\int x\sec^2 x\,dx$.

Solução. *Temos que o integrando é um produto de uma função algébrica,* x*, e uma trigonométrica,* $\sec^2 x$*. Pelo critério do anagrama LIATE, devemos escolher*

$u = x$ *e* $dv = \sec^2 x\,dx$*, pois a letra A é anterior à letra T no anagrama. Assim,* $du = dx$ *e* $v = \operatorname{tg} x$*. Então,*

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dv} &= uv - \int v\,du \\
&= x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx \\
&= x \operatorname{tg} x - (-\ln|\cos x|) + C \\
&= x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Em alguma situações, apesar de ajudar no cálculo da integral, a técnica de integração por partes pode não nos fornecer uma resposta "imediata", mas uma reaplicação

Exemplo 3.16. *Calcule* $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$*.*

Solução. *Seguindo o critério LIATE, faremos* $u = \operatorname{sen} x$ *e* $dv = e^x\,dx$*, pois a letra T, trigonométrica, vem antes de E, exponencial, no anagrama LIATE. Assim,* $du = (\operatorname{sen} x)'dx = \cos x\,dx$ *e* $v = e^x$*. Então,*

$$\begin{aligned}
\int e^x \operatorname{sen} x\,dx &= \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{u} \underbrace{e^x\,dx}_{dv} \\
&= uv - \int v\,du \\
&= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx
\end{aligned}$$

Parece que não conseguimos resolver, uma vez que estamos com uma integral de igual dificuldade para resolver $J = \displaystyle\int e^x \cos x\,dx$*. No entanto, ao resolver esta nova integral pelo critério do anagrama LIATE, fazendo* $u = \cos x$ *e* $dv = e^x\,dx$*, assim* $du = (\cos x)'dx = -\operatorname{sen} x\,dx$ *e* $v = e^x$*. Então,*

$$\begin{aligned}
J = \int e^x \cos x\,dx &= \int \underbrace{\cos x}_{u} \underbrace{e^x\,dx}_{dv} \\
&= uv - \int v\,du \\
&= e^x \cos x - \int (-\operatorname{sen} x) e^x\,dx \\
&= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx
\end{aligned}$$

O resultado final é interessante. Chamando $I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$*,*

$$\begin{aligned}
I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx &= e^x \operatorname{sen} x - J \\
&= e^x \operatorname{sen} x - (e^x \cos x + I) \\
&= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I
\end{aligned}$$

Isolando I *na equação, temos*

$$2I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + C.$$

Portanto,

$$I = \frac{1}{2}(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x) + C'$$

Exemplo 3.17. *Determine* $\int x^2 e^{-x}\, dx$.

Solução. *Aplicando o critério do anagrama LIATE, temos* $u = x^2$*,* **A***lgébrica, e* $dv = e^{-x}\, dx$*,* **E***xponencial, assim* $du = 2x\, dx$ *e* $v = -e^{-x}$*. Então,*

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-x}\, dx}_{dv} &= uv - \int v\, du \\ &= -x^2 e^{-x} - \int (-e^{-x}) 2x\, dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\, dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Mais uma vez chegamos numa integral com mesmo nível de dificuldade da integral inicial. Porém, note que o grau da função polinomial diminuiu, e se integrarmos por partes utilizando o critério do anagrama LIATE, conseguiremos resolver.

Para integral $\int x e^{-x}\, dx$ *tomaremos* $u = x$ *e* $dv = e^{-x}\, dx$*, assim* $du = dx$ *e* $v = -e^{-x}$*. Então,*

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-x}\, dx}_{dv} &= -x e^{-x} - \int (-e^{-x})\, dx \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x}\, dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + C. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Substituindo a expressão 3.2 em 3.1 obtemos

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2\left(-x e^{-x} - e^{-x}\right) + K = e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + K,$$

com $K = 2C$.

Apesar do critério do anagrama LIATE ajudar muito, em algumas situações ele não tem como ser aplicado. Por exemplo se o integrando for o produto de funções do mesmo tipo.

Exemplo 3.18. *Calcule a integral* $\int \sec^3 x\, dx$.

Solução. *Como não há função exponencial no integrando, o critério do anagrama LIATE nos leva a mesma integral. Usaremos o critério geral comentado* *no segundo parágrafo desta subseção, ou seja, tomar como* dv *a "maior" expressão do integrando, o qual seja fácil de integrar. Relembrando as integrais trigonométricas, vemos que a expressão procurada é* $\sec^2 x$*. Logo, tomamos* $u = \sec x$ *e* $dv = \sec^2 x\, dx$*, e assim,* $du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx$ *e* $v = \operatorname{tg} x$*. Então,*

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x\, dx &= \int \underbrace{\sec x}_{u} \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{dv} \\ &= uv - \int v\, du \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \sec x \operatorname{tg} x\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$*, temos que*

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x\, dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Note que na última expressão 3.4 aparece a integral que queremos calcular. Para finalizar o cálculo devemos isolá-la, assim

$$2 \int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x\, dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x\, dx &= \frac{1}{2} \left(\sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| \right) + C \end{aligned}$$

Exercícios Recomendados

EP 1. *Mostre que*

$$\int \sqrt{x^2 + \lambda}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \lambda} + \frac{\lambda}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C$$

Calcule as seguintes integrais dos exercícios 2 até 21.

EP 2. $\int x e^x\, dx$.

EP 3. $\int \ln x\, dx$.

EP 4. $\int x^n \ln x \, dx$ *(*$n \neq -1$*).*

EP 5. $\int \ln(1+x^2)\, dx.$

EP 6. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$

EP 7. $\int \operatorname{arcsen} x \, dx.$

EP 8. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx.$

EP 9. $\int x \operatorname{arcsen} x \, dx.$

EP 10. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx.$

EP 11. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx.$

EP 12. $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$

EP 13. $\int \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx.$

EP 14. $\int x \cos^2 x \, dx.$

EP 15. $\int (x^2+7x-5)\cos 2x \, dx.$

EP 16. $\int e^{ax} \cos bx \, dx.$

EP 17. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx.$

EP 18. $\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

EP 19. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\, dx.$

EP 20. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\, dx.$

EP 21. $\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, dx.$

EP 22. *Ao calcular a integral* $\int \frac{1}{x} dx$*, Joãozinho procedeu da seguinte maneira: fazendo* $u = \frac{1}{x}$*, e* $dv = dx$*, podemos tomar* $v = x$*, e teremos* $du = -\frac{1}{x^2}dx$*.*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \\ &= \frac{1}{x}x - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= 1 + \int \frac{1}{x} dx.\end{aligned}$$

Sendo $J = \displaystyle\int \frac{1}{x} dx$*, temos* $J = 1 + J$*. Logo,* $0 = 1$*. Onde está o erro no argumento de Joãozinho?*

EP 23. *Mostre que* $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+\lambda)^2}\,dx = \frac{-x}{2(x^2+\lambda)} + \int \frac{dx}{x^2+\lambda}$.

EP 24. *Usando o resultado do EP 23, calcule (considere* $a > 0$*)*

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx$.

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^2}\,dx$.

EP 25. *Mostre que* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \frac{x}{2\lambda(x^2+\lambda)} + \frac{1}{2\lambda}\int \frac{dx}{x^2+\lambda}$.

EP 26. *Usando a redução mostrada no EP 25, calcule as integrais, com* $a > 0$.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2}$.

EP 27. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

3.5 Integrais definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo

3.5.1 A integral definida

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Consideremos $n + 1$ pontos de $[a, b]$, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

O conjunto de pontos $\wp = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ constitui uma *subdivisão* ou *partição* do intervalo $[a, b]$.

Baseado nos ponto de $\wp$, tomemos pontos $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n$ em $[a, b]$, tais que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \dots, n$. E, sejam $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Com estes pontos $c_1, c_2, \dots, c_n$, consideremos a soma:

$$S = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Esta soma é chamda de *Soma de Riemann* de f no intervalo $[a, b]$, correspondente à partição $\mathcal{P}$ e à escolha de pontos $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Quando $f(x) > 0$ em $[a, b]$ a soma de Riemann de f

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

é a soma das áreas de n retângulos, sendo o i-ésimo retângulo, para $1 \le i \le n$, de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Isto é ilustrado na figura 3.2.

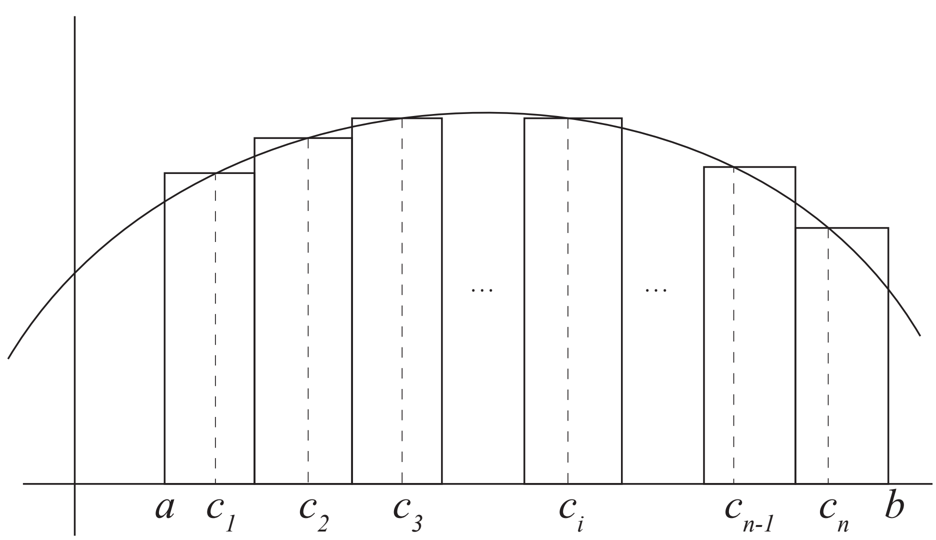


Figura 3.2 Área dos n retângulos determinados pela soma de Riemann.

Uma partição $\wp'$ de $[a, b]$ é um refinamento da partição $\wp$ se $\wp \subset \wp'$, ou seja todos os pontos da partição $\wp$ são pontos da partição$\wp'$.

A fim de obtermos a área sob o gráfico de f, é claro, que quanto mais refinarmos uma partição, mais próximo estaremos do valor da área. Com isso pode-se pensar que basta tomarmos n tendendo a $+\infty$ para obtermos o valor da área. Porém, isso não é verdade, por exemplo, na figura 3.3 temos que se renifarmos a partição apenas no subintervalo $[x_3, x_4]$ sempre teremos a área em vermelho sem ser preenchida.

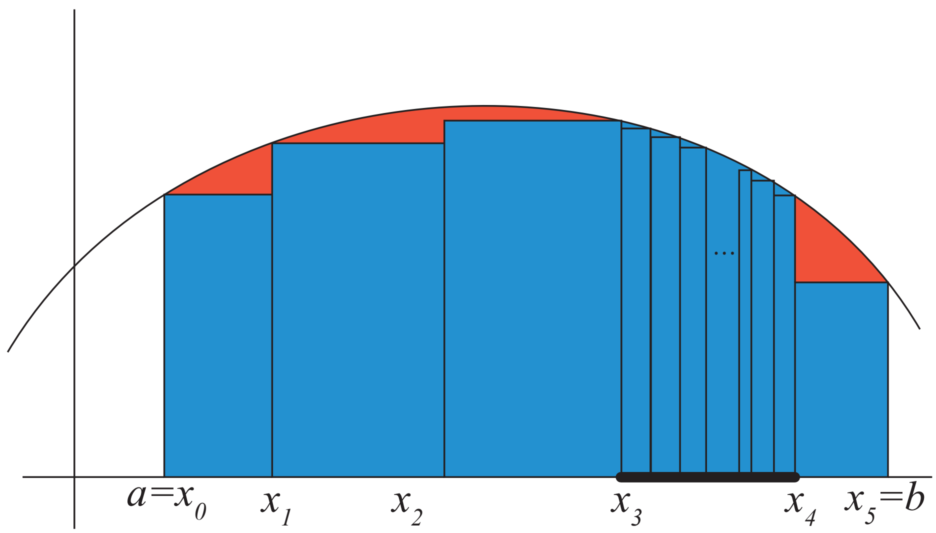


Figura 3.3 Não basta tomarmos n tendendo a infinito. Os pontos $c_i's$ são os pontos de mínimo de f em cada subintervalo.

Para que consigamos ter o limite da soma da área desses retângulos como a área sob o gráfico, precisamos de algo mais eficiente, e para isso consideremos Δ o maior dos números $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, ou seja,

$$\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

Tal Δ é também chamado de *norma da partição* $\wp$. Alguns autores denotam a norma da partição $\wp$ por $||\wp||$.

Agora, com a definição de norma de uma partição, temos que o limite da soma de Riemmann de f no intervalo $[a, b]$ quando Δ tende a 0 é numericamente igual a área sob o gráfico de f, ou seja

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \stackrel{N}{=} \text{Área sob o gráfico de } f$$

Motivado por este caso para função contínua, temos a seguinte definição:

Definição 3.3. *Seja* f *uma função real definida sobre um intervalo* $[a, b]$*. Se* $\wp$ *é uma partição qualquer de* $[a, b]$*, defini-se a integral definida de* f *sobre o intervalo* $[a, b]$ *sendo o limite de sua soma de Riemann sobre* $[a, b]$ *quando* $\Delta \to 0$*, e será denotada por* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$*, ou seja,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

desde que o limite exista.

Quando a integral definida de uma função existe em um intervalo $[a, b]$ dizemos que f é *integrável* em $[a, b]$. É possível demonstrar que, o limite acima, quando existente, independe da partição e da escolha dos pontos $c_i's$.

Observação 3.1. *Se* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in [a, b]$*, teremos* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *é numericamente igual a* $-A$*, sendo* A *a área da região plana sobre o gráfico de* f *entre* $x = a$ *e* $x = b$*.*

Note que, neste caso, feita uma subdivisão $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$*, e escolhidos os pontos* $c_1, c_2, \ldots, c_n$*, com* $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$*, para* $i = 1, 2, \ldots, n$*, teremos*

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i < 0,$$

pois $f(c_i) < 0$ *para cada* i*, e* $\Delta x_i > 0$ *para cada* i*.*

Observação 3.2. *Se o gráfico de* f*, no intervalo* $[a, b]$*, é como o gráfico esboçado na figura 3.4, então, sendo* A_1*,* A_2*,* A_3 *e* A_4 *as áreas (positivas) indicadas na figura, teremos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

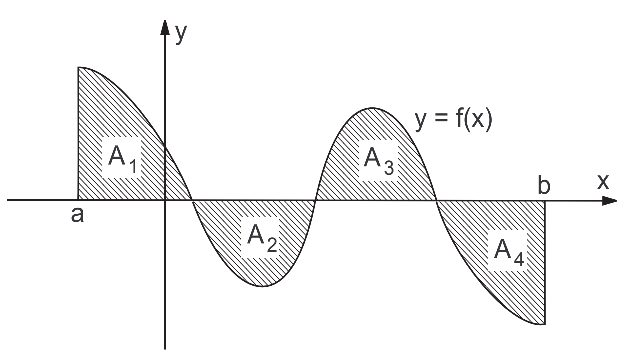


Figura 3.4 $\int_a^b f = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$.

Teorema 3.11. *Toda função contínua é integrável em seu domínio.*

Exemplo 3.19. *Sendo* $f(x) = x^2$*, calcular* $\int_0^1 f(x)\,dx$*, ou seja, determinar a área compreendida entre a parábola* $y = x^2$ *e o eixo* x*, no intervalo* $0 \leq x \leq 1$*.*

Para calcular a integral pedida, vamos primeiramente subdividir o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = 1/n$, ou seja, tomaremos $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = 2/n$, $\ldots$, $x_{n-1} = (n-1)/n$ e $x_n = n/n = 1$.

Neste caso, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 1/n$. Tomaremos ainda $c_i = x_i = i/n$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Teremos a soma integral

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(i/n) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}
\end{aligned}
$$

Pode ser demonstrado que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, fato que usaremos aqui. Assim, como $\Delta x \to 0$ se e somente se $n \to \infty$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx &= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots n^2}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

A área procurada é igual a $1/3$ (de unidade de área).

Proposição 3.12. *Se* f *é contínua no intervalo* $[a, b]$*, sendo* m *e* M *os valores máximo e mínimo de* f*, respectivamente, no intervalo* $[a, b]$*, então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Abaixo, faremos uma demonstração da proposição 3.12. Antes porém, daremos uma interpretação geométrica dessa proposição, no caso em que $f > 0$ em $[a, b]$. Da figura 3.5, em que m e M são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de $f(x)$ para $x \in [a, b]$, temos *área* $ABB'A' \leq$ (*área sob o gráfico de* f*, no intervalo* $[a, b]$) $\leq$ *área* $ABB''A''$. Daí,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

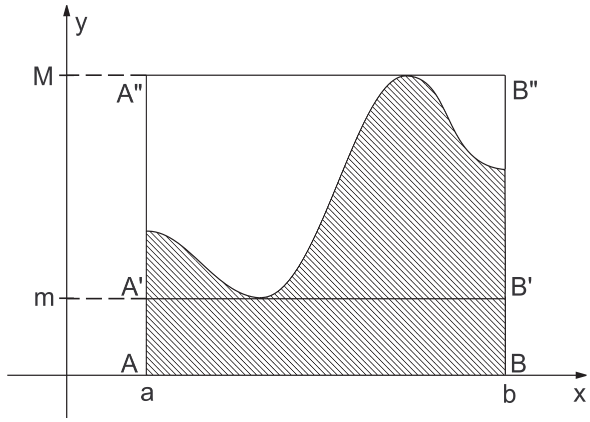


Figura 3.5 $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Demonstração. Tomando-se uma subdivisão qualquer de $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

e tomando-se pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i,$$

pois $f(c_i) \leq M$, e $\Delta x_i > 0$, para cada i. Daí,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a),$$

pois

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = b - a.$$

Logo,

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq M(b-a),$$

e portanto

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).$$

Analogamente, deduzimos que $\int_a^b f(x)\, dx \geq m(b-a)$. $\square$

Assumiremos sem demonstração as seguintes propriedades.

Proposição 3.13. *Se* f *e* g *são contínuas em* $[a, b]$*, então, sendo* k *uma constante e* $a < c < b$*,*

(i) $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

(ii) $\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

(iii) $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(iv) se $f(x) \leq g(x)$*, para todo* $x \in [a, b]$*, então* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Observação 3.3. *Sendo* f *uma função contínua em* $[a, b]$*, serão adotadas as seguintes convenções (definições).*

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(ii) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Adotadas essas convenções, a proposição 3.13, acima enunciada, continua verdadeira qualquer que seja a ordem dos limites de integração a*,* b *e* c*, podendo ainda dois deles (ou os três) coincidirem.*

Teorema 3.14 (Teorema do valor médio para integrais)**.** *Se* f *é contínua no intervalo* $[a, b]$*, existe* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Uma interpretação geométrica do teorema do valor médio para integrais, no caso em que $f(x) > 0$ em $[a, b]$, é feita na figura 3.6.

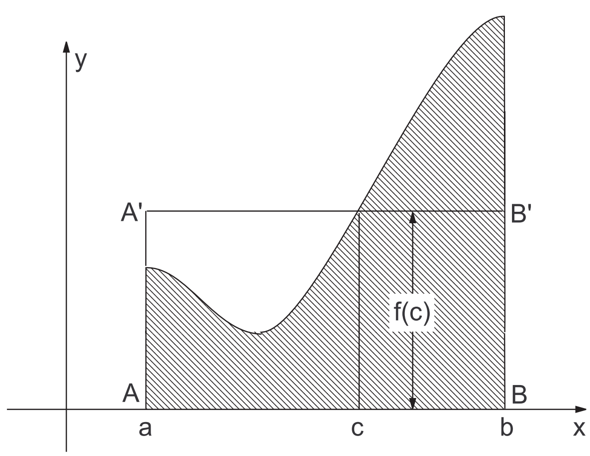


Figura 3.6 Teorema do valor médio para integrais: $\int_a^b f =$ (área sob o gráfico de f) $=$ (área $ABB'A'$) $= f(c)(b - a)$.

Para demonstrarmos o teorema do valor médio para integrais, usaremos o Teorema do valor intermediário.

Teorema 3.15 (Teorema do valor intermediário)**.** *Seja* f *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$*. Para cada* y_0*, tal que* $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$*, existe* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = y_0$*.*

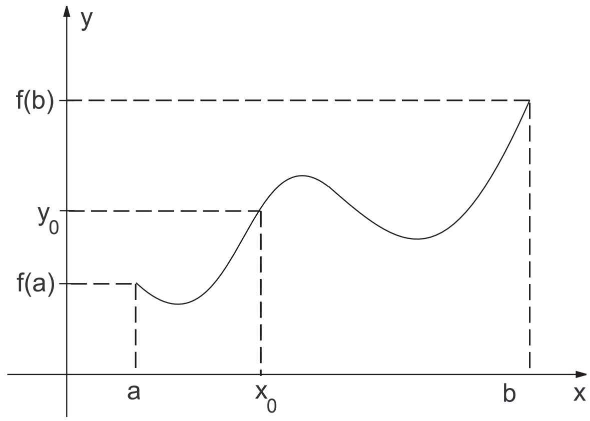


Figura 3.7 Para cada y_0, tal que $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Ilustramos geometricamente o teorema do valor intermediário na figura 3.7. Como consequência do teorema do valor intermediário, temos o *teorema do anulamento*.

Teorema 3.16 (Teorema do anulamento)**.** *Sendo* $a < b$*, e* f *contínua em* $[a, b]$*, se* $f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$ *(ou se* $f(a) > 0$ *e* $f(b) < 0$*), então a função* f *possui uma raiz no intervalo* $[a, b]$*.*

Demonstração. Como $f(a) < 0 < f(b)$, pelo teorema do valor intermediário, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$. □

Demonstração do teorema 3.14. Sendo f contínua no intervalo $[a, b]$, pelo teorema de Weierstrass, página 96, seção 2.12, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ e $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Além disso, existem pontos $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$.

Pela proposição 3.12, $m(b - a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$. Daí,

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Sendo $\alpha = \dfrac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx$, como $f(x_1) = m \leq \alpha \leq M = f(x_2)$, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$, com c entre x_1 e x_2, tal que $f(c) = \alpha$. Logo,

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

□

3.5.2 O teorema fundamental do cálculo

Teorema 3.17 (Teorema fundamental do cálculo, primeira versão)**.** *Seja* f *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$*. Para cada* $x \in [a, b]$*, seja*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Então, $\varphi'(x) = f(x)$*, para todo* $x \in [a, b]$*.*

Uma das consequências imediatas do teorema fundamental do cálculo é que toda função contínua f, em um intervalo $[a, b]$, possui uma primitiva (ou antiderivada) em $[a, b]$, sendo ela a função φ, definida por $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, para cada $x \in [a, b]$.

Demonstração do teorema fundamental do cálculo, primeira versão. Para x em $[a, b]$, e $\Delta x \neq 0$, com $x + \Delta x$ em $[a, b]$, temos

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \\ = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt\end{aligned}$$

(Veja figuras 3.8 e 3.9.)

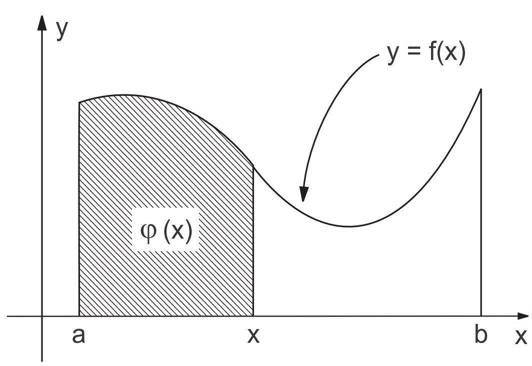


Figura 3.8 Interpretação geométrica de $\varphi(x)$, $x \in [a, b]$.

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe w entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt = f(w) \cdot [(x + \Delta x) - x].$$

Logo,

$$\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = f(w)\Delta x,$$

o que implica $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x} = f(w)$, para algum w entre x e $x + \Delta x$. Como f é contínua e, $w \to x$ quando $\Delta x \to 0$,

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(w) = \lim_{w \to x} f(w) = f(x).$$

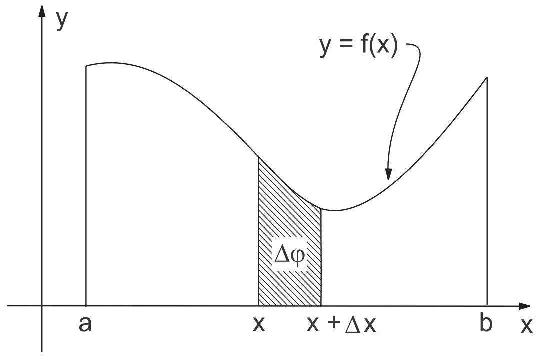


Figura 3.9 Interpretação geométrica de $\Delta\varphi$, para $\Delta x > 0$.

□

Como consequência do teorema fundamental do cálculo, primeira versão, temos a sua segunda versão, também chamada *fórmula de Newton-Leibniz*. Ele estabelece uma conexão surpreendente entre as integrais indefinidas e as integrais definidas.

Teorema 3.18 (Teorema fundamental do cálculo, segunda versão)**.** *Se* f *é uma função contínua no intervalo* $[a, b]$ *e*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo, primeira versão, temos que a função $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ a \le x \le b$, é uma primitiva de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, ou seja, $\varphi'(x) = f(x)$. Se $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, temos também $F'(x) = f(x)$. Logo, pela proposição 3.2 existe uma constante k tal que

$$\varphi(x) = F(x) + k,$$

para todo x em $[a, b]$.

Agora, $\varphi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Logo, $F(a) + k = 0$, de onde então $k = -F(a)$. Então,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \varphi(x) = F(x) - F(a).$$

Quando $x = b$, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

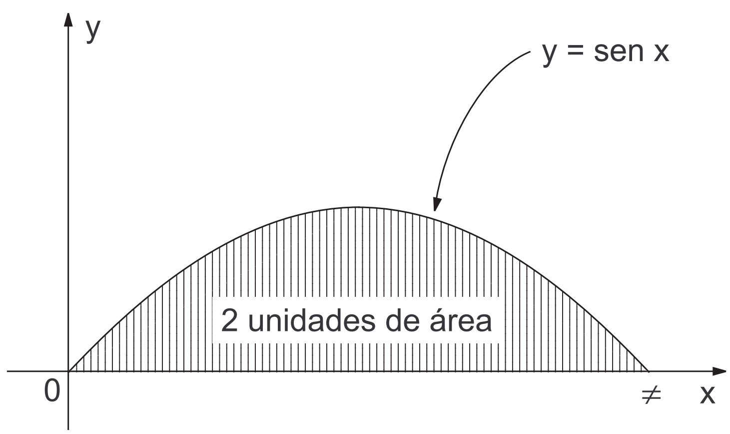
□

É costume denotar $[F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemplo 3.20. *Calcular a área compreendida entre a curva* $y = \operatorname{sen} x$ *e o eixo* x*, para* $0 \leq x \leq \pi$.

Solução. *Como* $\operatorname{sen} x \geq 0$ *quando* $0 \leq x \leq \pi$*, temos que a área* A *procurada é dada pela integral. Então,*

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$



3.5.3 Integração definida, com mudança de variável

Veremos agora que, quando fazemos mudança de variável, no caso de uma integral definida, podemos finalizar os cálculos com a nova variável introduzida, sem necessidade de retornar à variável original. Para tal, ao realizarmos a mudança de variável, trocamos adequadamente os limites de integração.

Suponhamos que $y = f(x)$ define uma função contínua em um intervalo I, com $a, b \in I$, e que $x = \varphi(t)$ é uma função de t derivável em um certo intervalo $J \subset \mathbb{R}$, satisfazendo

(i) $f(\varphi(t)) \in I$ quando $t \in J$.

(ii) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, para certos $\alpha, \beta \in J$;

(iii) $\varphi'(t)$ é contínua em J;

Sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ em I, temos $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, e como vimos, tomando $x = \varphi(t)$, teremos $dx = \varphi'(t)\, dt$, e $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) +$

C. Então, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(x)|_a^b = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt\end{aligned}$$

Exemplo 3.21. *Calcular* $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Fazendo $u = 1 + x^2$, calculamos $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + C$. Pelo teorema fundamental do cálculo, $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3} = 0$. Por outro lado, poderíamos ter trocado os limites de integração, ao realizar a mudança de variável. O resultado seria: para $x = -1$, $u = 2$; e para $x = 1$, $u = 2$ (!). Então, $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_2^2 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}du = 0$.

Exemplo 3.22. *Calcular a área delimitada pela circunferência de equação* $x^2 + y^2 = a^2$.

Solução. *Para calcular a área* A *desse círculo, basta calcular a área sob o semicírculo* $y = \sqrt{a^2 - x^2}$*, acima do eixo* x*, entre os pontos* $x = -a$ *e* $x = a$*, ou seja, calcular*

$$\frac{A}{2} = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Faremos a substituição $x = a \operatorname{sen} t$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. *Para* $t = -\pi/2$, $x = -a$; *para* $t = \pi/2$, $x = a$. *Teremos então* $dx = a\cos t\,dt$, $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$ *e, como* $\cos t \ge 0$ *no intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$. *Logo,* $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt$. *Temos* $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ *e* $\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$, *logo* $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$. *Assim,*

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right] - \frac{a^2}{2}\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} -\pi)\right] = \frac{\pi a^2}{2}\end{aligned}$$

E portanto a área do círculo é $A = \pi a^2$.

3.5.4 Integração definida, por partes

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções deriváveis no intervalo $[a, b]$, com as derivadas $u'(x)$ e $v'(x)$ contínuas em $[a, b]$. Temos $(u \cdot v)' = u' \cdot v +$

$u \cdot v' = uv' + vu'$, e então $\int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$. Pelo teorema fundamental do cálculo, $\int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx = u(x)v(x)|_a^b$. Portanto $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$.

Em notação abreviada,

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Exercícios Recomendados

Calcule as integrais definidas listadas abaixo.

EP 1. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

EP 2. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

EP 3. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$.

EP 4. $\int_1^x \frac{dt}{t}$.

EP 5. $\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$.

EP 6. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$.

EP 7. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

EP 8. $\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$.

EP 9. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

EP 10. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$.

EP 11. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{6-5\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}$.

EP 12. *Calcule a integral* $\int_0^t \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ *(*$0 \le t \le a$*), sem usar antiderivadas, interpretando-a como área sob a curva (semicírculo)* $y = \sqrt{a^2-x^2}$*, e acima do eixo* x*, no intervalo* $[0,t]$ *(figura 3.10).*

3.6 Mais técnicas de integração

3.6.1 Completando quadrados

Voltaremos nossa atenção agora ao cálculo das integrais

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$$
$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad I_4 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

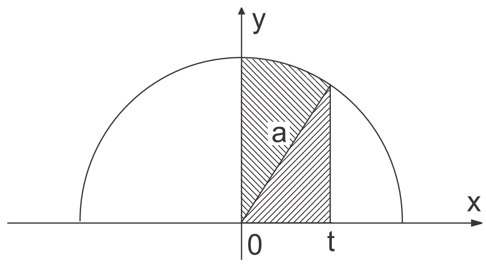


Figura 3.10 Interpretação geométrica da integral $\int_0^t \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

nas quais, a, b, c, A e B são números reais, e $a \neq 0$.

Veremos que, para calcular cada uma das integrais I_1, I_2, I_3, e I_4, tudo (ou quase tudo) que temos a fazer é *completar um quadrado* em $ax^2 + bx + c$, e então usar as integrais da proposição 3.9.

Lembramos que *completar um quadrado em* $ax^2 + bx + c$ é escrever este trinômio do segundo grau na forma $a(x+m)^2 + n$. Primeiramente, *colocamos o coeficiente* a *em evidência*:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Completamos então o quadrado em $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}$:

$$x^2 + \beta x + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)$$

Fazemos então, para o cálculo de uma das integrais I_1, I_2, I_3, e I_4, a substituição

$$u = x + \frac{\beta}{2}, \quad du = dx$$

e teremos

$$x^2 + \beta x + \gamma = u^2 \pm k^2 \qquad\qquad ax^2 + bx + c = a(u^2 \pm k^2).$$

Agora, a menos de alguns pequenos ajustes, recairemos em integrais da proposição 3.9.

Exemplo 3.23. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1}$.

Solução. Começamos fazendo

$$2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right]$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = 2\left[u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

sendo $u = x + 3/4$. Como $du = dx$,

$$\int \frac{dx}{2x^2+3x+1} = \int \frac{du}{2\left[u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - u^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{\frac{1}{4}+u}{\frac{1}{4}-u}\right| + C \text{ (proposição 3.9)}$$

$$= -\ln\left|\frac{1+4u}{1-4u}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+4x+3}{1-(4x+3)}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{4x+4}{4x+2}\right| + C = -\ln\left|\frac{2x+2}{2x+1}\right| + C = \ln\left|\frac{2x+1}{2x+2}\right| + C$$

Exemplo 3.24. *Calcular* $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

Solução. *Começamos fazendo*

$$1 - x - x^2 = -(x^2 + x - 1) = -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right]$$

$$= -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

Sendo, $u = x + 1/2$, $du = dx$, *e* $x = u - 1/2$,

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{u-3/2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du$$

$$= \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du$$

$$= I - \frac{3}{2}J$$

sendo $I = \int \frac{u}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2 - u^2}}\,du$, *e* $J = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2 - u^2}}\,du$.

Para o cálculo de I, *fazemos* $w = (\sqrt{5}/2)^2 - u^2$, *e então* $dw = -2u\,du$, *e temos*

$$I = \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du = \int \frac{-\frac{1}{2}dw}{\sqrt{w}} = -\sqrt{w} + C$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2} = -\sqrt{1-x-x^2} + C$$

Por sua vez,

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}} du = \operatorname{arcsen} \frac{u}{\sqrt{5}/2} + C$$
$$= \operatorname{arcsen} \frac{2u}{\sqrt{5}} + C = \operatorname{arcsen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$$

Portanto,

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx = I - \frac{3}{2} J$$
$$= -\sqrt{1-x-x^2} - \frac{3}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$$

3.6.2 Integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

3.6.2.1 Caso 1: m ou n é um inteiro ímpar

Consideremos $J = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$. Sendo m e n inteiros não negativos, no caso em que o expoente m é ímpar, teremos $m = 2k+1$, e então

$$\begin{aligned} J &= \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$

Agora fazemos $\cos x = t$, e então $dt = -\operatorname{sen} x \, dx$, obtendo

$$J = \int (1-t^2)^k t^n (-dt) = -\int (1-t^2)^k t^n \, dt,$$

que é uma integral de um polinômio em t.

Se m é par, mas n é ímpar, transformamos a integral J em uma integral de um polinômio, por um procedimento análogo.

Exemplo 3.25. *Calcular* $J = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx$.

Solução.

$$\begin{aligned} J &= \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^4 x \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^6 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int t^6 (1-t^2)^2 \, dt, \quad \text{sendo } t = \operatorname{sen} x, \; dt = \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Teremos então

$$
\begin{aligned}
J &= \int t^6(1 - 2t^2 + t^4)\,dt = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10})\,dt \\
&= \frac{t^7}{7} - \frac{2t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} - \frac{2\operatorname{sen}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} + C
\end{aligned}
$$

3.6.2.2 Caso 2: m e n são pares

Neste caso, abaixamos os graus das potências de funções trigonométricas, mediante as relações

$$
\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \tag{3.5}
$$

ou seja, fazemos

$$
\begin{aligned}
J &= \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^{2\ell} x\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k (\cos^2 x)^\ell\,dx \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^\ell dx
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.26. *Calcular* $I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx$.

Solução. $I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x\,dx$. *Fazendo uso das relações trigonométricas 3.5, temos*

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x\,dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 2x\,dx
\end{aligned}
$$

Calculando separadamente as quatro integrais, temos: $I_1 = \int dx = x$ *(juntaremos adiante todas as constantes em uma só)* $I_2 = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int \cos^2 2x\,dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2}\,dx \qquad \left(\cos^2 a = \tfrac{1+\cos 2a}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x\,dx \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x = \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \cos^3 2x\, dx \qquad \textit{(potência de cosseno, de expoente ímpar!)}\\
&= \int \cos^2 2x \cos 2x\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\, dx\\
&= \int (1-t^2)\cdot \frac{dt}{2} \qquad \textit{(}t=\operatorname{sen} 2x,\ \ dt = 2\cos 2x\, dx, \textit{ logo } \cos 2x\, dx = \tfrac{dt}{2}\textit{)}\\
&= \frac{1}{2}\left(t-\frac{t^3}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{8}(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)\\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C\\
&= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C
\end{aligned}$$

3.6.3 Fórmulas de redução, ou de recorrência

As *fórmulas de redução*, ou *fórmulas de recorrência*, frequentemente encontradas em tábuas de integrais, são, em geral, obtidas por meio da integração por partes.

Nos exemplos abaixo, deduziremos duas delas e ilustraremos como são usadas.

Exemplo 3.27. *Sendo* $n \geq 2$*, deduzir a fórmula de redução*

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\cdot \int \sec^{n-2} x\, dx. \tag{3.6}$$

Solução. *Seja* $I_n = \int \sec^n x\, dx$*. Temos*

$$I_n = \int \sec^n x\, dx = \int \underbrace{\sec^{n-2} x}_{u}\,\underbrace{\sec^2 x}_{dv}\, dx = uv - \int v\, du.$$

Sendo $u = \sec^{n-2} x\, dx$*, temos*

$$\begin{aligned}
du &= (n-2)\sec^{n-3} x \cdot (\sec x)' dx\\
&= (n-2)\sec^{n-3} x \cdot \sec x \operatorname{tg} x\, dx\\
&= (n-2)\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x\, dx
\end{aligned}$$

Sendo $dv = \sec^2 x\, dx$*, tomamos* $v = \operatorname{tg} x$*. Então,*

$$\begin{aligned}
I_n &= uv - \int v\, du\\
&= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - \int \operatorname{tg} x \cdot (n-2)\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x\, dx\\
&= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\, dx
\end{aligned}$$

Agora, sendo $J = \int \sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx$*, temos*

$$\begin{aligned}
J &= \int \sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx \\
&= \int (\sec^n x - \sec^{n-2} x)dx \\
&= \int \sec^n x \, dx - \int \sec^{n-2} x \, dx \\
&= I_n - I_{n-2}
\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
I_n &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2)J \\
&= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2)(I_n - I_{n-2})
\end{aligned}$$

de onde

$$[1 + (n-2)]I_n = \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x + (n-2)I_{n-2},$$

e portanto

$$I_n = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2},$$

ou seja,

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx.$$

Exemplo 3.28. *Empregando a fórmula de redução 3.6, calcule as integrais* $\int \sec^3 x \, dx$, $\int \sec^4 x \, dx$, *e* $\int \sec^5 x \, dx$.

Solução. *Aplicando a fórmula 3.6, que acabamos de deduzir acima, temos, quando* $n = 3$*,*

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \, dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx \\
&= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula 3.6, para $n = 4$*, temos*

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 x \, dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3} \int \sec^2 x \, dx \\
&= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + C
\end{aligned}$$

Para $n = 5$*, temos*

$$\begin{aligned}
\int \sec^5 x \, dx = I_5 &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4} I_3 \\
&= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\
&= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3 \operatorname{tg} x \sec x}{8} + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C
\end{aligned}$$

Exemplo 3.29. *Deduza a fórmula de recorrência*

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx. \tag{3.7}$$

E usando-a, calcule $\int \cos^4 x\,dx$ *e* $\int \cos^7 x\,dx$.

Solução. *Note que*

$$\int \cos^n x\,dx = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du.$$

Considerando $u = \cos^{n-1} x$ *e* $dv = \cos x\,dx$, *temos* $du = -(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x\,dx$ *e* $v = \operatorname{sen} x$. *Então,*

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x\,dx\\ &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\,dx\\ &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\left(\int \cos^{n-2} x\,dx - \int \cos^n x\,dx\right)\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \cos^n x\,dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.$$

Logo,

$$n\int \cos^n x\,dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$$

e, então,

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Deixamos para o leitor a aplicação desta fórmula, para obter

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{3}{8}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{3x}{8} + C\\ \int \cos^7 x\,dx &= \frac{1}{7}\operatorname{sen} x \cos^6 x + \frac{6}{35}\operatorname{sen} x \cos^4 x + \frac{8}{35}\operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{16}{35}\operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

3.6.4 Substituições trigonométricas

As *substituições trigonométricas* são substituições empregadas em integrais envolvendo uma das expressões $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, e $\sqrt{x^2 - a^2}$, nas quais a variável x é substituída pelas funções $a \operatorname{sen}\theta$, $a \operatorname{tg}\theta$, e $a \sec\theta$, respectivamente.

Exemplo 3.30. *Calcular* $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

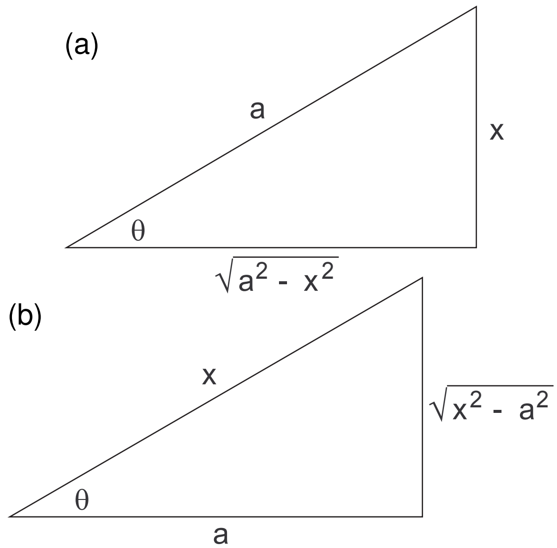


Figura 3.11 Em (a) $\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta\,d\theta$, $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \cos\theta$. Em (b), $\frac{a}{x} = \cos\theta$, ou $\frac{x}{a} = \sec\theta$, $dx = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta$, $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \operatorname{tg}\theta$. Em ambos os casos, a raiz quadrada da diferença de quadrados é um cateto.

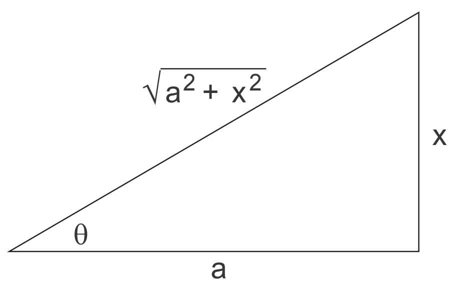


Figura 3.12 A raiz quadrada $\sqrt{a^2+x^2}$ é interpretada geometricamente como sendo a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos x e a. Agora, $\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\theta$, $dx = a\sec^2\theta\,d\theta$, e $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} = \sec\theta$.

Solução. *Usaremos uma substituição trigonométrica, baseando-nos no esquema geométrico da figura 3.11 (a). Observando as relações trigonométricas da figura 3.11 (a), fazemos*

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \cos\theta, \quad \textit{e} \quad dx = a\cos\theta\,d\theta.$$

Temos então, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a^2\cos^2\theta\,d\theta$*. E, usando a relação* $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$*, temos*

$$\int a^2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\,d\theta = \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C.$$

Agora, substituímos $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$ *e*

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2},$$

e, obtemos

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

No caso de uma integral definida, ao realizar a mudança de variável, podemos também trocar os limites de integração, tal como ilustrado no seguinte exemplo.

Exemplo 3.31. *Calcular* $\int_0^3 \sqrt{9 + x^2}\, dx$.

Solução. *Para desenvolver a estratégia de substituição trigonométrica, usaremos as relações trigonométricas em um triângulo, ver figura 3.13. Teremos* $\frac{x}{3} = \operatorname{tg}\theta$, $\quad dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$, *e* $\frac{3}{\sqrt{9+x^2}} = \cos\theta$, *ou seja,* $\sqrt{9 + x^2} = 3\sec\theta$.

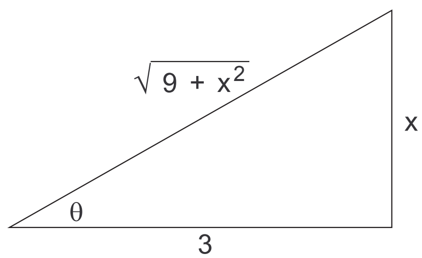


Figura 3.13 Triângulo considerado para substituição trigonométrica de $\sqrt{9 + x^2}$.

Sendo $x = 3\operatorname{tg}\theta$, *tomamos* θ *assumindo valores de* 0 *a* $\pi/4$, *e teremos* x *percorrendo os valores de* 0 *a* 3.

Teremos então $\int_0^3 \sqrt{9 + x^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} 3\sec\theta \cdot 3\sec^2\theta\, d\theta = 9\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta$.

Conforme vimos no exemplo 3.27, seção 3.6,

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{9 + x^2}\, dx &= 9\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta \\
&= 9\left[\frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right]_0^{\pi/4} \\
&= 9\left[\frac{\sec(\pi/4)\operatorname{tg}(\pi/4)}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec(\pi/4) + \operatorname{tg}(\pi/4)|\right] \\
&\quad - 9\left[\frac{\sec 0 \operatorname{tg} 0}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec 0 + \operatorname{tg} 0|\right] \\
&= 9\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2} + 1)\right] - 9\left[0 + \frac{1}{2}\ln 1\right] \\
&= \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2}\ln(\sqrt{2} + 1).
\end{aligned}$$

3.6.5 Integração de funções racionais

Nesta seção estudaremos o cálculo de integrais $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais. Tais funções $p(x)/q(x)$ são chamadas *funções racionais*.

Quando o grau de $p(x)$ é maior que, ou igual ao grau de $q(x)$, devemos primeiramente dividir $p(x)$ por $q(x)$, obtendo quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$, de forma que

$$p(x) = q(x)Q(x) + R(x),$$

em que $R(x) = 0$ ou é um polinômio de grau menor que o grau do polinômio divisor $q(x)$. Neste caso,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)Q(x) + R(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)},$$

e então, $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{q(x)}\,dx$. Por exemplo, suponhamos que queremos calcular

$$I = \int \frac{2x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx.$$

Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, devemos primeiramente proceder à divisão de polinômios abaixo, na qual obteremos $Q(x) = 2x + 1$ e $R(x) = 2x - 1$.

$$\begin{array}{rrrl|l}
2x^4 + x^3 & - 6x^2 & + 3x + 1 & & x^3 - 3x + 2 \\ \cline{5-5}
2x^4 + & - 6x^2 & + 4x & & 2x + 1 \\ \cline{1-4}
x^3 & & - x + 1 & & \\
x^3 & & - 3x + 2 & & \\ \cline{1-3}
 & & 2x - 1 & &
\end{array}$$

Teremos então,

$$I = \int \frac{(x^3 - 3x + 2)(2x + 1) + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx = \int (2x + 1)\,dx + \int \frac{2x - 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx.$$

Assim, precisamos apenas estudar integrais de funções racionais próprias, isto é, funções racionais em que o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

3.6.6 Decompondo funções racionais em frações parciais

3.6.6.1 Caso 1: raízes reais distintas.

Suponhamos que na função racional própria $p(x)/q(x)$ o denominador, sendo de grau n, fatora-se em produtos lineares distintos

$$q(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n),$$

ou então,

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)$$

com os n fatores lineares tendo raízes distintas entre si.

Então, aplicamos um resultado da álgebra de frações racionais que diz que, neste caso, existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{p(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)}\\ &= \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n},\end{aligned}$$

em que os coeficientes das *frações parciais* são $A_1, A_2, \ldots, A_n$, determinados de maneira única. Neste caso,

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx &= \int \frac{A_1}{a_1x + b_1}\, dx + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}\, dx\\ &= \frac{A_1}{a_1} \ln|a_1x + b_1| + \cdots + \frac{A_n}{a_n} \ln|a_nx + b_n| + C.\end{aligned}$$

Exemplo 3.32. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)}\, dx.$

Solução. Começamos fazendo

$$\frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)} = \frac{x^2 - 3}{(x - 2)(x + 2)(2x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{2x + 1}.$$

Para calcular os coeficientes A, B e C, somamos as três frações parciais à direita, igualando a soma à função racional original.

$$\frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)} = \frac{A(x + 2)(2x + 1) + B(x - 2)(2x + 1) + C(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)(2x + 1)}.$$

Observando que os denominadores são iguais, devemos obter A, B e C de modo a termos a igualdade (identidade) de polinômios

$$x^2 - 3 = A(x + 2)(2x + 1) + B(x - 2)(2x + 1) + C(x - 2)(x + 2).$$

Desenvolvendo o produto à direita e comparando os coeficientes dos termos de mesmo grau, chegaremos a três equações lineares nas incógnitas A, B e C.

Mas, podemos tomar um atalho. Note que os polinômios à esquerda e à direita são iguais, logo, têm o mesmo valor para cada x real.

Tomando $x = -2$, obtemos $B(-2-2)(-4+1) = 1$, e então $B = 1/12$. Tomando $x = 2$, obtemos $A \cdot 20 = 1$, e então $A = 1/20$. Tomando $x = -1/2$, obtemos $C(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{1}{2}+2) = -15/4$, e então $C = 11/15$.

Repare que os valores de x, estrategicamente escolhidos, são as raízes de $(x^2-4)(2x+1)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3}{(x^2-4)(2x+1)}\,dx &= \int \frac{1/40}{x-2}\,dx + \int \frac{1/12}{x+2}\,dx + \int \frac{11/15}{2x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{40}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\ln|x+2| + \frac{11}{30}\ln|2x+1| + C\end{aligned}$$

3.6.6.2 Caso 2: raízes reais múltiplas.

No próximo exemplo ilustramos uma decomposição, em frações parciais, de uma função racional própria, cujo denominador tem apenas raízes reais, tendo porém raízes múltiplas.

Exemplo 3.33. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}\,dx$.

Aqui, a raiz -1, do denominador, é de multiplicidade 3. A decomposição, em frações parciais, que funciona neste caso, é da forma

$$\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1},$$

na qual teremos A, B, C e D determinados de maneira única.

Como antes, primeiramente somamos as frações parciais, e obtemos que $\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}$ é igual a

$$\frac{A(x+1)^3 + B(2x-1) + C(2x-1)(x+1) + D(2x-1)(x+1)^2}{(2x-1)(x+1)^3}.$$

Como os denominadores são iguais, temos que

$$A(x+1)^3 + B(2x-1) + C(2x-1)(x+1) + D(2x-1)(x+1)^2.$$

Quando $x = -1$, temos $-3B = 4$, logo $B = \dfrac{-4}{3}$. Quando $x = \dfrac{1}{2}$, temos $A \cdot \dfrac{27}{8} = \dfrac{1}{4}$, logo $A = \dfrac{2}{27}$.

Tendo esgotado, para valores de x, as raízes de $(2x-1)(x+1)^3$, tomamos agora valores de x que não produzam, em nossos cálculos, valores numéricos muito grandes. Tomando $x = 0$, temos $A - B - C - D = 0$, e tomando $x = 1$, temos $8A + B + 2C + 4D = 1$. Logo,

$$\begin{cases} C + D = \dfrac{38}{27} \\ 2C + 4D = \dfrac{52}{27} \end{cases},$$

e então, $C = \dfrac{31}{27}$, $D = \dfrac{7}{27}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}\,dx &= \int \frac{2/27}{2x-1}\,dx + \int \frac{-4/3}{(x+1)^3}\,dx + \int \frac{31/27}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{7/27}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{27}\ln|2x-1| + \frac{2}{3(x+1)^2} - \frac{31}{27(x+1)} + \frac{7}{27}\ln|x+1| + C \end{aligned}$$

Como um outro exemplo de decomposição em frações parciais, em um caso de raízes reais múltiplas no denominador, se tivermos que calcular

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{(3x-2)^2(5x+1)^3(1-7x)}\,dx$$

devemos primeiramente fazer que $\dfrac{x^3 - 2x + 1}{(3x-2)^2(5x+1)^3(1-7x)}$ é igual a

$$\frac{A}{(3x-2)^2} + \frac{B}{3x-2} + \frac{C}{(5x+1)^3} + \frac{D}{(5x+1)^2} + \frac{E}{5x+1} + \frac{F}{1-7x}.$$

3.6.6.3 Caso 3. raízes complexas não reais.

Um terceiro caso de decomposição, em frações parciais, ocorre quando o denominador tem fatores quadráticos irredutíveis (fatores de grau 2 sem raízes reais), como no exemplo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^2 - x}{(x-2)^3(x^2+x+4)(x^2+1)},$$

em que $x^2 + x + 4$ e $x^2 + 1$ não tem raízes reais. Neste caso, temos que $\dfrac{3x^2 - x}{(x-2)^2(x^2+x+4)(x^2+1)}$ é igual a

$$\frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+4} + \frac{Fx+G}{x^2+1},$$

e proceder tal como antes, na busca dos coeficientes de A a G. Ou seja, na decomposição em frações parciais, para os fatores lineares no denominador seguimos as regras anteriores, mas sobre cada fator quadrático vai um polinômio do primeiro grau $Mx + N$.

Mas, se tivermos no denominador potências de fatores quadráticos irredutíveis, tal como na integral $\int \frac{x^5+3x-5}{(x^2-3x+4)^2(x^2+2)^3(3x-5)}\,dx$? Neste caso, notando que x^2+3x-5 e x^2+2 não tem raízes reais, fazemos

$$\begin{aligned}\frac{x^5+3x-5}{(x^2-3x+4)^2(x^2+2)^3(3x-5)} &= \frac{Ax+B}{(x^2-3x+4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-3x+4}\\ &\quad+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}+\frac{Gx+H}{(x^2+2)^2}+\frac{Ix+J}{x^2+2}+\frac{K}{3x-5}\end{aligned}$$

Este é um cálculo deveras longo. Na pressa, devemos recorrer a uma boa tábua de integrais ou um bom aplicativo computacional.

Observação 3.4. *Na verdade, esse tipo de decomposição funciona mesmo se os fatores quadráticos tem raízes reais, desde que estas não sejam raízes de outros fatores do denominador. Por exemplo, no cálculo de* $\int \frac{x^3-2}{(x^2-4)(2x+1)}\,dx$*, podemos fazer a decomposição*

$$\frac{x^2-3}{(x^2-4)(2x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-4}+\frac{C}{2x+1},$$

e ir à busca dos coeficientes A*,* B *e* C*, como anteriormente.*

3.6.7 A integral $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

Ainda resta esclarecer como lidar com integrais do tipo

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,$$

com $a>0$, em que o trinômio ax^2+bx+c não tem raízes reais.

Adotando o procedimento estudado na subseção 3.6.1 completamos o quadrado no trinômio ax^2+bx+c, colocando-o na forma $a(x+\alpha)^2+\beta$, e pela mudança de variável $u=x+\alpha$, $du=dx$, chegaremos a

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx=\int \frac{\lambda u+\gamma}{(u^2+k^2)^n}\,du=\lambda\int \frac{u\,du}{(u^2+k^2)^n}+\gamma\int \frac{du}{(u^2+k^2)^n}$$

para certos coeficientes λ e γ.

A integral $I=\int \frac{u\,du}{(u^2+k^2)^n}$ é calculada mediante uma mudança de variável simples $t=u^2+k^2$. Logo, $dt=2u\,du$, assim $u\,du=\frac{1}{2}dt$, e então $I=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n}$.

Já o cálculo da integral $J=\int \frac{du}{(u^2+k^2)^n}$ requer uma substituição trigonométrica, ver figura 3.14.

Fazemos $u=k\,\mathrm{tg}\,\theta$, $du=k\sec^2\theta\,d\theta$. Teremos $\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}=\cos\theta$, e então

$$J=\int \frac{\cos^{2n}\theta}{k^{2n}}\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2}\theta\,d\theta,$$

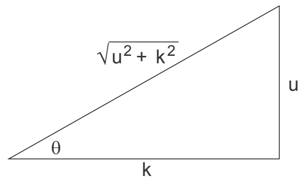


Figura 3.14 Triângulo da substituição trigonométrica para $u^2 + k^2$.

e fazemos o uso da fórmula de recorrência

$$\cos^m x\, dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \operatorname{sen} x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x\, dx.$$

3.6.7.1 Fórmulas de recorrência

Uma boa tábua de integrais nos fornecerá

$$\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^n} = \frac{x}{2k^2(n-1)(x^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2k^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+k^2)^{n-1}} \tag{3.8}$$

bem como também (aqui λ pode ser uma constante negativa)

$$\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n} = \frac{x}{2\lambda(n-1)(x^2+\lambda)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\lambda(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n-1}} \tag{3.9}$$

De um modo mais geral, encontramos também, em uma boa tábua de integrais, o seguinte resultado: sendo $a > 0$, $n \geq 2$, e $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} &= \frac{-(2ax+b)}{\Delta \cdot (n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} \\ &+ \frac{-2a(2n-3)}{\Delta \cdot (n-1)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Também encontramos

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx &= \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + (N - \frac{b}{2a})}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx \\ &= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax+b)\, dx}{(ax^2+bx+c)^n} \\ &+ \left(N - \frac{b}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

en que $\displaystyle\int \frac{(2ax+b)\, dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{du}{u}$ pela substituição $u = ax^2 + bx + c$.

Exercícios Recomendados

EP 1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

EP 2. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$.

EP 3. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

EP 4. $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}\,dx$.

EP 5. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$.

EP 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$.

EP 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}}$.

EP 8. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$.

EP 9. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.

EP 10. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

EP 11. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

EP 12. $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

EP 13. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$.

EP 14. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

EP 15. $\int \cos^6 x\,dx$.

EP 16. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\,dx$.

EP 17. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

EP 18. $\int \sec^3 x\,dx$.

EP 19. $\int \sec^4 x\,dx$.

EP 20. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$.

EP 21. $\int \dfrac{dx}{4-5\operatorname{sen} x}$.

EP 22. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1+\cos^2 x}$.

EP 23. $\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx$ ($a \neq b$).

EP 24. $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx$ ($a \neq b$).

Deduza a fórmula de recorrência

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

e então, usando-a, calcule

EP 25. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

EP 26. $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx$.

Deduza as fórmulas de recorrência

EP 27. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$

EP 28. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx$

Calcule as seguintes integrais, através de substituições trigonométricas.

EP 29. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\, dx$.

EP 30. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

EP 31. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\, dx$.

EP 32. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$.

Calcule as seguintes integrais de funções racionais. Trabalhe todos os cálculos, evitando usar as fórmulas de recorrência.

EP 33. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\, dx$.

EP 34. $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$.

EP 35. $\int \frac{x^4\, dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

EP 36. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$.

EP 37. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\, dx$.

EP 38. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

EP 39. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

EP 40. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx$.

Use as fórmulas de recorrência 3.8 a 3.12 para mostrar que

EP 41. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x^2+4)^3}\, dx = \frac{-2x-16}{32(x^2+4)^2} - \frac{3x}{128(x^2+4)} - \frac{3}{256}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$

EP 42. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^4}$

$$= \frac{2x-4}{12(x^2-4x+5)^3} + \frac{5(2x-4)}{48(x^2-4x+5)^2} + \frac{5(2x-4)}{32(x^2-4x+5)} + \frac{5}{16}\operatorname{arctg}(x-2) + C$$

3.7 Aplicações selecionadas da integral definida

3.7.1 Área de uma região plana

Suponhamos que f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Para $x \in [a, b]$, consideramos, apoiada à esquerda no ponto x, uma fatia retangular vertical, de base Δx, e altura $h(x) = f(x) - g(x)$, como na figura 3.15. A área dessa fatia será dada por $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$.

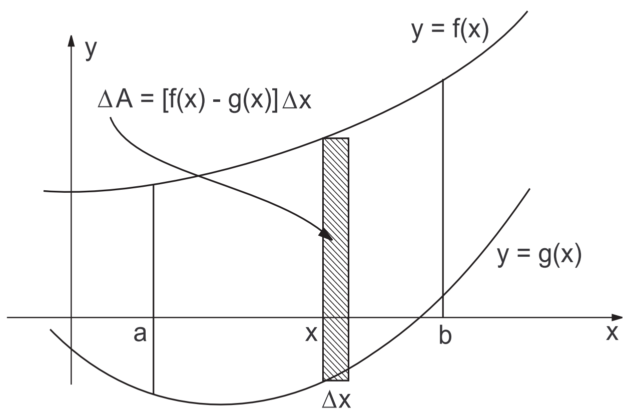


Figura 3.15 Área entre dois gráficos de funções.

Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em vários subintervalos de comprimento Δx, e sobre cada um deles construírmos uma área ΔA, como acima, teremos a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, dada aproximadamente por

$$\sum \Delta A = \sum [f(x) - g(x)]\Delta x$$

onde, pelo bem da simplicidade, estamos omitidindo índices do somatário.

A área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, será dada pelo limite de tais somas integrais, quando $\Delta x \to 0$, ou seja, será dada por

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum [f(x) - g(x)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Sendo $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$, é costume simbolizar $dA = [f(x) - g(x)]dx$. Temos então $A = \int_a^b dA$.

É costume dizer que $dA = [f(x) - g(x)]\, dx$ é um *elemento infinitesimal de área*, de altura $f(x) - g(x)$, sobre um *elemento infinitesimal de comprimento*

dx. O símbolo de integração, $\int$, provém da forma de um arcaico S, e tem o significado de "*soma* (veja isto: *ſoma*) de um número infinito de quantidades infinitesimais" . Assim, se $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx$ corresponde, grosso modo, a uma soma de elementos infinitesimais de área, de alturas $f(x)$, e base dx, com x "variando" de a até b.

Exemplo 3.34. *Calcular a área delimitada pelas curvas* $y = x^2$ *e* $y = \sqrt{x}$.

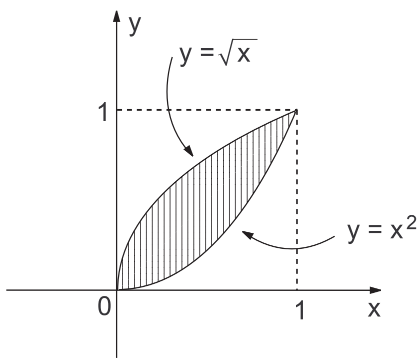


Figura 3.16 Área entre as curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução. As curvas dadas se interceptam em $x_0 = 0$ e em $x_1 = 1$ (soluções de $x^2 = \sqrt{x}$). Para $0 \leq x \leq 1$, temos $\sqrt{x} \geq x^2$. Veja figura 3.16.

Assim sendo, a área entre as duas curvas é dada por $A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\,dx = \int_0^1 [x^{1/2} - x^2]\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

3.7.2 Média ou valor médio de uma função

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Em $[a, b]$ tomemos os $n + 1$ pontos igualmente espaçados

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

isto é, tais que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

A média aritmética dos $n + 1$ valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, é dada por

$$\mu_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n + 1}$$

Definiremos a média da função f, no intervalo $[a, b]$, como sendo

$$\bar{f} = \lim_{n \to \infty} \mu_n$$

Mostraremos que

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

De fato, sendo $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n+1} \\
&= \frac{f(x_0)}{n+1} + \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x}{n+1}\right) \\
&= \frac{f(x_0)}{n+1} + \frac{n}{b-a}\left(\frac{f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x}{n+1}\right) \\
&= \frac{f(x_0)}{n+1} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{n}{n+1}(f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x)
\end{aligned}$$

Logo, como os pontos $x_0(=a), x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n(=b)$ subdividem o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, todos de comprimento $\Delta x = (b-a)/n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mu_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0)}{n+1} + \frac{1}{b-a}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right) \\
&= 0 + \frac{1}{b-a}\cdot 1\cdot\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Exemplo 3.35. *Determine o valor médio de* $f(x) = x^2$*, no intervalo* $a \leq x \leq b$*.*

Solução. O valor médio de f em $[a,b]$, é dado por

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) \\
&= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}
\end{aligned}$$

3.7.3 Volume de um sólido

Na figura 3.17, para cada x, $a \leq x \leq b$, um plano perpendicular a um eixo x corta um sólido determinando no sólido uma secção transversal de área $A(x)$. De $x = a$ até $x = b$, são determinadas as áreas de todas todas as secções transversais desse sólido, sendo $b - a$ o seu "comprimento". Qual é o seu volume?

Suponhamos que o intervalo $[a,b]$ é subdividido em n subintervalos, todos de comprimento $\Delta x = (b-a)/n$. Se x é um ponto dessa subdivisão, determina-se um volume de uma fatia "cilíndrica", de "base" com área $A(x)$ e "altura" Δx,

$$\Delta V = V(x)\cdot\Delta x.$$

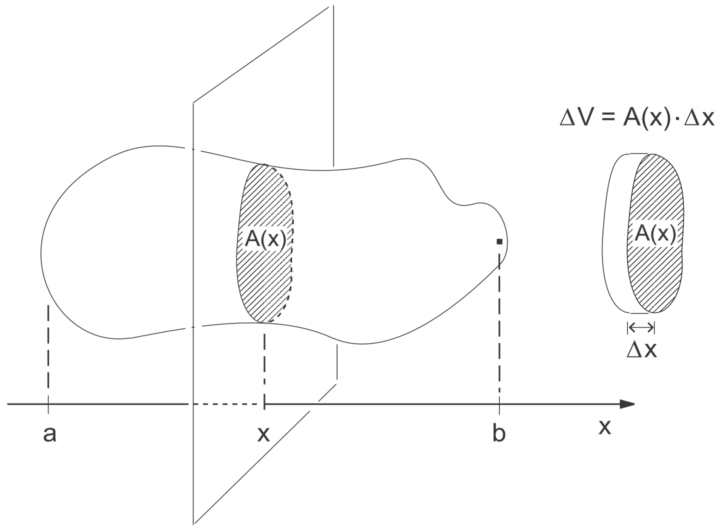


Figura 3.17 Volume de sólidos.

Uma aproximação do volume do sólido é dado pelo somatório desses vários volumes cilíndricos,

$$V \cong \sum \Delta V = \sum_{x} A(x) \cdot \Delta x,$$

sendo o somatório aqui escrito sem os habituais índices i, para simplificar a notação. Quanto mais finas as fatias "cilíndricas", mais próximo o somatório estará do volume do sólido, sendo seu volume igual a

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum A(x) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Os cientistas de áreas aplicadas costumam dizer que $dV = A(x) \cdot dx$ é um *elemento infinitesimal de volume*, construído sobre um ponto x, de um "cilindro" de área da base $A(x)$ e altura (espessura) "infinitesimal" dx. Ao "somar" os infinitos elementos de volume, temos $\int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx$ igual ao volume do sólido.

Exemplo 3.36. *Qual é o volume de um tronco de pirâmide, de altura* h*, cuja base é um quadrado de lado* a *e cujo topo é um quadrado de lado* b *?*

Solução. Posicionemos um eixo x perpendicular às duas bases. Cada ponto (altura) x, demarcada nesse eixo, corresponde, no tronco de pirâmide, a uma secção transversal quadrada, de tal modo que $x = 0$ corresponde à base quadrada de lado a, e $x = h$ corresponde ao topo quadrado de lado b. Veja figura 3.18.

Procurando uma função afim, $f(x) = mx + n$, tal que $f(0) = a$ e $f(h) = b$. encontramos $f(x) = a + \frac{b-a}{h}x$.

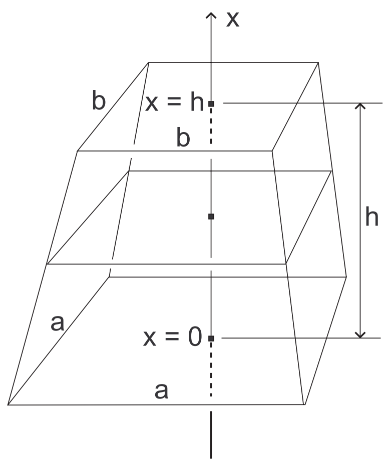


Figura 3.18 Tronco de pirâmide.

A área da secção transversal, na altura x, é dada por

$$A(x) = \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2.$$

O volume do tronco de pirâmide é então

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2\,dx.$$

Fazendo $u = a + \frac{b-a}{h}x$, temos $du = \frac{b-a}{h}\,dx$. Além disso, $u = a$ para $x = 0$, e $u = b$ para $x = h$, e então

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x)\,dx \\ &= \frac{h}{b-a}\int_a^b u^2\,du \\ &= \frac{h}{b-a}\cdot\left.\frac{u^3}{3}\right|_a^b \\ &= \frac{h}{3(b-a)}(b^3 - a^3) \\ &= \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Note que o volume do tronco de pirâmide é $1/3$ do produto de sua altura pelo valor médio das áreas das secções transversais (veja exemplo 3.35). Conforme um antigo papiro, esta fórmula já era conhecida pela antiga civilização egípcia do século 18 a.C.

3.7.3.1 Volume de um sólido de revolução

Quando rotacionamos uma região do plano xy em torno do eixo x ou do eixo y, realizando uma volta completa, o lugar geométrico descrito pelos pontos da região é o que chamamos um *sólido de revolução*.

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo x, uma região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$. Para cada $x \in [a, b]$, um plano perpendicular ao eixo x, cortando este no ponto x, determina no sólido de revolução uma secção transversal. Esta secção transversal é obtida pela revolução completa, em torno do eixo x, do segmento vertical $A_x B_x$, sendo $A_x = (x, g(x))$ e $B_x = (x, f(x))$. Veja figura 3.19

A área dessa secção transversal será nada mais que a área de uma região plana compreendida entre dois círculos concêntricos de centro $(x, 0)$, sendo um menor, de raio $g(x)$, e outro maior, de raio $f(x)$. Como a área de um círculo de raio r é πr^2, temos que a área $A(x)$, da secção transversal do sólido de revolução, é dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2.$$

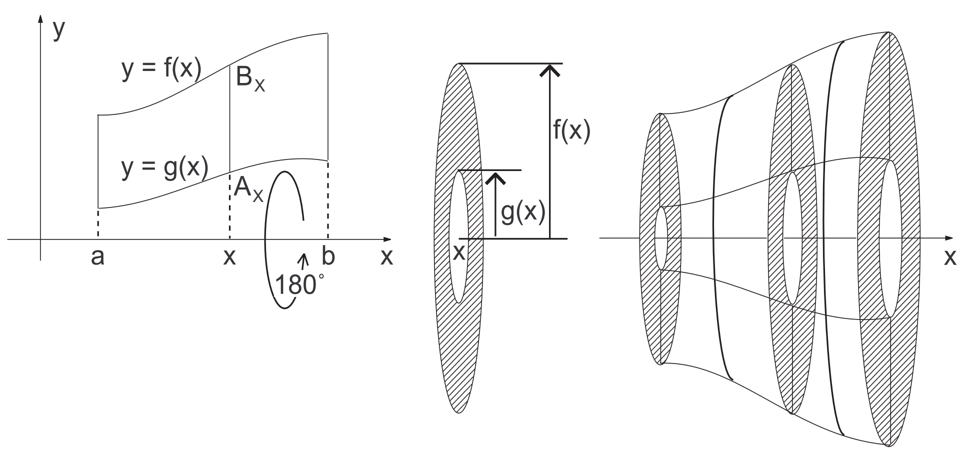


Figura 3.19 Sólido de revolução.

Portanto, o volume do sólido de revolução será

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b (\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2)\, dx.$$

Se a região plana for delimitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x, e pelas retas $x = a$ e $x = b$, teremos $g(x) = 0$, e então

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx.$$

Exemplo 3.37. *Calcule o volume de uma esfera de raio* a*.*

A esfera de raio a pode ser interpretada como o sólido obtido pela revolução da região semicircular $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, em torno do eixo x. Uma tal região é delimitada pelas curvas $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, e $y = 0$, com $-a \leq x \leq a$. Assim, aqui, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$, sendo então

$$dV = A(x)\, dx = \pi[f(x)]^2\, dx = \pi(a^2 - x^2)\, dx$$

o elemento de volume a integrar. Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\, dx \\ &= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} \\ &= \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \pi \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

3.7.4 Comprimento de uma curva

Consideremos agora a curva $y = f(x)$, gráfico de uma função contínua f, para $a \leq x \leq b$.

Para calcular o comprimento dessa curva, primeiramente particionamos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, por meio de pontos

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b.$$

Em seguida consideramos, no gráfico, os $n + 1$ pontos correspondentes,

$$A_0 = (x_0, f(x_0)), A_1 = (x_1, f(x_1)), \ldots, A_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1})), A_n = (x_n, f(x_n))$$

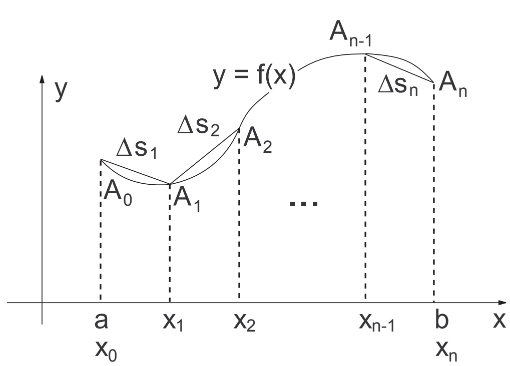


Figura 3.20 Comprimento de arco.

Sendo $\Delta s_i = \text{dist}(A_{i-1}, A_i)$, para $i = 1, \ldots, n$, temos que uma aproximação do comprimento da curva é dada pela soma $\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \text{dist}(A_{i-1}, A_i)$. Agora,

$$\begin{aligned}\text{dist}(A_{i-1}, A_i) &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x\end{aligned}$$

Assumindo que f é diferenciável no intervalo $[a, b]$, pelo teorema do valor médio

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i),$$

para algum c_i compreendido entre x_{i-1} e x_i. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x.$$

Esta é uma soma integral de $\varphi(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, no intervalo $[a, b]$, correspondente à subdivisão $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, com uma “escolha” de pontos intermediários $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Supondo $f'(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$, temos então que o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, é dado por

$$s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

A ideia intuitiva que dá a integral para o comprimento de arco é ilustrada na figura 3.21. Para um elemento infinitesimal de comprimento dx, corresponde uma variação infinitesimal em y, dy. O elemento infinitesimal de comprimento de arco, ds, correspondente à variação dx, é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

3.7.5 Área de uma superfície de revolução

Consideremos a curva $y = f(x)$, gráfico de uma função f contínua, a qual assumiremos que tem derivada f' também contínua, para $a \le x \le b$.

Rotacionando-se essa curva em torno do eixo x, obtemos uma superfície de revolução. Para o cálculo de sua área, primeiramente particionamos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, por meio de

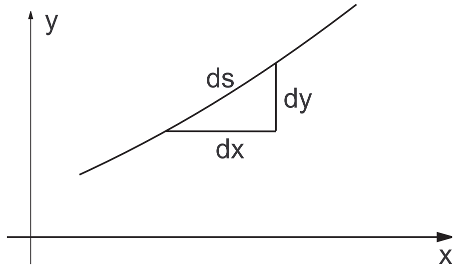


Figura 3.21 Geometria do ds.

pontos $a = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$. Tomando-se dois pontos dessa subdivisão, x_{i-1} e x_i, consideramos os pontos correspondentes no gráfico de f, $A_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1})$ e $A_i = (x_i, f(x_i))$. Este procedimento geométrico está ilustrado na figura 3.20.

Rotacionando-se o segmento $A_{i-1}A_i$ em torno do eixo x, obtemos um tronco de cone, de geratriz lateral $\Delta s_i = \overline{A_{i-1}A_i}$, sendo $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ os raios de sua base e de seu topo. Veja figura 3.22

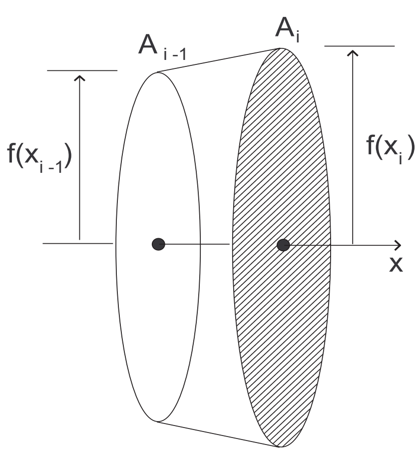


Figura 3.22 Área da superfície de revolução.

A área da superfície lateral de um tronco de cone, de geratriz lateral ℓ e raios r e R no topo e na base, é dada por $\pi(r + R)\ell$. Assim, rotacionando o segmento $A_{i-1}A_i$, em torno do eixo x, como acima, a superfície resultante terá área

$$\Delta S_i = \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \Delta s_i$$

e a área da superfície de revolução, da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x, será dada por

$$S = \lim \Delta x \to 0 \sum \Delta S_i$$

Agora, como argumentado na seção anterior (confira),

$$\Delta s_i = \overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x$$

para algum c_i entre x_{i-1} e x_i. Assim sendo,

$$\begin{aligned}\Delta S_i &= \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \Delta s_i \\ &= \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}S &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta S_i \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \Delta s_i \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x\end{aligned}$$

E pode ser mostrado que este último limite é igual a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum 2\pi f(c_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Assim, a área da superfície de revolução resultante é dada por

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

3.7.6 Centro de gravidade de uma figura plana

Se temos, em um plano ou no espaço n pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tendo massas m_1, m_2, $\ldots$, m_n, respectivamente, o centro de massa $\bar{P}$, do sistema de n pontos, é dado por

$$\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i P_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

ou seja, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, em que

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Consideremos uma região plana, delimitada pelos gráficos das funções contínuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$. Olhando essa região como uma placa plana, de espessura desprezível, suponhamos que ela possui densidade superficial (massa por unidade de área) δ constante.

Particionando-se o intervalo $[a, b]$, em intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através dos pontos $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, aproximamos essa região por

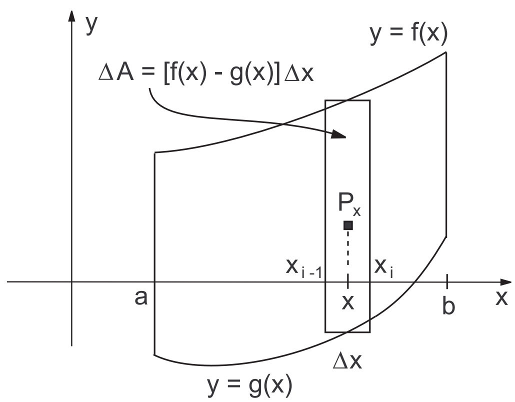


Figura 3.23 Centro de gravidade.

uma reunião de retângulos, como na figura 3.23, sendo cada retângulo de altura $f(x) - g(x)$ e base Δx, sendo aqui x o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Esse retângulo elementar tem área $\Delta A = (f(x) - g(x))\Delta x$, seu centro de massa é o ponto $P_x = \left(x, \frac{f(x)+g(x)}{2}\right)$, sendo sua massa dada por

$$\Delta m = \delta \cdot \Delta A = \delta(f(x) - g(x))\Delta x.$$

O centro de massa da reunião de todos esses retângulos elementares coincide com o centro de massa dos pontos P_x, atribuindo-se a cada ponto a massa Δm do seu retângulo. Assim, uma aproximação do centro de massa da região plana considerada, o centro de massa dos vários retângulos elementares, é dada por

$$\hat{P} = \frac{\sum \Delta m \cdot P_x}{\sum \Delta m} = \frac{\sum \delta \cdot \Delta A \cdot P_x}{\sum \delta \cdot \Delta A} = \frac{\sum \Delta A \cdot P_x}{\sum \Delta A}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\Delta A \cdot P_x &= \Delta A \cdot \left(x, \frac{f(x)+g(x)}{2}\right) \\
&= (f(x) - g(x))\Delta x \cdot \left(x, \frac{f(x)+g(x)}{2}\right) \\
&= \left(x(f(x) - g(x))\Delta x, (f(x) - g(x)) \cdot \frac{f(x)+g(x)}{2}\Delta x\right) \\
&= \left(x(f(x) - g(x))\Delta x, \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) \cdot \Delta x\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, o centro de massa $\bar{P}$ da região plana considerada, será dado por

$$\bar{P} = \lim_{\Delta x \to 0} \hat{P} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sum \Delta A \cdot P_x}{\sum \Delta A}.$$

Portanto, passando ao limite, nas duas coordenadas de $\hat{P}$, chegamos a $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx} \qquad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx}.$$

Exercícios Recomendados

EP 1. *Calcule a área delimitada pelas curvas* $y^2 = 9x$ *e* $y = 3x$*.*

EP 2. *Calcule a área delimitada pelas curvas* $xy = a^2$*,* $x = a$*,* $y = 2a$ *(*$a > 0$*) e o eixo* x*.*

EP 3. *Calcule a área delimitada pela curva* $y = x^3$*, pela reta* $y = 8$ *e pelo eixo* y*.*

EP 4. *Calcule a área total delimitada pelas curvas* $y = x^3$*,* $y = 2x$ *e* $y = x$*.*

EP 5. *Calcule a área delimitada pela elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*.*

EP 6. *Calcule a área delimitada pela curva fechada (hipociclóide)* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$*.*

Determinar o valor médio da função dada, no intervalo especificado.

EP 7. $f(x) = x^2$*,* $a \leq x \leq b$*.*

EP 8. $f(x) = \sqrt{x}$*,* $a \leq x \leq b$ *(*$0 \leq a < b$*).*

EP 9. $f(x) = \cos^2 x$*,* $0 \leq x \leq \pi/2$*.*

Em cada problema, calcule o volume do sólido obtido por revolução, conforme descrito.

EP 10. *A elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *gira em torno do eixo* x*.*

EP 11. *O segmento de reta da origem* $(0, 0)$ *ao ponto* (a, b) *gira ao redor do eixo* x*, obtendo-se assim um cone.*

EP 12. *A região plana delimitada pela hipociclóide* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *gira ao redor do eixo* x*.*

EP 13. *O arco de senóide* $y = \operatorname{sen} x$*,* $0 \leq x \leq \pi$*, gira em torno do eixo* x*.*

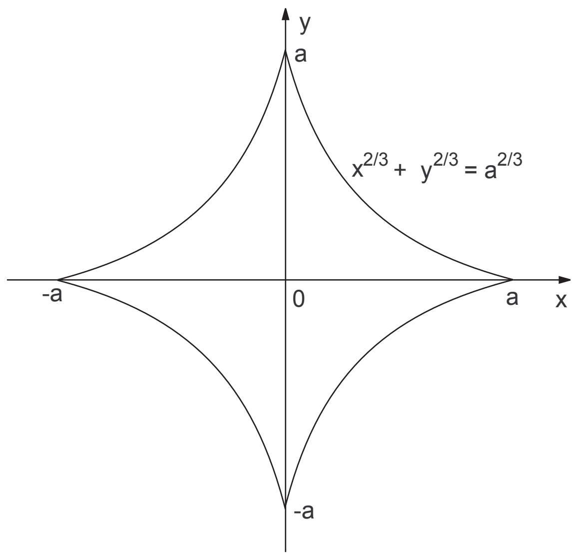
EP 14. *A região delimitada pela parábola* $y^2 = 4x$*, pela reta* $x = 4$ *e pelo eixo* x*, gira em torno do eixo* x*.*

Calcule os comprimentos das curvas descritas abaixo.

EP 15. *Hipociclóide (veja figura)* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$*.*

EP 16. $y = \frac{1}{\sqrt{a}} x^{3/2}$*, de* $x = 0$ *a* $x = 5a$*.*

EP 17. $y = \ln x$*, de* $x = \sqrt{3}$ *a* $x = \sqrt{8}$*.*



EP 18. $y = 1 - \ln(\cos x)$, *de* $x = 0$ *a* $x = \pi/4$.

Em cada problema, calcule a área da superfície obtida por revolução da curva dada em torno do eixo especificado.

EP 19. $y^2 = 4ax$, $0 \leq x \leq 3a$, *rotacionada em torno do eixo* x.

EP 20. $y = 2x$, $0 \leq x \leq 2$,*(a) rotacionada em torno do eixo* x *(b) rotacionada em torno do eixo* y.

EP 21. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, *rotacionada em torno do eixo* x.

Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada.

EP 22. *Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *(*$x \geq 0$ *e* $y \geq 0$*).*

EP 23. *Área delimitada pela curva* $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ *e o eixo* x.

EP 24. *Área delimitada pela parábola* $y^2 = ax$ *e pela reta* $x = a$.

SOBRE OS AUTORES

Márcio de Jesus Soares

Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), câmpus de São José do Rio Preto, e doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), câmpus de São Carlos. Desde 2009 é professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), câmpus de São Carlos, tendo como área de pesquisa a Topologia.

João Carlos Vieira Sampaio

Licenciado em Matemática pela Unesp de São José do Rio Preto, mestre em Matemática pela USP de São Carlos e Ph.D. em Matemática pela Rutgers University. É professor do Departamento de Matemática da UFSCar desde 1976.

Paulo Antonio Silvani Caetano

É professor associado da UFSCar, onde leciona, pesquisa e orienta mestrados profissionais. Em 2000, doutorou-se em Equações Diferenciais Parciais, e atualmente trabalha na formação continuada de professores de Matemática e na produção de materiais didáticos para o ensino presencial e não presencial de Matemática, com ênfase em ambientes virtuais de aprendizagem.

Odete Baes

Bacharel em Matemática pela UFSCar desde 1986 e mestre em Matemática, na área de Geometria, pela UFSCar desde 1993. É professora do Centro Universitário Central Paulista (Unicep) desde 2004, onde leciona disciplinas de Matemática em cursos de Engenharia.