Coleção UAB–UFSCar

Sistemas de Informação

Guillermo Lobos Villagra
João Carlos Vieira Sampaio
Luiz Roberto Hartmann Junior
Waldeck Schützer

Cálculo

Cálculo

Reitor
Targino de Araújo Filho
Vice-Reitor
Adilson J. A. de Oliveira
Pró-Reitora de Graduação
Claudia Raimundo Reyes

Secretária de Educação a Distância - SEaD
Aline M. de M. R. Reali
Coordenação SEaD-UFSCar
Daniel Mill
Denise Abreu-e-Lima
Glauber Lúcio Alves Santiago
Joice Otsuka
Marcia Rozenfeld G. de Oliveira
Sandra Abib
Vânia Paula de Almeida Neris
Coordenação UAB-UFSCar
Daniel Mill
Denise Abreu-e-Lima

Coordenadora do Curso de Sistemas de Informação
Vânia Neris

UAB-UFSCar
Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, km 235
13565-905 - São Carlos, SP, Brasil
Telefax (16) 3351-8420
www.uab.ufscar.br
uab@ufscar.br

Guillermo Lobos Villagra
João Carlos Vieira Sampaio
Luiz Roberto Hartmann Junior
Waldeck Schützer

Cálculo

São Carlos

2013

Concepção Pedagógica
Daniel Mill

Supervisão
Douglas Henrique Perez Pino

Equipe de Revisão Linguística
Clarissa Galvão Bengtson
Daniel William Ferreira de Camargo
Daniela Silva Guanais Costa
Gabriela Aniceto
Letícia Moreira Clares
Luciana Rugoni Sousa
Sara Naime Vidal Vital

Equipe de Editoração Eletrônica
Izis Cavalcanti

Equipe de Ilustração
Maria Julia Barbieri Mantoanelli

Capa e Projeto Gráfico
Luís Gustavo Sousa Sguissardi

Sumário

APRESENTAÇÃO

O cálculo diferencial e integral foi desenvolvido inicialmente por Isaac Newton[1] e Gottfried Leibniz[2], de maneira independente. É uma ferramenta essencial e natural em qualquer curso da área de exatas.

De modo geral, ocupa-se de problemas envolvendo funções ou grandezas contínuas, modelando também fenômenos que envolvam dinâmicas dependentes de variáveis contínuas, como o tempo, por exemplo. Possui aplicações em Física, Biologia, Medicina, Economia, Engenharia e outras áreas. Alguns exemplos de perguntas tratadas pelas técnicas do cálculo diferencial e integral são: em um ambiente fechado e dependendo da população de coelhos nesta contida, qual é o número de raposas existentes? Como o total de chuvas em um ano afeta a safra de milho em um dado país? Podemos prever o início de uma crise epilética examinando a atividade elétrica do cérebro?

Esta nota de cálculo diferencial e integral foi escritas para alunos do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação da UAB-UFSCar. Ela faz uma apresentação mínima dos conceitos fundamentais do cálculo, expondo algumas de suas aplicações.

Uma ênfase especial é dada ao estudo de funções de uma variável e de seus comportamentos, mediante as ferramentas do cálculo.

[1] Sir Isaac Newton (1642-1727) foi um físico, matemático, astrônomo, filósofo, alquimista e teólogo inglês, e é considerado o maior e mais influente cientista que já se conheceu. A ele é geralmente atribuída a invenção do Cálculo Diferencial e Integral.

[2] Gottfried Leibiniz (1646-1716) foi um matemático e filósofo alemão que desenvolveu independentemente de Newton o Cálculo Diferencial, introduzindo neste uma notação bastante interessante e sugestiva. Essa notação foi amplamente adotada desde a sua publicação. Leibniz foi um grande inventor, particularmente prolífico no campo das máquinas de calcular mecânicas.

UNIDADE 1

Números reais e funções

O objetivo desta unidade é rever e consolidar alguns fatos elementares sobre o sistema dos números reais e das funções.

1.1 Números reais

Em um curso de Cálculo, é comum encontrarmos vários conjuntos numéricos. Dentre eles, o de maior relevância é o conjunto dos números reais, pois este contém números em "quantidade suficiente" e possui as "melhores propriedades" para expressar convenientemente as leis do Cálculo, e resolver problemas por meio dessa ferramenta matemática. Mas antes de estudarmos os reais e conhecermos bem as suas propriedades, devemos seguir o curso da história, examinando primeiro o conjunto dos números naturais, depois o dos inteiros, e depois o dos racionais, sendo que cada um desses conjuntos está contido no seguinte. A hierarquia dos conjuntos numéricos encontra-se ilustrada na Figura 1.1. É importante mencionar que o conjunto dos números complexos, que contém dentro dele o conjunto dos números reais e todos os demais conjuntos já citados, apesar de sua grande importância e de suas inúmeras aplicações, não será de interesse imediato para o que pretendemos fazer e, portanto, não o estudaremos neste texto.

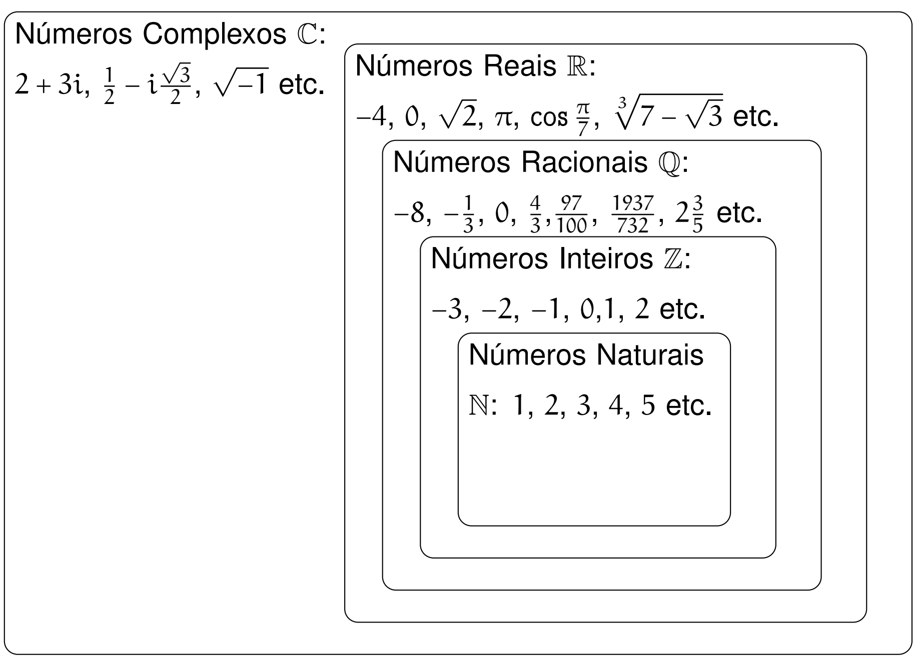


Figura 1.1 Hierarquia dos conjuntos numéricos.

1.1.1 Conjuntos numéricos

O conceito de número natural surgiu da necessidade de contar objetos, como os membros de uma família, os animais de uma criação, os grãos colhidos na última colheita etc., mas o maior avanço na abstração ocorreu quando numerais passaram a ser usados para representar os números. Registros tão antigos quanto os encontrados em artefatos arqueológicos egípcios de 1500 a.C. exibem hieróglifos representando os números 1, 10 e potências de 10 até 1 milhão. A forma de numeração atual, chamada posicional de base 10, foi essencialmente desenvolvida pelos antigos babilônios, embora os símbolos utilizados para designar os dígitos hoje em dia em nada se pareçam com os daquela época.

A abordagem tradicional para a definição dos números naturais são os axiomas de Peano. Faremos isso apenas brevemente neste texto, mas o leitor interessado poderá encontrar mais detalhes, por exemplo, em (**?** , §0.4).

Seja $\mathbb{N}$ um conjunto contendo um elemento particular, o 1, e seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função que a cada elemento n de $\mathbb{N}$ associa seu *sucessor* $s(n)$. Os *axiomas de Peano* são estes:

i) $s(n) \neq 1$, isto é, o elemento 1 não é o sucessor de nenhum elemento de $\mathbb{N}$.

ii) A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetora, ou seja, cada elemento de $\mathbb{N}$ possui exatamente um sucessor.

iii) Qualquer subconjunto S de $\mathbb{N}$ contendo o elemento 1 e também os sucessores de todos os seus elementos (isto é, $s(n) \in S$ para todo $n \in S$) deve ser igual a $\mathbb{N}$.

A propriedade (iii) serve de base para demonstrações utilizando o *primeiro princípio da indução*, ou indução finita.

Definição 1.1 (números naturais): o conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

juntamente com a função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $s(1) = 2,\ s(2) = 3,\ s(3) = 4, \ldots$ (a função que associa a cada elemento o próximo elemento da lista), satisfaz os axiomas de Peano. Este é chamado *conjunto dos números naturais*.

É importante observar que, conforme a maioria dos autores, não estamos incluindo o zero no conjunto dos números naturais, afinal a descoberta do número zero e a atribuição de um numeral específico ocorreu somente muito mais tarde, em cerca de 700 a.C., com os babilônios. Por isso, é comum indicar o conjunto dos naturais também por $\mathbb{Z}_+$, isto é, o conjunto dos inteiros positivos.

Definição 1.2 (números inteiros negativos): o conjunto dos *números inteiros negativos* é o conjunto

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\},$$

formado pelos opostos dos números naturais.

Definição 1.3 (números inteiros): o conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z}$ é a união do zero com os números inteiros negativos e positivos, ou seja,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+.$$

Sendo assim, o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números inteiros. Estes, por sua vez, formam um subconjunto dos números racionais.

Definição 1.4 (números racionais): o conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q}$ é formado por todos os números x tais que x é uma fração da forma $\frac{p}{q}$, na qual os números p e q são números inteiros e q é diferente de zero, ou seja,

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}.$$

Dizemos que os números racionais são formados por razões de números inteiros, evitando-se a divisão por zero. Os antigos gregos acreditavam que quaisquer quantidades mensuráveis poderiam ser representadas por números racionais. No entanto, por meio de um artifício geométrico muito simples Hipaso de Metaponto demonstrou no século V a.C. não ser esse o caso. Para o espanto de todos, ele demonstrou a existência de números que não podem ser expressos como a razão de dois números inteiros. Tais números são, portanto, chamados números irracionais. Eis alguns exemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, π, $\cos\frac{\pi}{5}$ etc.

Definição 1.5 (números irracionais): o conjunto de todos os números que não podem ser expressos como uma fração de dois números inteiros é o conjunto dos *números irracionais* $\mathbb{Q}^c$,

$$\mathbb{Q}^c = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Exemplo 1.1: estão listados abaixo alguns exemplos de números racionais e irracionais.

a) Alguns números racionais podem ser expressos de muitas maneiras diferentes, algumas até mesmo surpreendentes, tais como:

$$\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}.$$

b) $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,1313131313131313131313\ldots \in \mathbb{Q}$.

c) $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$. Aqui, assim como no exemplo anterior, a barra sobre o grupo de algarismos indica que estes se repetem indefinidamente, de modo que esse número possui uma quantidade infinita de algarismos não nulos. Sendo assim, está bastante claro que $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$.

d) Hipaso demonstrou (e podemos seguir seus passos ainda hoje) que o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$. Escrito na forma decimal, pode-se mostrar que $\sqrt{2} = 1,414213562373095... \in \mathbb{Q}^c$. Como este número é irracional, sua expansão decimal não apresenta blocos repetitivos como no exemplo anterior. De fato, embora não seja uma prova rigorosa, podemos tentar nos convencer disso calculando muitos dígitos desse número:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \;=\; & 1,4142135623730950488016887242096980785696\\ & 7187537694807317667973799073247846210703\\ & 8850387534327641572735013846230912297024\\ & 9248360558507372126441214970999358314132\\ & 2266592750559275579995050115278206057 15\ldots\end{aligned}$$

e) O perímetro de uma circunferência de raio 1 é o número π. De fato, os gregos já sabiam que se dividindo o perímetro de qualquer circunferência pelo seu diâmetro obtemos como resultado o número π. Uma breve expansão decimal desse número é $\pi = 3,141592653589793\ldots$ Pode ser mostrado que π é de fato um número irracional. Embora essa demonstração seja muito interessante, não a faremos neste texto. Assim como no exemplo anterior, podemos tentar nos convencer desse fato calculando muitos dígitos:

$$\begin{aligned}\pi \;=\; 3,&1415926535897932384626433832795028841971 6939\\&9375105820974944592307816406286208998628 03482\\&5342117067982148086513282306647093844609 55058\\&2231725359408128481117450284102701938521 10555\\&964462294895493038196442881097566593\ldots\end{aligned}$$

Existem alguns sítios na Internet nos quais se pode consultar qual é a posição adentro do número π na qual se encontra, por exemplo, a data do aniversário de qualquer pessoa. Talvez o leitor ache divertido conhecer onde se encontra a sua própria.

f) Outro número notável e que encontraremos com muita frequência ao longo do nosso estudo do Cálculo é o número

$$e = 2,718281828459045235360287 4\ldots,$$

chamado *Número de Euler*. Assim como o número π, pode ser mostrado que e é um número irracional. No entanto, embora aquele seja fácil de definir (perímetro pelo diâmetro de qualquer círculo), a definição rigorosa deste terá que ser adiada para mais tarde, quando tivermos conhecimentos suficientes acerca das funções exponencial e logarítmica.

Juntando-se os números racionais aos irracionais, formamos o principal conjunto de números do Cálculo.

Definição 1.6 (números reais): o conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações 1.1:

1. Conforme ilustrado na Figura 1.1, temos a seguinte cadeia de inclusões de conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Temos também $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \varnothing$, nos quais o símbolo $\varnothing$ denota o conjunto vazio.

2. Em cursos mais avançados de matemática, é um exercício rotineiro demonstrar que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são infinitos e possuem todos mesma quantidade de elementos. Isso equivale a demostrar que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$, ou seja, demonstrar que podemos enumerar seus elementos. Por isso dizemos que estes conjuntos são enumeráveis.

3. Demonstra-se que os conjuntos $\mathbb{Q}^c$ e $\mathbb{R}$ também possuem ambos a mesma quantidade de elementos, isto é, estão em correspondência biunívoca, mas não são enumeráveis, pois não estão em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$. É espantoso saber que estes contêm uma quantidade incomensuravelmente maior de elementos do que $\mathbb{N}$, por isso os matemáticos costumam dizer que esses conjuntos possuem a cardinalidade do contínuo.

1.1.2 Axiomática

Até o momento falamos muito, ainda que informalmente, sobre a formação dos conjuntos numéricos. No entanto, os números de nada nos servem sem que possamos operar (calcular) com eles. O que faremos a seguir é definir as operações de adição e de multiplicação e estudar suas propriedades. Uma vez mais, como a definição rigorosa dessas operações está além do escopo deste texto, vamos nos contentar em postular a sua existência. Em seguida, vamos estudar algumas das propriedades notáveis dos números reais.

Propriedade 1.1: no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais estão definidas as operações de *adição* (indicada "$+$") e de *multiplicação* (indicada "$\cdot$"), possuindo as seguintes propriedades (ou *axiomas*[1]):

$i)$ Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ existe um único número real $a+b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Dizemos que $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado nessas operações.

$ii)$ As operações de adição e de multiplicação são *comutativas*, isto é, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ valem $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

$iii)$ As operações de adição e de multiplicação são associativas, isto é, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ valem $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

$iv)$ A operação de multiplicação é distributiva sobre a adição, isto é, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ vale $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

[1] Um axioma é simplesmente uma afirmação cuja veracidade somos convidados a aceitar.

v) Existe um elemento neutro para a adição, chamado *zero* e denotado por "0". Esta propriedade significa que $a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Do mesmo modo, existe um elemento neutro para a multiplicação, chamado *um*. Isso significa que $a \cdot 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Além disso, $0 \neq 1$.

vi) Para cada número real a corresponde um único número real chamado *oposto* de a e denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

vii) Para cada número real $a \neq 0$ corresponde um único número real chamado *inverso* de a e denotado por $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, tal que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$.

Os matemáticos costumam dizer que o conjunto dos números reais dotados dessas duas operações com estas sete propriedades forma um *corpo*, chamado o *corpo dos números reais*. Assim, quando nos referimos ao corpo não estamos pensando apenas nos elementos do seu conjunto, mas também nas operações e nas propriedades acima. Existem muitos outros corpos interessantes na matemática. Se o leitor pensou que $\mathbb{Q}$ com a adição e a multiplicação também é um corpo então acertou, mas os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são corpos. Será que o leitor consegue descobrir quais das propriedades acima não estão presentes nesses conjuntos?

Observações 1.2:

1. O sinal de multiplicação costuma ser omitido e escrevemos simplesmente ab ao invés de $a \cdot b$, ficando subentendido que ab é o produto de a por b.

2. A Propriedade 1.1(vi) sobre a existência do oposto permite-nos definir a operação de *subtração* "−", a saber $a - b = a + (-b)$. Isto é, para subtrair b de a deve-se somar a a o oposto de b. Analogamente, a Propriedade 1.1(vii) sobre a existência de inverso permite-nos definir a operação de *divisão* "÷" do seguinte modo: $a \div b = ab^{-1}$. Ou seja, para dividir a por b devemos multiplicar a pelo inverso de b, desde que b seja diferente de zero. Por causa da semelhança com os números racionais, é bastante natural escrevermos $a \div b$ como a razão $\dfrac{a}{b}$, mas aqui devemos ter o cuidado de observar que a e b não precisam ser números inteiros, mas podem ser quaisquer números reais com $b \neq 0$.

3. Muitas das propriedades familiares dos números reais decorrem imediatamente da Definição 1.1. Por exemplo, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ não nulos, vale $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Isso é bastante fácil de se demonstrar: a expressão

$(ab)^{-1}$ pede pelo inverso do número real $ab \neq 0$, digamos x. Então x é tal que $(ab)x = 1$. Se pusermos $x = a^{-1}b^{-1}$ e observamos que, pela comutatividade, $x = b^{-1}a^{-1}$, logo,

$$(ab)x = (ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = a1a^{-1} = aa^{-1} = 1,$$

e assim, pela unicidade do inverso, $x = a^{-1}b^{-1}$ tem que ser o inverso de ab. Os matemáticos costumam chamar uma afirmação cuja veracidade decorre imediatamente de uma definição como uma *proposição*. Sendo assim, a afirmação $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ é uma proposição.

4. Também é rotineiro verificar que vale a lei familiar da adição de frações para números reais
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$
quaisquer que sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$. De fato, usando apenas a Definição 1.1 e as observações acima, temos:
$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= ab^{-1} + cd^{-1} \\ &= a(dd^{-1})b^{-1} + c(bb^{-1})d^{-1} \\ &= ad(d^{-1}b^{-1}) + cb(b^{-1}d^{-1}) \\ &= (ad + bc)(bd)^{-1} \\ &= \frac{ad + bc}{bd}. \end{aligned}$$
Esta também é uma proposição, mas preferimos não usar muitos nomes complicados nesta unidade. Encontraremos muitas proposições interessantes ao longo do nosso estudo. Na verdade, a veracidade desta proposição depende da veracidade da proposição anterior (você consegue ver onde foi usada?), mas ainda assim a afirmação é chamada proposição.

5. Tal como na observação anterior, podemos demonstrar (e deixamos isso a cargo do leitor) que valem:
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Exemplo 1.2: dados os números reais a, r, com r entre -1 e 1 ($-1 < r < 1$), então, é possível demonstrar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

faz sentido e é igual a um número real. Os matemáticos aprenderam a ser muito cuidadosos com somas infinitas, pois nem sempre elas fazem sentido. Um exemplo disso é a soma infinita $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ Será que esta soma tem um valor definido? Pensar a esse respeito é um excelente exercício de lógica. No caso da soma infinita acima, podemos facilmente calcular o valor de S:

$$\begin{aligned} S &= a + \overbrace{ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots}^{\text{fatore } r} \\ &= a + r\ \underbrace{\left(a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots\right)}_{\text{note que isto é o mesmo que } S}\ . \end{aligned}$$

Desse modo, temos que $S = a + rS$, logo $S - rS = a$ e, portanto, $S = \dfrac{a}{1-r}$. Isto faz sentido porque, em particular $r \neq 1$, mas será que poderíamos dizer o mesmo se $r \leq -1$ ou se $r > 1$? Não é difícil se convencer de que a soma infinita não faz sentido quando r está em um desses dois intervalos. Em resumo, temos que vale a seguinte identidade:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots = \frac{a}{1-r}, \quad a \in \mathbb{R},\ -1 < r < 1.$$

Problemas 1.1: em cada um dos itens abaixo, verifique se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

a) $2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}}$.

b) $\dfrac{13}{99} = \dfrac{13}{10^2} + \dfrac{13}{10^4} + \dfrac{13}{10^6} + \ldots = 0,\overline{13} = 0,131313\ldots$

c) $\frac{11^2\pi^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{-1331\pi}} \in \mathbb{Q}^c$.

d) É correto afirmar que $-2 = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = \sqrt{(-2)^2} = 2$.

e) $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$.

O corpo dos números reais possui ainda muitas outras propriedades notáveis. Por exemplo, existe uma ordem entre seus elementos e, de acordo com essa ordem, quaisquer dois números reais podem ser comparados, isto é, ou ambos são iguais ou um é maior que o outro. Vamos expressar isso formalmente a seguir.

Propriedade 1.2: o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é um corpo totalmente ordenado. No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$", possuindo as propriedades[2] abaixo. Para todo a, b e c números reais, temos:

$i)$ $a \leq b$ ou $b \leq a$

$ii)$ $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
(Leia-se: se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$)

$iii)$ $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

$iv)$ $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

$v)$ $0 \leq a$ e $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

Aqui o leitor deve ter encontrado o símbolo "$\Rightarrow$" pela primeira vez neste texto. Esse símbolo significa "implica" e $A \Rightarrow B$ significa A implica B. Um outro modo de ler esses símbolos é "se A, então B". Mas o que exatamente isso quer dizer? Isso quer dizer que a veracidade de A determina a veracidade de B. Por exemplo, se A é a afirmação "hoje faz sol" e B é a afirmação "vou sair", então $A \Rightarrow B$ significa dizer que "se hoje fizer sol, então vou sair". Até ai tudo bem, mas devemos tomar cuidado com afirmações do tipo $A \Rightarrow B$, pois a falsidade de A não determina a falsidade de B. Por exemplo, se A for falsa, isto é, "hoje não faz sol", mesmo assim B pode ser verdadeira, isto é, "vou sair" mesmo assim. O que parece intuitivo e é correto afirmar é que se B for falsa, ou seja, "não vou sair", então certamente A também será falsa, ou seja, "hoje não faz sol". Para resumir, isso significa dizer que "se eu não sair é porque hoje não faz sol".

Os matemáticos gostam de dar nomes a todo tipo de afirmação. Sendo assim, na sentença $A \Rightarrow B$, costumam chamar A de *hipótese* e B de *tese*. Por exemplo, na afirmação "se hoje fizer sol, então vou sair", a hipótese é "hoje faz sol" e a tese é "vou sair". A veracidade da hipótese determina a veracidade da tese. Isso é lógica, e lógica não é apenas legal, mas é poderosa! Uma vez estabelecido que a tese é verdadeira, essa veracidade é irrefutável. Ninguém mais pode duvidar disso.

A seguir vamos aplicar essa lógica a algumas situações da própria matemática.

[2] A essa altura o leitor já deve ter se acostumado com a ideia de chamar essas propriedades de axiomas.

Exemplo 1.3: consideremos a afirmação "se a é maior que zero e menor que b, então a média geométrica entre a e b é menor que a média aritmética entre a e b". Em símbolos,

$$\overbrace{0 < a < b}^{\text{hipótese}} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{média geométrica}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{média aritmética}}}^{\text{tese}} \tag{1.1}$$

Solução: se a ou b forem negativos, a desigualdade (1.1) não faz sentido. De fato, para $a = -2$ e $b = 3$, temos que $\sqrt{ab} = \sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$. Porém, se a e b forem ambos negativos, a desigualdade não se verifica. De fato, para $a = -2$ e $b = -3$ temos que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{6} > -\frac{5}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Ter feito essa verificação não prova que a desigualdade é verdadeira para os valores de a e b conforme na hipótese. Uma prova pode ser obtida do seguinte fato: o quadrado de um número não nulo é sempre um número positivo. O número $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é não nulo (desde que $0 < a < b$), logo seu quadrado deve ser positivo. Juntando a essa observação o desenvolvimento do quadrado, obtemos:

$$0 < (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$$

Disto é imediato concluir que $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$. Portanto, sendo verdadeira a hipótese $0 < a < b$ também será verdadeira a tese $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$, e isso completa a prova.

Como já dissemos, no conjunto dos números reais existe uma ordem e, de acordo com ela, dados dois números reais a e b distintos, temos que ou $a < b$ ou $a > b$. Por isso dizemos que $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado. Além disso, o corpo dos números reais possui a seguinte propriedade fundamental:

Propriedade 1.3 (propriedade de Arquimedes): para todo a e b reais, se a é positivo, existe um número natural n tal que b é menor que o produto de n por a. Em símbolos,

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ 0 < a \quad \Rightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a.$$

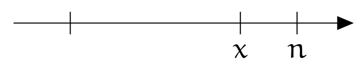
Essa propriedade é conhecida como *Propriedade de Arquimedes* e por isso dizemos que o corpo dos números reais é um *corpo arquimediano*. É importante observarmos que a propriedade não vale se $a \leq 0$.

Exemplo 1.4: a partir da Propriedade de Arquimedes, podemos provar algumas relações interessantes entre os números naturais e os números reais.

a) Para todo $x > 0$ existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$. A seguinte figura ilustra isso graficamente:

Solução: considere $a = x > 0$ e $b = 1$ na Propriedade de Arquimedes. Então, $a > 0$ e existe um número natural n tal que $1 = b < n \cdot a = n \cdot x$. Simplificando, existe um número natural n tal que $1 < n \cdot x$, ou seja, $\frac{1}{n} < x$.

b) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe um número natural n tal que $n > x$. Graficamente:



Solução: considere $a = 1 > 0$ e $b = x$ na Propriedade de Arquimedes. Então, existe um número natural n tal que $x = b < n \cdot a = n \cdot 1$. Simplificando, para todo número real x existe um número natural n tal que $n > x$.

A seguir destacamos outra propriedade fundamental dos números reais, a densidade dos números racionais.

Propriedade 1.4: o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto $\mathbb{R}$, isto é, entre dois números reais quaisquer existe sempre um número racional. Em símbolos:

$$\forall\ a < b \in \mathbb{R}, \quad \exists r \in \mathbb{Q} \quad \text{tal que} \quad a < r < b.$$

Exemplo 1.5:

a) Mostre que para todo a e b racional, se $a < b$, então $\frac{a+b}{2}$ é um número racional entre a e b. Em símbolos,

$$\forall\ a, b \in \mathbb{Q} \text{ se } a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Solução: Como $a < b$, temos $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$, ambos sendo números racionais. Logo a sua soma $\frac{a+b}{2}$ também é um número racional. Ademais, temos:

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b,$$

e isso conclui a prova.

b) Uma consequência imediata do item anterior é a de que *entre dois números racionais dados existem infinitos números racionais*.

Destacamos agora uma última, mas não menos importante, propriedade fundamental dos números reais.

Propriedade 1.5: o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é um corpo completo. Com completo estamos querendo dizer que o corpo dos reais possui a seguinte propriedade conhecida como *axioma do supremo*: todo subconjunto não vazio e limitado superiormente A de $\mathbb{R}$ possui *supremo*, isto é, existe o menor de todos os limitantes (também chamadas de cotas) superiores de A. Em símbolos,

$$\forall\ A \subset \mathbb{R}, \qquad \underbrace{A \neq \varnothing}_{\text{Conjunto não vazio}} \qquad \text{e} \quad \underbrace{\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad x \leq \ell, \forall\ x \in A,}_{A \text{ é limitado superiormente}}$$

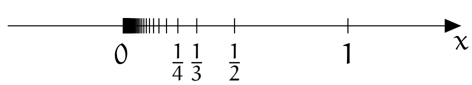
$$\underbrace{\exists!\ s \in \mathbb{R}, \quad \text{tal que} \quad \forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists\ a \in A, \quad a > s - \varepsilon.}_{s \text{ é supremo}}$$

É importante observar que o supremo de A não precisa pertencer a A. Quando o supremo s pertence a A, dizemos que s é o *máximo* de A.

De maneira totalmente análoga, existe a noção de *ínfimo* de um conjunto não vazio e limitado inferiormente A. O ínfimo é a maior dentre todas as cotas inferiores de A.

Exemplo 1.6: mostre que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ é *limitado*, isto é, A é limitado superiormente e inferiormente. Depois, determine o supremo, o máximo (se existir), o ínfimo, e o mínimo (se existir) de A.

Solução: uma representação gráfica aproximada do conjunto A é esta:



Aqui, cada marca na reta real representa um elemento de A e embora os números pareçam acumular-se próximos do zero, é importante notar que o zero não está em A.

Agora A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores, por exemplo, $-10 \leq x$ para todo $x \in A$. Por outro lado, A também é limitado superiormente, pois existem cotas superiores, por exemplo, $x \leq 10$ para todo $x \in A$.

A menor das cotas superiores neste caso é 1, logo 1 é o supremo de A. Como $1 \in A$, nesse caso o supremo também é o máximo.

A maior das cotas inferiores de A é 0, logo 0 é o ínfimo de A. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} \in A$ com $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$. Ademais, como $0 \notin A$, temos que A não possui mínimo.

Exemplo 1.7: o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as propriedades abaixo.

1. B é limitado superiormente por 2.

   Solução: seja $x \in B$ arbitrário. Temos dois casos a serem considerados:

   - Caso 1: se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 < \sqrt{2} < 2$

   - Caso 2: se $0 \leq x$ e $x^2 < 2 \;\Rightarrow\; 0 \leq x = \sqrt{x^2} < \sqrt{2} < 2$

   Portanto em ambos os casos concluímos que $x < 2$ para $x \in B$.
   Isto mostra que B é um conjunto limitado;

2. $\sqrt{2}$ é também uma cota superior de B pelo item acima;

3. Veja que $\sqrt{2} \notin B$;

4. Verifique que $\sqrt{2}$ é o supremo de B em $\mathbb{R}$.

1.1.3 Intervalos

Certos tipos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ aparecem com muita frequência neste texto. São os *intervalos* de $\mathbb{R}$.

Definição 1.7 (intervalo): seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Um intervalo é qualquer subconjunto de um dos tipos relacionados abaixo:

- Intervalos abertos:

$$
\begin{aligned}
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \\
]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

- Intervalos fechados:

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \\
[a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}.
\end{aligned}
$$

- Intervalos semiabertos e semifechados:

$$
\begin{aligned}
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.
\end{aligned}
$$

Problemas 1.2: determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

a) A inequação $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$ é equivalente a $3x - 1 \geq 5(x+2)$?

b) Se $I = [0,2]$ e $J = [-1,1[$, então $I \cap J = [0,1]$?

c) $]-\infty, \pi[$ não possui ínfimo, mas tem π como supremo?

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x + 3 \leq 9\}$ tem ínfimo $\frac{4}{5}$, mas não mínimo?

e) $]\frac{4}{5}, \frac{6}{5}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x + 3 \leq 9\}$?

f) $x \in]-\infty, -\frac{35}{4}[\cup]-7, +\infty[$ é solução da desigualdade

$$\frac{x}{x+7} < 5, \quad x \neq -7 \text{ ?}$$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < (x+5)(x-3)\} =]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[$?

1.2 Funções

Nesta seção destacamos alguns conceitos básicos sobre funções reais a valores reais.

1.2.1 Definições

Definição 1.8 (função): sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Uma *função* real f a valores reais é uma regra que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder um único elemento $f(x) \in B$. Em símbolos, escrevemos:

$$
\begin{aligned}
f : A &\to B \\
x &\mapsto f(x)
\end{aligned}
$$

- O conjunto A é o *domínio de* f e este é denotado por $\mathrm{Dom}(f)$;
- O conjunto B é o *contradomínio de* f;
- O conjunto $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \in B \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ é a *imagem de* f;
- O conjunto de todos os pares ordenados da forma $(x, f(x))$, tal que x percorre o domínio de f, é o *gráfico de* f, isto é,

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

1.2.2 Exemplos

Exemplo 1.8: função *módulo* (ou *valor absoluto*).

A função módulo é definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esta associa a cada $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ seu valor absoluto $|x| \geq 0$. Seu gráfico está ilustrado na Figura 1.2.

Assim, a imagem de f é $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$.

Logo, a representação gráfica de f é dada pela união de duas semirretas:

$$\mathrm{Graf}(f) = \underbrace{\{(x,y) \mid y = x \text{ e } x \geq 0\}}_{semirreta} \cup \underbrace{\{(x,y) \mid y = -x \text{ e } x < 0\}}_{semirreta}$$

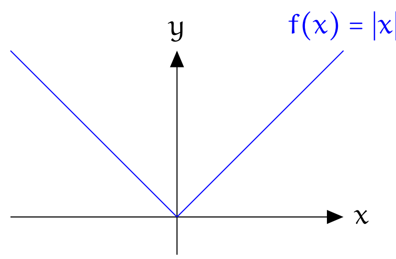


Figura 1.2 Gráfico da função módulo.

Exemplo 1.9 (função raiz quadrada): A função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ e seu gráfico está ilustrado na Figura 1.3. A função raiz quadrada possui as seguintes propriedades:

- $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty[= \mathrm{Im}(f)$;
- $f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$;
- Se $0 \leq a < b$, então $f(0) = 0 \leq f(a) = \sqrt{a} < \sqrt{b} = f(b)$. Isso quer dizer que f é uma função crescente e não negativa;
- Quando x se aproxima de zero, $\sqrt{x}$ se aproxima mais lentamente que x, isto é,

$$0 \leq x < 1 \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt{x} < 1;$$

- Quando x cresce, $\sqrt{x}$ também cresce, sendo que o crescimento de $\sqrt{x}$ é mais lento que x, isto é,

$$1 \leq x \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt{x} < x.$$

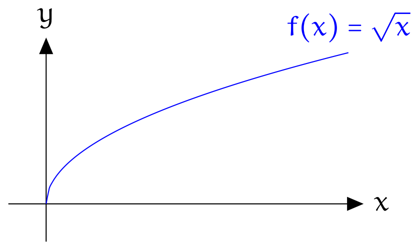


Figura 1.3 Gráfico da função raiz quadrada.

Exemplo 1.10: a função *de* 1º *grau* (ou função *afim*). Uma função de 1º grau é da forma

$$f(x) = ax + b,$$

e associa a cada número real x o número real $ax + b$, no qual a e b são números reais fixos e $a \neq 0$.

O domínio de f é $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. A imagem de f é $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. O gráfico de f é uma reta com coeficiente angular a que corta o eixo x ("eixo das abscissas") em $x = -\frac{b}{a}$ e corta o eixo y ("eixo das ordenadas") em $y = b$. Ou seja,

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y = ax + b}_{\text{equação da reta}}\}.$$

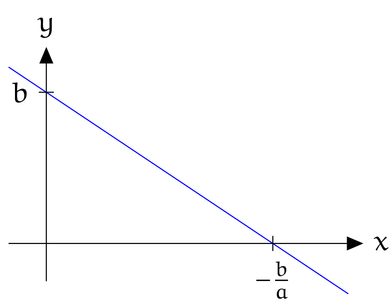


Figura 1.4 Gráfico da função afim $y = ax + b$.

Exemplo 1.11: a função *linear*[3]. Uma função linear é da forma

$$f(x) = ax.$$

Esta associa a cada $x \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom}(f)$ o número real ax. Assim, a imagem de f é $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ (desde que $a \neq 0$). Logo, a representação gráfica de f é uma reta com coeficiente angular a e passando pela origem do sistema de coordenadas

[3]Se $a \neq 0$, então f é um caso particular de função de 1º grau no qual $b = 0$.

formado pelos eixos x e y:

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y = ax}_{\text{equação da reta}}\}.$$

A função linear está ilustrada na Figura 1.5. É importante observar que o gráfico da função linear sempre passa pela origem.

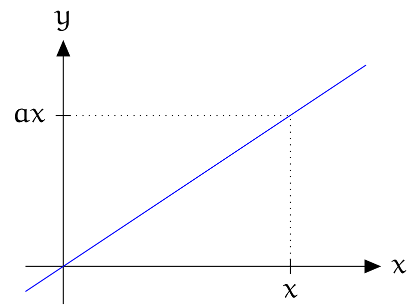


Figura 1.5 Gráfico da função linear $y = ax$.

Exemplo 1.12: A função *identidade*[4]. A função identidade é da forma

$$f(x) = x$$

e associa a cada $x \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom}(f)$ o mesmo número real x. Assim, a imagem de f é $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Logo, a representação gráfica de f é a reta bissetriz do ângulo formado pelos eixos x e y. Ou seja,

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \mid \underbrace{y = x}_{\text{equação da reta}}\}.$$

O gráfico da função identidade está ilustrado na Figura 1.6.

Exemplo 1.13: A função *constante*[5]. Uma função constante é da forma

$$f(x) = b$$

e associa a cada $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ sempre um mesmo número real b. Assim, a imagem de f é $\mathrm{Im}(f) = \{b\}$. Logo, a representação gráfica de f é uma reta paralela ao eixo x, passando pelo eixo y em $y = b$. Ou seja,

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x,b) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \mid \underbrace{y = b}_{\text{equação da reta}}\}.$$

O gráfico da função constante está ilustrado na Figura 1.7.

[4]É um caso particular de função linear na qual $a = 1$.

[5]É um caso particular da função afim na qual $a = 0$.

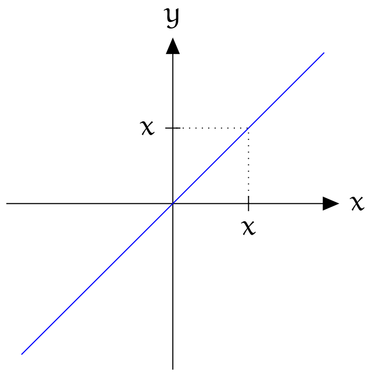


Figura 1.6 Gráfico da função identidade $y = x$.

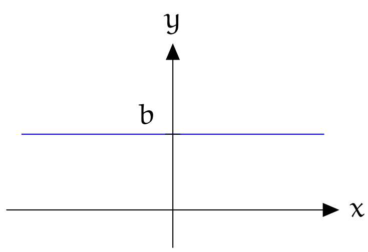


Figura 1.7 Gráfico da função constante $y = b$.

Exemplo 1.14: a função *de* 2^o *grau* (ou função *quadrática*). Uma função quadrática é da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Esta associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número real $ax^2 + bx + c$ no qual a, b, c são números reais fixos e $a \neq 0$. É fácil ver que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Mas não é tão óbvio que:

- se $a > 0$, então, $\mathrm{Im}(f) = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty[$;
- se $a < 0$, então, $\mathrm{Im}(f) = [-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$,

nos quais $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante de uma equação do 2^o grau. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y e passando pelo vértice da parábola que é dado por $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

Exemplo 1.15: a função *polinomial*. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,$$

na qual $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais fixos e $a_n \neq 0$, chama-se *função polinomial de grau* n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. O gráfico de uma função polinomial está ilustrado na Figura 1.9.

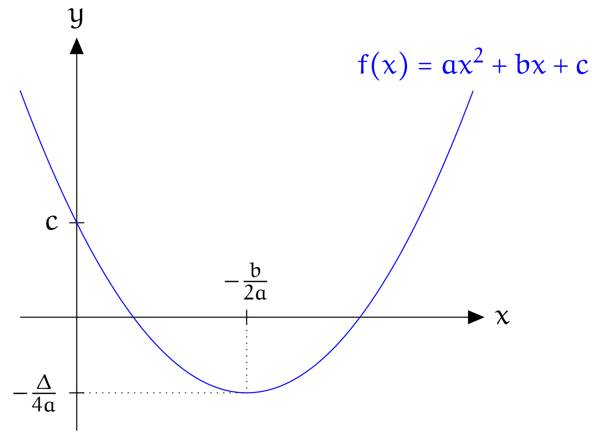


Figura 1.8 Gráfico da função quadrática.

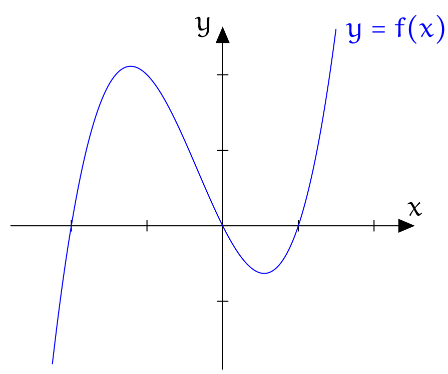


Figura 1.9 Gráfico de uma função polinomial de grau 3.

Exemplo 1.16:

a) $f_1(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ define uma função polinomial de grau 0;

b) $f_2(x) = -\frac{13}{99}x - \pi$ define uma função polinomial de grau 1;

c) $f_3(x) = x(-x+5)$ define uma função polinomial de grau 2;

d) $f_4(x) = (0,6)x^3 - 2$ define uma função polinomial de grau 3;

e) $f_5(x) = 4x^7 - 2x$ define uma função polinomial de grau 7.

Definição 1.9 (função racional): Uma *função racional* é dada por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

no qual p, q são duas funções polinomiais. O domínio de f é

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}.$$

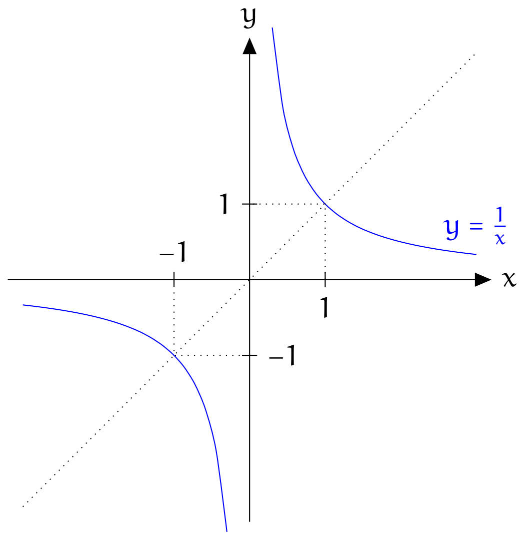


Figura 1.10 Gráfico da função racional $y = \frac{1}{x}$.

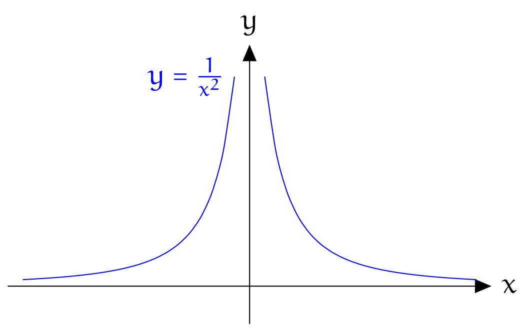


Figura 1.11 Gráfico da função racional $y = \frac{1}{x^2}$.

Exemplo 1.17: exemplos de funções racionais.

a) Qualquer função polinomial é uma função racional.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ define uma função racional cujo gráfico, ilustrado na Figura 1.10, é uma hipérbole equilátera e tem $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) $g(x) = \frac{(x^2+2x)(x^2-1)}{(x^2-x)(x+2)}$ define uma função racional com $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$. O gráfico de g coincide com o gráfico da reta dada pela equação $y = x + 1$ menos os pontos $(-2, -1)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$.

d) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ define a função cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.11.

e) $s(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$ define a função racional cujo domínio é $\mathrm{Dom}(s) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ e cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.12. Esse exemplo mostra que gráficos de funções racionais podem ser bastante complicados.

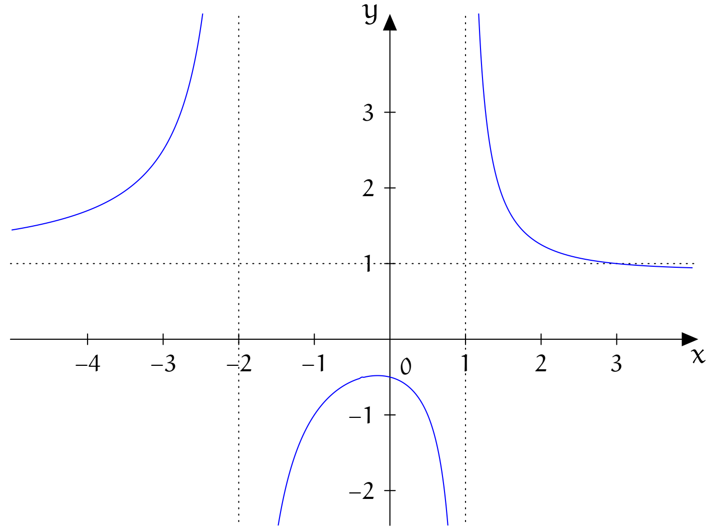


Figura 1.12 Gráfico da função racional $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+x-2}$

1.2.3 Operações com funções

Sejam f e g duas funções tais que $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \neq \varnothing$, temos:

Definição 1.10 (função soma): $f+g$ é dada por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g).$$

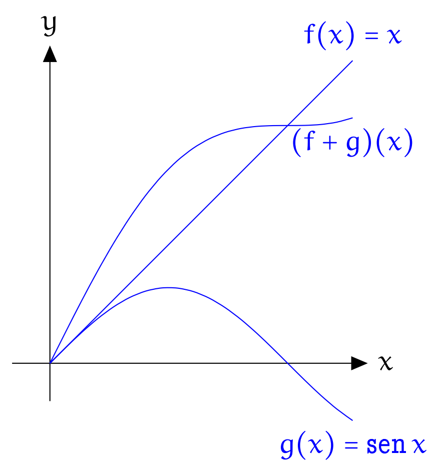


Figura 1.13 Gráfico da função soma.

Definição 1.11 (função diferença): $f-g$ é dada por

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

para todo $x \in \mathrm{Dom}(f-g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

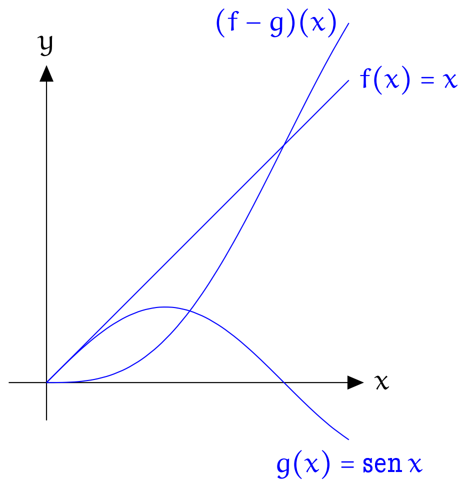


Figura 1.14 Gráfico da função diferença.

Definição 1.12 (função produto): $f \cdot g$ é dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

para todo $x \in \operatorname{Dom}(f \cdot g) = \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$.

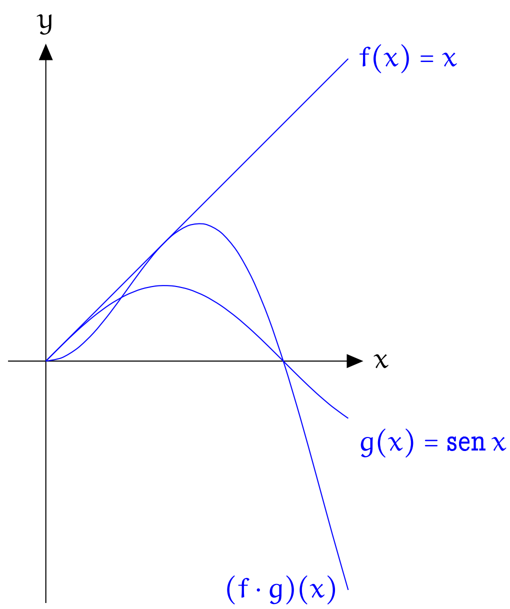


Figura 1.15 Gráfico da função produto.

Definição 1.13 (função quociente): $\frac{f}{g}$ é dada por

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{para todo } x \in \operatorname{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g) | g(x) \neq 0\}.$$

Um exemplo de função quociente está ilustrado na Figura 1.16.

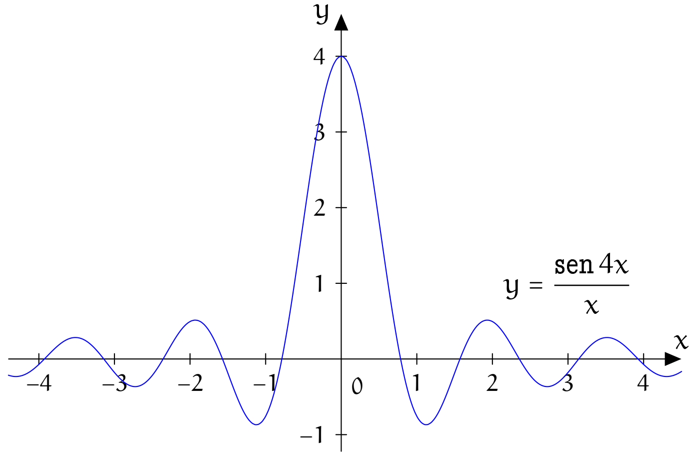


Figura 1.16 Gráfico da função quociente da função $y = \operatorname{sen} 4x$ pela função $y = x$.

Exemplo 1.18: sejam $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-2}$. Então,

a) $\mathrm{Dom}(f) = [-2, +\infty[$ e $\mathrm{Dom}(g) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$, pois f só é definida se $x+2 \geq 0$ ou seja, $x \geq -2$. Analogamente, g é definida para os x tais que $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \geq 0$, ou seja $(x \geq \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{2})$ ou $(x \leq \sqrt{2}$ e $x \leq -\sqrt{2})$, daqui obtemos $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$.

b) $(f \pm g)(x) = \sqrt{x+2} \pm \sqrt{x^2-2}$.

c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2-2}$.

d) $\mathrm{Dom}(f \pm g) = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[= \mathrm{Dom}(f \cdot g)$.

e) $\frac{f}{g}(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2}}$ e $\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[- \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

Definição 1.14 (função composta): a *função composta* $g \circ f$. Sejam f e g duas funções tais que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$. A *função composta* de g com f é a função que associa cada número real $x \in \mathrm{Dom}(f)$ a um único número real $(g \circ f)(x)$ definido por $(g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$. Isto é,

$$\underbrace{x}_{\in \mathrm{Dom}(f)} \mapsto \underbrace{f(x)}_{\in \underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{\subset \mathrm{Dom}(g)}} \mapsto \underbrace{(g \circ f)(x)}_{\text{notação}} = \underbrace{g(f(x))}_{\in \mathbb{R}}.$$

Observações 1.3: de acordo com a Definição 1.14, temos que

1. $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g \circ f)$;
2. Em geral, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ se $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Exemplo 1.19: determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ para

$$f(x) = \sqrt{x} \ \text{ e } \ g(x) = x^2.$$

Solução: Faremos isso em etapas:

- $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty[$;
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, com $x \in \mathbb{R}$;
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, com $x \geq 0$;
- Assim, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ se $x > 0$. Mas, em geral, este tipo de comutatividade não vale, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.20: determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ para

$$f(x) = -2x + 1 \text{ e } g(x) = x^2 + 3x.$$

Solução:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -2g(x) + 1 = -2(x^2 + 3x) + 1 = -2x^2 - 6x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 3f(x) = (-2x + 1)^2 + 3(-2x + 1) = 4x^2 - 10x + 4$, com $x \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} = \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g \circ f)$.
- Como os gráficos de ambas as funções representam duas parábolas, uma é concava para cima e outra é concava para baixo, por conta dos sinais dos coeficiente -2 e 4 que acompanham x^2. Portanto, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$.

UNIDADE 2

Limite e continuidade

2.1 Introdução intuitiva de limite e continuidade

Nesta seção, faremos uma exploração intuitiva do conceito de limite e continuidade e de suas propriedades através de exemplos e interpretações gráficas. Como a definição formal de limite e continuidade é matematicamente sofisticada, requer horas de estudo para ser entendida, deixaremos seu estudo como exercício de pesquisa individual para o leitor. Portanto, passamos aos primeiros exemplos de limites intuitivos.

Exemplo 2.1 (limite de uma função linear): Considere a função linear

$$f(x) = 2x + 3.$$

Quando x assume uma infinidade de valores, aproximando-se mais e mais do ponto 0, temos que a imagem $2x+3$ assume uma infinidade de valores, aproximando-se de $2 \cdot 0 + 3 = 3$.

Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0, é igual a 3, e escrevemos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(2x + 3) = 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Definição 2.1 (intuitiva de limite): seja f uma função real definida em uma reunião de intervalos e x_0 um ponto no interior ou no extremo de um desses intervalos. Os matemáticos dizem que:

$$\boxed{\text{o limite de } f(x)\text{, quando } x \text{ tende a } x_0\text{, é igual a } L}$$

que, simbolicamente, se escreve

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

no qual $L \in \mathbb{R}$. Isto significa que quando os números reais x tendem ao número real x_0, as imagens $f(x)$ tendem ao número real L, ou seja, quando podemos fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, tomando x suficientemente próximo de x_0, mantendo $x \neq x_0$.

Observações 2.1:

1. Na Definição 2.1 o ponto x_0 pode não estar no $\mathrm{Dom}(f)$.

2. No Exemplo 2.1, fizemos $f(x)$ próximo de 3 o quanto quisemos, bastando tomar x bem próximo de 0.

Exemplo 2.2:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$, $\quad (x_0 \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ constante fixa).

2. $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $\quad (n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R})$.

3. Sendo $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial, na qual $a_n, \ldots, a_1, a_0$ são todos números reais, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} p(x) &= \lim_{x\to x_0} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) \\
&= \underbrace{\lim_{x\to x_0} a_n x^n}_{\underbrace{a_n \lim\limits_{x\to x_0} x^n}_{a_n x_0^n}} + \cdots + \underbrace{\lim_{x\to x_0} a_1 x}_{\underbrace{a_1 \lim\limits_{x\to x_0} x}_{a_1 x_0}} + \underbrace{\lim_{x\to x_0} a_0}_{a_0}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Isso nos diz que o limite de uma função polinomial quando x tende a x_0 coincide com o valor da função em x_0. Sendo assim, para calcular esse tipo de limite, basta calcular $p(x_0)$.

Definição 2.2 (função contínua): nos exemplos anteriores de limites quando x tende a x_0, observe que x_0 está sempre no domínio de f e que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Quando isto ocorre, em geral dizemos que f é *contínua* no ponto x_0. Uma função é contínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Observação 2.2: intuitivamente uma função f é contínua em um ponto x_0 de seu domínio, se o gráfico de f não apresenta "saltos" em x_0. Caso o leitor tenha dúvidas sobre função contínua pode consultar, por exemplo, o texto (5, Cap. 3).

Exemplo 2.3:

a) As funções constantes, lineares, afins, quadráticas, cúbicas, polinomiais são exemplos de funções contínuas, isto é, em cada ponto dos domínios as funções são contínuas. Em geral, podemos mostrar que uma função racional é contínua.

   Solução: consideremos as funções polinomiais de grau n e m dadas por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

nas quais $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ e $b_m, b_{m-1}, ..., b_1, b_0$ são números reais e a_n e b_m são distintos de zero.

Vamos verificar que a função racional $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ é contínua no ponto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, em cujo caso está claro que $q(x_0) \neq 0$. De fato,

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} p(x)}{\lim_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = r(x_0).$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0}{b_m x_0^m + \cdots + b_1 x_0 + b_0} \in \mathbb{R}.$$

b) A função valor absoluto é contínua, pois

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| = \begin{cases} x_0 & \text{se } x_0 \geq 0; \\ -x_0 & \text{se } x_0 < 0. \end{cases}$$

c) A função raiz quadrada de um número real não negativo é contínua. De fato, podemos mostrar que vale

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}, \qquad \forall x_0 \geq 0.$$

d) A função exponencial da forma

$$h(x) = a^x \quad \text{com } a > 0,$$

a função logarítmica da forma

$$l(x) = \log_a x \quad \text{com } a > 0,$$

e as funções trigonométricas clássicas $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$ são todas funções contínuas, pois podemos mostrar que valem:

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0, \qquad \forall x_0 \in]0, +\infty[,$$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0, \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

As funções exponencial, $h(x) = a^x$, e logarítmica, $l(x) = \log_a x$, estão ilustradas nas Figuras 2.1 e 2.2 respectivamente.

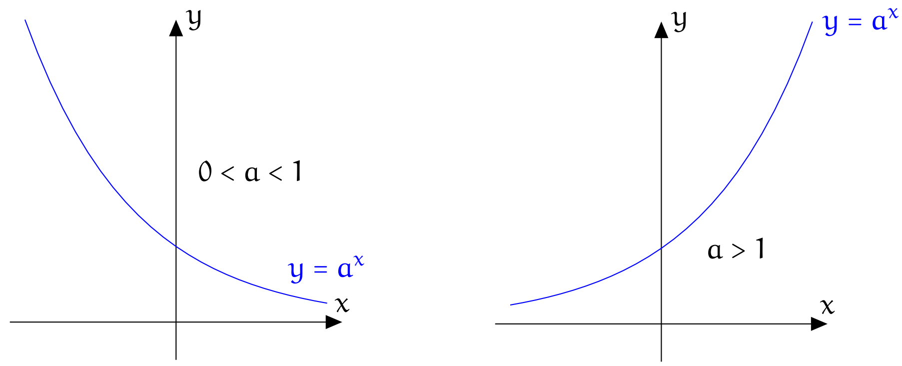


Figura 2.1 Gráfico da função exponencial $y = a^x$ quando $0 < a < 1$ e quando $a > 1$.

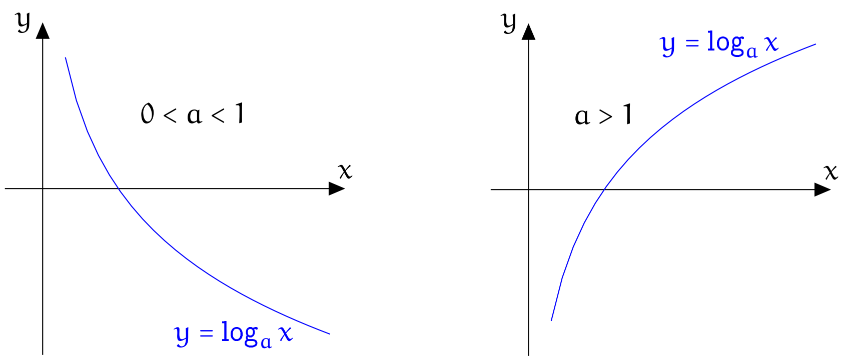


Figura 2.2 Gráfico da função logaritmo $y = \log_a x$ quando $0 < a < 1$ e quando $a > 1$.

Problema 2.1: use o programa GeoGebra para fazer o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln x & \text{se } x > 1; \\ x & \text{se } x \leq 1, \end{cases}$$

e veja que f é contínua em $x = 1$, pois de forma intuitiva vemos que f não tem saltos em qualquer intervalo contendo $x = 1$ no seu interior.

Para isso, digite `f(x)=If[x>1,1+ln(x),x]` na caixa de entrada do GeoGebra e pressione a tecla "Enter".

Observação 2.3: mais adiante nesta unidade (veja o Corolário 2.1) daremos uma caracterização da continuidade de uma função usando limites laterais. Esse critério será muito útil nos casos em que o cálculo dos limites laterais é simples e ajudará sobretudo nas provas escritas.

Exemplo 2.4: calcular o limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

usando simplificação.

Solução: tomando $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$, use o GeoGebra para fazer um esboço do gráfico observando que $2 \notin \mathrm{Dom}(f)$. Para isso, digite

```
f(x)=(x^3-8)/(x-2)
```

na caixa de entrada do GeoGebra. Quando x se aproxima de 2, x^3 se aproxima de 8. Como $(2)^3 - 8 = 0$ e $(2) - 2 = 0$, obtemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(2)^3-8}{(2)-2} = 0/0.$$

Este resultado, $0/0$, é muito comum no cálculo de limites e não tem significado como valor de um limite. A expressão $0/0$ é um símbolo de indeterminação ocorrendo em uma tentativa de cálculo de um limite. A ocorrência desta expressão significa que *o limite ainda não foi calculado*. Para evitar o símbolo de indeterminação $0/0$, neste exemplo calculamos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} \\
&= \lim_{x\to 2} (x^2+2x+4) \\
&= 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5: calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$, usando mudança de variável.

Solução: um cálculo direto dá uma *indeterminação*, ou seja,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt[3]{0+1}-1}{0} = 0/0, \tag{2.1}$$

lembrando que o limite ainda não foi calculado. Para calcular tal limite, faça a mudança de variável $y = \sqrt[3]{x+1}$, e eleve ao cubo esta igualdade, obtendo $y^3 = x+1$. Em seguida, considere $x = y^3 - 1$.

Quando x tende a 0, y tende a 1 (em símbolos: se $x \to 0$, então, $y \to 1$). Então, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} &= \lim_{y\to 1} \frac{\cancel{(y-1)}}{(y^2+y+1)\cancel{(y-1)}} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{1^2+1+1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2.2 Propriedades dos limites e funções contínuas

Vamos admitir sem demonstração as propriedades fundamentais dos limites abaixo relacionadas.

Proposição 2.1: se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$ e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, então, valem:

i) $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = L_1 + L_2 = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
(o limite de uma soma é igual à soma dos limites das parcelas);

ii) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = cL_1 = c\lim_{x\to x_0} f(x)$
(o limite do múltiplo é igual ao múltiplo do limite);

iii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2 = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$
(o limite do produto é igual ao produto dos limites);

iv) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$
(o limite do quociente é igual ao quociente dos limites, se $L_2 \neq 0$).

É importante observar que somente podemos garantir que estas propriedades sejam válidas quando os limites das parcelas existirem e forem finitos.

Exemplo 2.6: calcular o $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-3}{x^2+1}$.

Solução: usando as propriedades fundamentais dos limites, temos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^3-3)}{\lim_{x\to 2}(x^2+1)} = \frac{\lim_{x\to 2}x^3 - \lim_{x\to 2}3}{\lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}1} = \frac{2^3-3}{2^2+1} = 1.$$

Exemplo 2.7: a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1; \\ 3 & \text{se } x = 1, \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$.

Solução: observe primeiro que para $x \neq 1$ temos que

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = x+1.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1 = 1+1 = 2 \neq 3 = f(1).$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1).$$

Portanto, podemos concluir que f não é contínua em $x = 1$.

Teorema 2.1: sejam f e g duas funções. Então valem as seguintes afirmações:

i) Se f e g são tais que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, (a imagem de f é um subconjunto do domínio de g), $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e g é contínua em $L \in \mathbb{R}$, então, podemos calcular o limite da função composta $g \circ f$, quando $x \to x_0$, da seguinte forma:

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to x_0}(g(f(x)) = g(\underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{L}) = g(L).$$

ii) Se $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f é contínua em x_0 e g é contínua em $f(x_0)$, então, a função composta $g \circ f$ é contínua em x_0.

Pelo item anterior, temos que

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = (g(f(x_0))) = (g \circ f)(x_0).$$

Observação 2.4: no item (i) do Teorema 2.1 pode acontecer o seguinte:

Se $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ e g não é contínua em L ainda que $L \in \mathrm{Dom}(g)$, pode ser que

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) \neq g(\lim_{x \to x_0} f(x)).$$

De fato, basta considerar a função identidade $f(x) = x$ e a função descontínua em $x = 1$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1; \\ 3 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

Então, para $x_0 = 1$ um cálculo simples diz que

$$\lim_{x \to 1} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

enquanto

$$g(\underbrace{\lim_{x \to 1} f(x)}_{1}) = g(1) = 3,$$

logo, $\lim_{x \to 1} (g \circ f)(x) \neq g(\lim_{x \to 1} f(x))$.

2.2.1 Problemas

Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$

(c) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$ (d) $\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{2}} (x^2 + 3)(x - 4)$

(e) $\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{2}} 15$ (f) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$

(g) $\displaystyle\lim_{s \to 4} \frac{6s - 1}{2s - 9}$ (h) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

Respostas: (a) 4 (b) $1/9$ (c) $3x^2$ (d) $5\sqrt{2} - 20$ (e) 15 (f) $-3/8$ (g) -23 (h) 2

2.3 Teorema do confronto

Nesta seção enunciamos o teorema do confronto e damos aplicações dele no cálculo de importantes limites especiais envolvendo funções trigonométricas.

Teorema 2.2 (teorema do confronto): sejam dadas três funções f, g, h satisfazendo as duas propriedades abaixo:

i) existe $r > 0$ tal que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \text{para todo } \ 0 < |x - x_0| < r;$$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$.

Então, podemos concluir que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Observação 2.5: as funções seno e cosseno podem ser introduzidas como as únicas funções definidas em $\mathbb{R}$, indicadas por sen e $\cos$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \cos 0 = 1.$

2. Quaisquer que sejam os números reais a e b

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a,$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

3. Existe $r > 0$ tal que

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \text{para } 0 < x < r.$$

Exemplo 2.8: cálculo do limite especial

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Este é chamado *primeiro limite fundamental*.

Solução: pela Observação anterior, $\exists r > 0$ tal que para $0 < x < r$, vale $0 < \operatorname{sen} x$ e

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Multiplicando esta desigualdade por $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ (que é positivo), obtemos

$$1 = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Invertendo as frações, chegamos à desigualdade

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x. \tag{2.2}$$

Analogamente, para $-r < x < 0$, obtemos a mesma desigualdades (2.2), pois

$$\cos(-x) = \cos x$$

e

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Portanto, para $0 < |x| < r$, vale

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Logo, pelo teorema do confronto, obtemos

$$\boxed{1 = \lim_{x\to 0} \cos x \leq \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \lim_{x\to 0} 1 = 1}$$

Exemplo 2.9: calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Solução: para calcular este limite, podemos utilizar o primeiro limite fundamental. Primeiro, observamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \tag{2.3}$$

Usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ em (2.3), obtemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \\
= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} &= \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}}_{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

2.3.1 Problemas

Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes questões:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$

2.4 Limites infinitos e limites no infinito

2.4.1 Interpretação dos limites infinitos

O caso mais simples e instrutivo de limite no infinito talvez seja o da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, para a qual valem as seguintes afirmações:

- f é contínua em todo os pontos $x_0 \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. De fato,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} 1}{\lim\limits_{x\to x_0} x^2} = \frac{1}{x_0^2} = f(x_0).$$

- f é uma função *par*. De fato, $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = f(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}(f).$

Tabela 2.1 Estudo do limite de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ quando x tende a 0.

x	x^2	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
± 1	1	1
$\pm 0,5$	$0,25$	4
$\pm 0,2$	$0,04$	25
$\pm 0,1$	$0,01$	100
$\pm 0,01$	$0,0001$	10000
$\pm 0,001$	$0,000001$	1000000

Na Tabela 2.1, os valores de x na primeira coluna são cada vez mais próximos de 0. Na segunda coluna, os valores correspondentes de x^2 são ainda mais próximos de zero. Na última coluna, os valores correspondentes de $f(x)$ tornam-se cada vez maiores. Neste caso, podemos fazer $f(x)$ ultrapassar qualquer número positivo, tomando x suficientemente próximo de 0. Assim, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0 é "$+$ *infinito*", e escrevemos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty,$$

ou seja,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.}$$

Observação 2.6: a interpretação geométrica de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ pode ser feita com o auxílio do GeoGebra. Usando esse programa podemos fazer um esboço do gráfico da curva $y = \frac{1}{x^2}$ e manipular os pontos desse gráfico de forma dinâmica, com o intuito de visualizar que à medida em que x se aproxima de 0, $y = f(x)$ torna-se cada vez maior. Para isso, digite na caixa de entrada do GeoGebra a função da escrita da forma `1/x^2` e pressione a tecla "Enter". Automaticamente, a curva será construída e exibida na lousa do GeoGebra.

2.4.2 Limites no infinito

São dois os casos de limites no infinito: limites finitos no infinito e limites infinitos no infinito.

A noção intuitiva de *limite finito no infinito* é a seguinte: se os valores de $f(x)$ tornam-se arbitrariamente próximos de um número L quando tomamos x suficientemente grande e positivo, então dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ e escrevemos

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L}$$

Analogamente, quando $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de um número L quando tomamos x arbitrariamente grande e negativo, dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$ e escrevemos

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L}$$

Vamos estudar a noção intuitiva dos limites quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$ por meio da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Alguns valores dessa função se encontram na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 Estudo do limite de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ quando x tende a $+\infty$.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1	1
2	4	0,25
5	25	0,04
10	100	0,01
100	10000	0,0001
1000	1000000	0,000001

Na Tabela 2.2, observamos que à medida que x cresce indefinidamente, assumindo valores positivos cada vez maiores, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ torna-se cada vez mais próximo de 0. Isto também é sugerido pelo gráfico da função (veja a Figura 1.11). Neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a "$+$ *infinito*", é igual a 0, e escrevemos

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.}$$

Observação 2.7: a interpretação geométrica do $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, ou seja, à medida que x cresce, tomando valores cada vez maiores, $f(x)$ aproxima-se de 0, é a de que o gráfico de de $\dfrac{1}{x^2}$ se aproxima do eixo x. O mesmo vale para $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Isso pode ser observado na Figura 1.11.

A partir da Tabela 2.2, também podemos facilmente inferir que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

De fato, a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ é par e, portanto, seu gráfico é simétrico em relação à origem.

Uma análise semelhante a essa pode ser feita para a função $\dfrac{1}{x}$, cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.10. Construindo tabelas semelhantes às que foram construídas acima, podemos inferir os seguintes limites no infinito:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

No entanto, é importante observar que não existe o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$, pois os valores da função tornam-se arbitrariamente positivos e arbitrariamente negativos quando x está próximo de zero, bastando mudar a direção da aproximação. Mais adiante, essa dificuldade será resolvida por meio do conceito de limite lateral.

Uma maneira conveniente de expressar o fato de que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ é escrever $\frac{1}{+\infty} = 0$. Recursos de memorização como este serão de grande valia ao realizarmos cálculos com limites, por isso iniciaremos a construção de uma "álgebra de limites infinitos". Nessa álgebra, valem as identidades

$$\boxed{\frac{1}{-\infty} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{+\infty} = 0}$$

Na prática, usamos a álgebra de limites deste modo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Ao longo deste estudo ampliaremos a álgebra de limites acrescentando a ela novos casos e um resumo contendo todos os casos será apresentado mais adiante.

Tomando o produto da função $\dfrac{1}{x}$ com ela mesma e aplicando a propriedade do limite do produto (Proposição 2.1(iii)), obtemos

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0}$$

para todo natural $n \geq 1$. Combinando estas com a propriedade do limite do múltiplo (Proposição 2.1(ii)), para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, valem

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^n} = 0}$$

Usaremos essa observação mais abaixo para calcular limites no infinito para funções racionais. Com isto, tornamos mais abrangente a nossa álgebra de limites infinitos sintetizando tudo o que vimos acima em uma única identidade identidade:

$$\boxed{\frac{c}{(\pm\infty)^n} = 0}$$

para toda constante $c \in \mathbb{R}$ e todo natural $n \geq 1$.

Resta ainda o caso dos limites infinitos no infinito. A noção intuitiva de *limite infinito no infinito* é esta: se os valores de $f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos quando x torna-se suficientemente grande e positivo, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ é igual a $+\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Deixamos a cargo do leitor estender esta definição aos seguintes casos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemplo 2.10: casos fundamentais de limites infinitos no infinito.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, pois os valores da função $f(x) = x$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos, bastando tomar x suficientemente grande e positivo.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, pois os valores da função $f(x) = x$ tornam-se arbitrariamente grandes e negativos, bastando tomar x suficientemente grande e negativo.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$, pois os valores da função $f(x) = -x$ tornam-se arbitrariamente grandes e negativos, bastando tomar x suficientemente grande e positivo.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$, pois os valores da função $f(x) = -x$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos, bastando tomar x suficientemente grande e negativo.

e) Para todo $n \geq 1$ natural, temos $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, pois os valores da função $f(x) = x^n$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos (observe que nesse caso vale $1 < x < x^n$), bastando tomar x suficientemente grande e positivo.

   Isto nos permite acrescentar este fato à álgebra de limites infinitos:

$$(+\infty)^{\text{(inteiro positivo)}} = +\infty.$$

f) Para todo $n > 1$ natural e par, temos $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$, pois os valores da função $f(x) = x^n$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos, bastando tomar x suficientemente grande e negativo.

   Acrescentamos este fato à álgebra de limites infinitos:

$$(-\infty)^{\text{(inteiro positivo par)}} = +\infty.$$

g) Para todo $n \geq 1$ natural e ímpar, temos $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$, pois os valores da função $f(x) = x^n$ tornam-se arbitrariamente grandes e negativos, bastando tomar x suficientemente grande e negativo.

Acrescentamos este fato à álgebra de limites infinitos:

$$(-\infty)^{\text{(inteiro positivo ímpar)}} = -\infty.$$

h) Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então, os valores de $f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes e negativos e os de $g(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos bastando tomar x suficientemente grande e positivo. Mas, nesse caso, os valores de $f(x)g(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes e negativos, logo $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)g(x)] = -\infty$.

Acrescentamos mais este fato à álgebra de limites infinitos:

$$(-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

2.4.3 Álgebra de limites infinitos

A seguir, vamos expandir a álgebra de limites infinitos. Para começar, observamos que se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, então, os valores da função $f(x) = x$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos, bastando tomarmos x suficientemente grande e positivo. Mas, nesse caso, sendo $c \in \mathbb{R}$ uma constante positiva, os valores de $cf(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos, logo $\lim\limits_{x \to +\infty} [cf(x)] = +\infty$. Por outro lado se c for uma constante negativa, então, os valores de $cf(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes e negativos, logo $\lim\limits_{x \to +\infty} [cf(x)] = -\infty$. Com isso, podemos acrescentar um novo fato à nossa álgebra de limites infinitos:

$$c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0; \\ -\infty & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Deixamos para o leitor a tarefa de deduzir o fato seguinte e acrescentá-lo à álgebra de limites:

$$c \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0; \\ -\infty & \text{se } c > 0. \end{cases}$$

Observação 2.8: não estamos definindo o caso $0 \cdot (\pm\infty)$. Mais adiante, por meio de exemplos ficará claro que isso não é possível. Esse símbolo será um símbolo de indeterminação, e seu significado será o de que o limite ainda não foi calculado.

Substituindo nesses dois casos a constante $c \neq 0$ pela constante $\frac{1}{c}$, obtemos estes:

$$\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0; \\ -\infty & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

e

$$\frac{-\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0; \\ -\infty & \text{se } c > 0. \end{cases}$$

Agora, sendo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, então os valores de $f(x)$ e $g(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos, bastando tomarmos x suficientemente grande e positivo. Desse modo, $f(x)+g(x)$ torna-se arbitrariamente grande e positivo, logo

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Isso nos permite acrescentar mais um fato à álgebra de limites:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

Uma vez mais, deixamos a cargo do leitor deduzir e acrescentar à álgebra de limites este fato:

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty).$$

Observação 2.9: é importante observar que não estamos definindo $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$ ou $(-\infty) - (-\infty)$ pois, como ficará claro por meio de exemplos a serem estudados mais adiante, isso não é possível. Esses símbolos permanecerão como *símbolos de indeterminação* e quando o leitor encontrá-los nos cálculos o significado será o de que o limite ainda não foi calculado.

Mais uma vez, supondo que $c \in \mathbb{R}$ seja uma constante arbitrária e que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, então, os valores de $f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos, bastando tomarmos x suficientemente grande e positivo. Desse modo os valores de $f(x) + c$ tornam-se arbitrariamente grandes e positivos, logo

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + c] = +\infty.$$

Desse modo, podemos acrescentar este caso à álgebra de limites:

$$+\infty + c = +\infty \text{ (}c \in \mathbb{R} \text{ constante).}$$

Fica a cargo do leitor deduzir este:

$$-\infty + c = -\infty \text{ (}c \in \mathbb{R} \text{ constante).}$$

Em resumo, a nossa álgebra de limites infinitos pode ser sintetizada neste quadro:

$$\frac{c}{(\pm\infty)^n} = 0, \quad (c \text{ constante }, n \text{ inteiro positivo})$$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty,$	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty,$
$(+\infty)^{(\text{inteiro positvo})} = +\infty,$	$(+\infty)(-\infty) = -\infty,$
$(-\infty)^{(\text{inteiro positivo par})} = +\infty,$	$(-\infty)^{(\text{inteiro positivo ímpar})} = -\infty,$
$+\infty + c = +\infty$ (c constante),	$-\infty + c = -\infty$ (c constante).
$c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0; \\ -\infty & \text{se } c < 0, \end{cases}$	$c \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0; \\ -\infty & \text{se } c > 0, \end{cases}$
$\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0; \\ -\infty & \text{se } c < 0, \end{cases}$	$\frac{-\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0; \\ -\infty & \text{se } c > 0. \end{cases}$

Ao deduzirmos a álgebra de limites, nos deparamos com alguns *símbolos de indeterminação*. Convém organizar todos os símbolos encontrados em uma só caixa:

$\frac{0}{0},$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},$
$(+\infty) + (-\infty),$	$(+\infty) - (+\infty),$
$(-\infty) + (+\infty),$	$(-\infty) - (-\infty),$
$0 \cdot (\pm\infty),$	$\ldots$

Exemplo 2.11: calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$.

Solução: uma substituição direta usando a álgebra de limites infinitos nos dá

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) &= 3 + \frac{2}{+\infty} - \frac{5}{(+\infty)^2} + \frac{1}{(+\infty)^3} \\ &= 3 + \cancelto{0}{\frac{2}{+\infty}} - \cancelto{0}{\frac{5}{+\infty}} + \cancelto{0}{\frac{1}{+\infty}} = 3. \end{aligned}$$

Não encontramos nenhum símbolo de indeterminação, logo, o cálculo do limite está terminado e seu valor é 3.

Exemplo 2.12: calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$.

Solução: uma substituição direta nos dá

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} &= \frac{3(+\infty)^2 - 2(+\infty) - 1}{(+\infty)^3 + 4} \\ &= \frac{(+\infty) - (+\infty) - 1}{+\infty + 4} = \frac{(+\infty) - (+\infty)}{+\infty}. \end{aligned}$$

Para evitarmos os símbolos de indeterminação, fazemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^3+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{3-\cancelto{0}{\frac{2}{+\infty}}-\cancelto{0}{\frac{1}{+\infty}}}{(+\infty)\left(1+\cancelto{0}{\frac{4}{+\infty}}\right)} = \frac{3}{+\infty} = 0.$$

Exemplo 2.13: no cálculo de limites de funções racionais da forma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais de grau n e m na variável x, é tentador proceder como no Exemplo 2.3(a), mas rapidamente obtemos uma indefinição da forma $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Para evitar os símbolos de indefinição, podemos notar que, quando x for arbitrariamente grande, os termos de maior grau "dominam" os de menor grau em cada polinômio, por isso prevalecem apenas os termos de maior grau, ou seja, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

e

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

nos quais $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n\left(a_n + \cancelto{0}{\frac{a_{n-1}}{x}} + \cdots + \cancelto{0}{\frac{a_1}{x^{n-1}}} + \cancelto{0}{\frac{a_0}{x^n}}\right)}{x^m\left(b_m + \cancelto{0}{\frac{b_{m-1}}{x}} + \cdots + \cancelto{0}{\frac{b_1}{x^{m-1}}} + \cancelto{0}{\frac{b_0}{x^m}}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.
\end{aligned}$$

Portanto, dependendo dos valores de n e m e dos sinais de a_n e b_m, a partir da álgebra de limites infinitos concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > n \geq 0; \\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{se } m = n; \\ +\infty & \text{se } a_n > 0 \text{ e } 0 \leq m < n; \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \text{ e } 0 \leq m < n, \end{cases}$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}=\begin{cases}0 & \text{se } m>n\geq 0;\\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{se } m=n;\\ -\infty & \text{se } a_n>0 \text{ e } 0\leq m<n;\\ +\infty & \text{se } a_n<0 \text{ e } 0\leq m<n.\end{cases}$$

Em particular, quando $q(x) = 1$, temos $m = 0$ e $b_0 =$, logo,

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n,$$

e este limite será igual a $+\infty$ ou $-\infty$ dependendo do sinal de a_n.

Observação 2.10: no exemplo anterior, bastava manter os termos de maior grau no numerador e no denominador:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{+\infty}=0,$$

para calcular o limite. Mas atenção, este cálculo só vale para limites de funções racionais, nas quais $x \to \pm\infty$.

Exemplo 2.14: calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-x^3)$.

Solução: uma substituição direta nos dá

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^3)=(-\infty)^5-(-\infty)^3=(-\infty)-(-\infty)=(-\infty)+(+\infty),$$

portanto, chegamos a um símbolo de indeterminação.

No entanto, fazendo a fatoração

$$x^5-x^3=x^5\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

podemos calcular facilmente o limite

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=(-\infty)\cdot\left(1-\frac{1}{-\infty}\right)=(-\infty)\cdot 1=-\infty.$$

2.4.4 Problemas

Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x-5}$, (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+3)^3(2-3x)^2}{x^5+5}$,

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$, (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)$

Respostas: (a) 2 (b) 0 (c) 0 (d) 72 (e) 0 (f) $a/2$

2.5 Limites laterais

Quando estudamos a função $f(x) = \frac{1}{x}$ nos deparamos com o fato de que o limite quando x tende a 0 não existe, pois, quando nos aproximamos do zero os valores dessa função assumem valores arbitrariamente grandes e positivos ou arbitrariamente grandes e negativos, dependendo da direção escolhida para a aproximação (veja a Figura 1.10).

Há inumeras outras funções que exibem um comportamento semelhante a esse, por exemplo, a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$, cujo gráfico está ilustrado na Figura 2.3. Quando $x > 0$, vemos que $f(x) = \frac{x}{x}$ é constante e igual a 1, mas quando $x < 0$, vemos que $f(x) = \frac{-x}{x}$ é constante e igual a -1. Assim, os valores de $f(x)$ ora se aproximam de 1, ora se aproximam de -1 quando x se aproxima de zero, dependendo da direção escolhida, por isso dizemos que não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

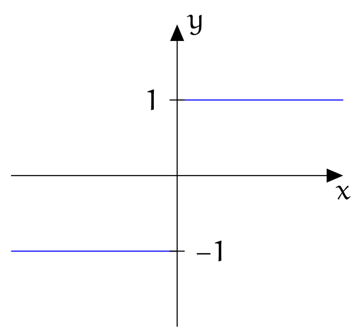


Figura 2.3 Gráfico da função $y = \frac{|x|}{x}$.

No entanto, se adotarmos exclusivamente uma das direções, desprezando completamente a outra, vemos que $f(x)$ se aproxima de um único número e parece fazer sentido definir esse número como limite (lateral).

Nesse caso, adotamos a convenção 0^+ quando a direção escolhida for pela direita e 0^- quando a direção escolhida for pela esquerda e escrevemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Exemplo 2.15: limites laterais de $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ quando $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.

- O domínio de f é $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $x > 0$, $|x| = x \;\Rightarrow\; f(x) = x + \frac{x}{x} = x + 1$.
- Se $x < 0$, $|x| = -x \;\Rightarrow\; f(x) = x + \frac{x}{-x} = x - 1$.

- O gráfico de f é a união de duas semirretas:
  $\{(x, y) \ / \ y = x + 1, \ x > 0\} \cup \{(x, y) \ / \ y = x - 1, \ x < 0\}$.

- Se x tende a 0, mantendo-se > 0, $f(x)$ tende a 1. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela direita*, é igual a 1, e denotamos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

- Se x tende a 0, mantendo-se < 0, $f(x)$ tende a -1. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela esquerda*, é igual a -1, e denotamos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

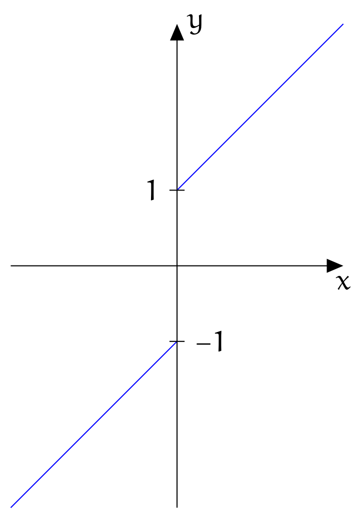


Figura 2.4 Gráfico da função $y = x + \dfrac{x}{|x|}$.

Definição 2.3: seja x_0 um número real no interior ou no extremo inferior de um intervalo contido no domínio de uma função f. O limite lateral de $f(x)$, quando x tende a x_0 pela direita, se escreve

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

O símbolo $x \to x_0^+$ indica que $x \in \mathrm{Dom}(f)$ e está aproximando-se de x_0 com valores de x maiores que x_0. Isso é o mesmo que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

Observações 2.11:

1. O limite lateral à direita pode existir ou não.

2. Quando existe $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ pode acontecer de:

$$L \in \mathbb{R} \text{ ou } L = +\infty \text{ ou } L = -\infty.$$

3. Quando não existir $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, não existirá $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Definição 2.4: seja x_0 um número real no interior ou no extremo inferior de um intervalo contido no domínio de uma função f. O limite lateral de $f(x)$, quando x tende a x_0 pela esquerda, se escreve

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

O símbolo $x \to x_0^-$ indica que $x \in \mathrm{Dom}(f)$ e está aproximando-se de x_0 com valores de x menores que x_0. Isso é o mesmo que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x).$$

Observações 2.12:

1. O limite lateral à esquerda pode existir ou não.

2. Quando existe $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ pode acontecer de:

$$L \in \mathbb{R} \text{ ou } L = +\infty \text{ ou } L = -\infty.$$

3. Quando não existir $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, não existirá $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Teorema 2.3 (caracterização de continuidade usando limites laterais): sejam f uma função, x_0 um número real e suponhamos que existam números reais a e b tais que $]a, x_0[$ e $]x_0, b[$ estejam contidos em $\mathrm{Dom}(f)$. Então

$$\text{existe } \lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \text{existem } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Por outro lado, qualquer uma das afirmações a seguir:

1. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ não existe ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ não existe;

2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$;

implicam que o $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ não existe.

Exemplo 2.16: limites laterais de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ quando $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.

- O domínio $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- 0 é extremo superior do intervalo $]-\infty, 0[\subset \mathrm{Dom}(f)$ e também é extremo inferior do intervalo $]0, +\infty[\subset \mathrm{Dom}(f)$.
- Faça um esboço do gráfico de f no GeoGebra e observe que os limites laterais
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x} = -\infty.$$
- Como os limites laterais são distintos podemos concluir que $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Observação 2.13: as propriedades de soma, diferença, produto e quociente de limites valem para os limites laterais.

Exemplo 2.17: provar que $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Solução:

- Basta verificar que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ para obter o resto das igualdades.
- Faça $z = (x-1)^2$
- Observe que $z > 0$ para qualquer valor de $x > 0$.
- Veja também que quando x se aproxima de 1, temos que z se aproxima de 0, mas por valores positivos.

  Assim,
$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{z\to 0^+} \frac{1}{z} = +\infty.$$

Exemplo 2.18: calcular $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|}$ e $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|}$.

Solução:

- Observe que $x + 2 > 0$ se e somente se $x > -2$.
- Assim, se $x > -2$, temos $x + 2 > 0$ e, então, $|x+2| = x + 2$.
- Logo, se $x < -2$, temos $x + 2 < 0$ e, então, $|x+2| = -(x+2)$.
- Portanto, temos
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} = \lim_{x\to -2} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \frac{\cancel{(x+2)}}{-\cancel{(x+2)}} = \lim_{x\to -2} -1 = -1.$$

Uma consequência importante do Teorema 2.3 é a seguinte caracterização de funções contínuas:

Corolário 2.1: seja f uma função e x_0 um ponto do seu domínio. Então, f é contínua se e somente se os limites laterais existirem e ambos forem iguais ao valor da função em x_0, isto é, se e somente se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Observação 2.14: o corolário serve obviamente para testar a continuidade de uma função em um ponto x_0 do seu domínio no caso em que o cálculo dos limites laterais é simples. Uma aplicação menos óbvia é ao próprio cálculo de limites: sabendo, talvez por outros meios, que uma função f é contínua em um ponto x_0 do seu domínio, então o corolário nos garante que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Portanto, para calcular o valor do limite no ponto x_0 basta calcular $f(x_0)$. Mas atenção: isso só vale quando se tem o conhecimento prévio a respeito da continuidade em x_0.

Exemplo 2.19:

a) Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 0, \\ \dfrac{|x|}{x^2 + x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$ é ou não contínua em $x_0 = 0$.

Solução: por um lado, temos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2^x = \lim_{x \to 0} 2^x = 1.$$

e, por outro lado, temos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x + 1} = 1.$$

Como $f(0) = 2^0 = 1$, segue pelo corolário acima que f é contínua em $x_0 = 0$. É importante observar que aqui fizemos uso do fato de 2^x e $\dfrac{1}{x+1}$ serem ambas contínuas no zero.

b) Faça o mesmo para a função $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0, \\ \cos \pi x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

Solução: temos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos \pi x = \lim_{x \to 0} \cos \pi x = \cos 0 = 1,$$

e também

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0.$$

Aqui novamente fizemos uso da continuidade das funções $\cos \pi x$ e $\sqrt{x}$. Com isso, vemos que os limites laterais de f existem em $x_0 = 0$, mas como $1 \neq 0$, eles não coincidem e, portanto, f não é contínua nesse ponto.

2.6 Problemas

1. Esboce um gráfico de uma função $y = f(x)$ que verifique:

   (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$

   (c) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ (d) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

   (e) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ (f) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$

   (g) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ (h) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

2. Calcule os limites laterais

   (a) $\lim_{x\to \pi^-} \frac{|\pi - x|}{x-\pi}$ (b) $\lim_{x\to \pi^+} \frac{|\pi - x|}{x-\pi}$ (c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+4}{2-x}$

3. Calcule $\lim_{x\to -3^+} f(x)$, $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ e diga se existe $\lim_{x\to -3} f(x)$.
   Diga também se f é contínua no ponto -3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-3x} & \text{se } x < -3; \\ \\ \sqrt[3]{x+2} & \text{se } x \geq -3. \end{cases}$$

Respostas:

1. Uma possibilidade para o gráfico de $f(x)$ está ilustrada na Figura 2.5.

2. (a) -1 (b) 1 (c) $+\infty$

3.
   - $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -1$;
   - $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \dfrac{1}{11}$;
   - Portanto, não existe o limite $\lim_{x\to -3} f(x)$;
   - Apesar de $f(-3) = -1$, como não existe $\lim_{x\to -3} f(x)$, f não é contínua no ponto -3.

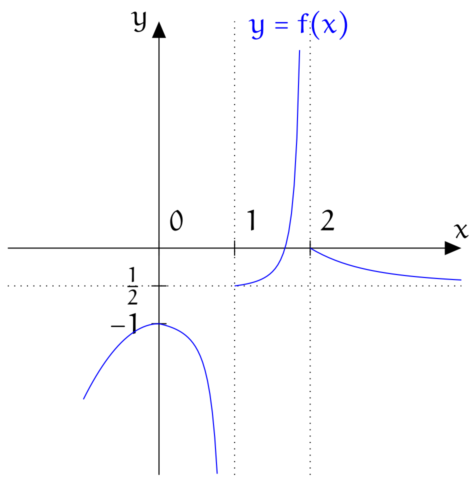


Figura 2.5 Uma possível solução para o problema 1 da seção 2.6.

UNIDADE 3

Derivadas e aplicações

3.1 Noção intuitiva de derivada

O cálculo de derivadas de funções é uma importante ferramenta auxiliar no estudo de seus gráficos. A definição formal de *derivada* é matematicamente sofisticada, já que uma função f possui derivada em x_0 se existe o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3.1}$$

No caso em que existe o limite acima dizemos que f é *derivável* em x_0.

O leitor interessado poderá encontrar tal definição nas referências ou em outros textos universitários sobre cálculo.

Portanto, aqui faremos uma exploração intuitiva do conceito de derivada e de suas propriedades, através de exemplos e interpretações gráficas.

Veremos agora uma interpretação geométrica da derivada em relação ao gráfico de uma função f.

Fixado um valor x_0, sendo definido $f(x_0)$, seja $\Delta x \neq 0$ um acréscimo (ou decréscimo) dado a x_0. Sendo $x_1 = x_0 + \Delta x$, temos que a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

é o *coeficiente angular* (ou *inclinação*, *declividade*) da reta r, secante ao gráfico da curva $y = f(x)$, passando pelos pontos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x_1, f(x_1))$.

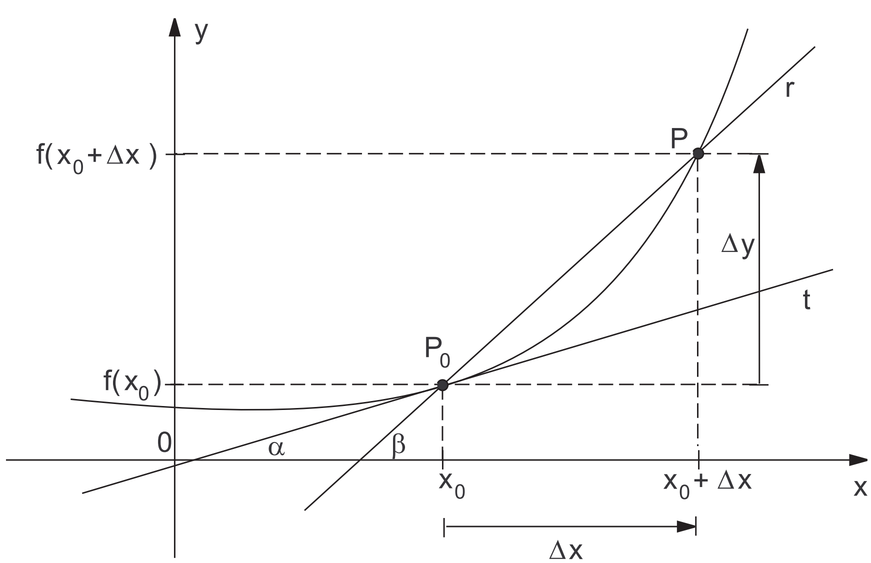


Figura 3.1 Quando Δx tende a 0, o ponto P tem como posição limite o ponto P_0 e a reta secante P_0P terá como posição limite a reta t, que tangencia o gráfico de f no ponto P_0.

Observando os elementos geométricos da Figura 3.1 vemos que quando Δx tende a 0, o ponto P tem como posição limite o ponto P_0 e a reta secante P_0P terá como posição limite a reta t, que tangencia o gráfico de f no ponto P_0. Assim, quando Δx tende a 0, a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tem como limite a declividade da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto P_0.

Assim, com este argumento geométrico e intuitivo, interpretamos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

como sendo o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Observações 3.1:

1. Para existir a derivada de uma função f num ponto x_0 é necessário que o leitor tenha em mente que a função f precisa estar definida em x_0. Ou seja,
$$\boxed{f \text{ é derivável em } x_0 \Rightarrow x_0 \in \mathrm{Dom}(f)} \tag{3.2}$$

2. Note que a recíproca da afirmação (3.2) é falsa, pois se $a \in \mathrm{Dom}(f)$, então, não significa que f seja derivável em x_0, já que o limite (3.1) pode não existir, como mostraremos na Observação 3.3.

A seguir enunciamos sem demonstração uma condição necessária para que uma função possa ser derivável.

Proposição 3.1: uma função f é derivável em x_0 se f é contínua em x_0.
Em outras palavras:

$$\boxed{f \text{ não é continua em } x_0 \Rightarrow f \text{ não é derivável em } x_0} \tag{3.3}$$

Exemplo 3.1: a função h dada por

$$h(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0; \\ x + 1, & se \quad x < 0, \end{cases}$$

está definida em todo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, mas mesmo assim h não tem derivada em $x_0 = 0$. Por quê?

Solução: esboce o gráfico da função h e observe o comportamento do gráfico de h entorno da origem. Veja que h não é contínua em 0, pois o limite de $h(x)$ quando x tende a 0 não existe e, isto implica pela Proposição 3.1 que h não é derivável em $x_0 = 0$.

Observações 3.2:

1. Se existe o limite (3.1), então existe o limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. A recíproca da afirmação (3.3) não vale em geral. Pois existem exemplos de funções contínuas que não são deriváveis em algum ponto.

Exemplo 3.2: a função "módulo de x", $g(x) = |x|$, é contínua em todo $\mathbb{R}$.

- Mesmo assim, a função $g(x) = |x|$ não tem derivada no $x_0 = 0$. Por quê?

  Solução:

  $$\boxed{\text{A função } g(x) = |x| \text{ tem um “bico” no ponto do gráfico } (0,0)}$$

  Este fato é fundamental, pois permitirá intuitivamente ver que em geral:

- uma função contínua f que tem um "bico" no ponto do gráfico $(x_0, f(x_0))$ não tem derivada em x_0.
- Para a curva $y = |x|$ existem as retas tangentes em todos os pontos da forma:

  $$\boxed{(x_0, |x_0|) \text{ com } x_0 < 0 \text{ ou } x_0 > 0}$$

  $$\boxed{\text{Mas no ponto } (0,0)\text{, a curva } y = |x| \text{ não tem reta tangente}}$$

  Este fato é também fundamental, pois permitirá concluir que:

- uma função f contínua em x_0 que não tem reta tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$ não terá derivada em x_0.

3.1.1 Caracterizações de derivada

Continuidade sem bicos equivale à derivabilidade, como é dito no seguinte resultado:

Proposição 3.2: uma função f admite derivada num ponto x_0 do seu domínio se e somente se f é contínua em x_0 e seu gráfico não tem bico em $(x_0, f(x_0))$. Em outras palavras, a derivabilidade de f em x_0 é equivalente à existência do limite

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ou ainda equivalentemente, à existência e igualdades dos limites laterais

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Observação 3.3: a Proposição 3.2 pode ser aplicada à função módulo de x, a qual não possui derivada em $x_0 = 0$, pois vimos intuitivamente que tem um "bico"em $(0, |0|) = (0, 0)$. De fato, isto é porque os limites laterais existem

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \underbrace{=}_{\Delta x > 0} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \underbrace{=}_{\Delta x < 0} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

mas são distintos, já que $1 \neq -1$.

Exemplo 3.3: a função contínua $f(x) = x^2$ tem derivada em todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solução: com efeito, como f é contínua em todos os pontos do seu domínio $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, basta observar que o gráfico de f não tem "bicos" por ser o gráfico da parábola $y = x^2$. Vejamos que o fato dos limites laterais

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0^+} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0^+} \frac{2x_0 \Delta x}{\Delta x} = 2x_0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0^-} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0^-} \frac{2x_0 \Delta x}{\Delta x} = 2x_0$$

existirem e serem iguais implica existir o limite (3.1) para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ e assim, f é derivável em $\mathbb{R}$.

Observação 3.4: com esta noção de derivada podemos dizer que qualquer função constante, linear, polinomial, racional, trigonométrica, logarítmica ou exponencial possui derivada em todos os pontos de seu domínio e em particular são contínuas.

3.1.2 Notações

1. Em $y = f(x)$, y é a variável dependente e x é a variável independente. A notação $\frac{dy}{dx}$ da derivada de y em relação a x é devida a Leibniz[1]. Esta notação é usada para indicar a derivada de f em relação à variável x. Assim,
$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$
2. A notação $\frac{d^2y}{dx^2}$ indicará a derivada de $\frac{dy}{dx}$ em relação a x, ou seja, será usada para indicar a derivada da função que associa a cada x o valor $f'(x)$

[1]Gottfried Leibniz (1646-1716) foi um matemático e filósofo alemão que desenvolveu independentemente o Cálculo Diferencial, introduzindo neste sua própria notação. Essa notação foi amplamente adotada desde a sua publicação.

nos casos em que existe $f'(x)$. Assim, temos as seguintes notações para a derivadas de segunda ordem na variável x

$$y'' = (y')' = f''(x) = [f'(x)]' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Problema 3.1: use o GeoGebra para visualizar os gráficos de funções, suas derivadas e as suas derivadas de ordem superior. Digite `f(x)=x^3-x^2-1` na entrada do programa. Logo digite `f'(x)` e veja que o GeoGebra apresenta a derivada e seu gráfico. Faça da mesma forma com `f''(x)` etc. Faça manualmente as derivadas e use o GeoGebra para conferir suas contas e os esboços dos seus gráficos.

Proposição 3.3: sejam $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, valem as seguintes fórmulas:

i) $f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$

ii) $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}.$

iii) $f(x) = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -nx^{-n-1}, \quad x \neq 0.$

iv) $f(x) = x^{1/n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (1/n)x^{(1/n)-1}, \quad x > 0$ se n for par e $x \neq 0$, se n for ímpar $(n \geq 2)$.

v) $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x.$

vi) $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \; x > 0.$

vii) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x.$

viii) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x.$

3.2 Regras de derivação

Regra da derivada da soma, da diferença, do produto e do quociente de funções deriváveis. Sejam f e g duas funções deriváveis em x. Então, valem as seguintes propriedades:

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$
2. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0.$

Exemplo 3.4: vamos verificar que a função tangente

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

tem por derivada

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x,$$

no qual $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ define a função secante.

Solução: como $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e pela identidade trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

temos que

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

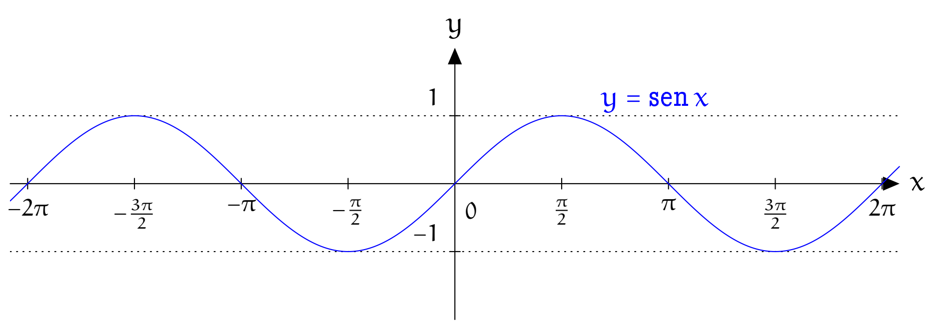


Figura 3.2 Gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$.

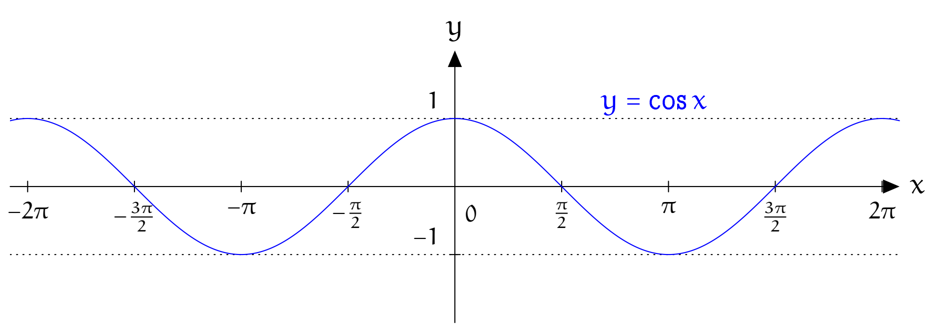


Figura 3.3 Gráfico da função $y = \cos x$.

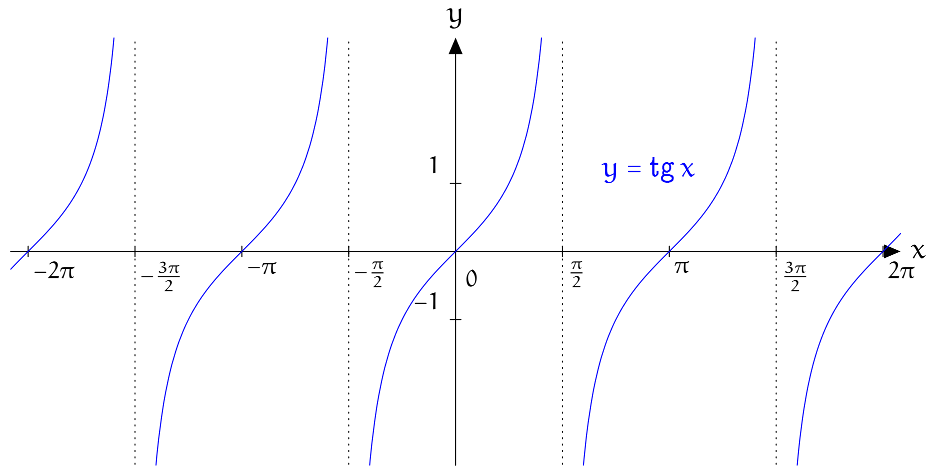


Figura 3.4 Gráfico da função $y = \operatorname{tg} x$.

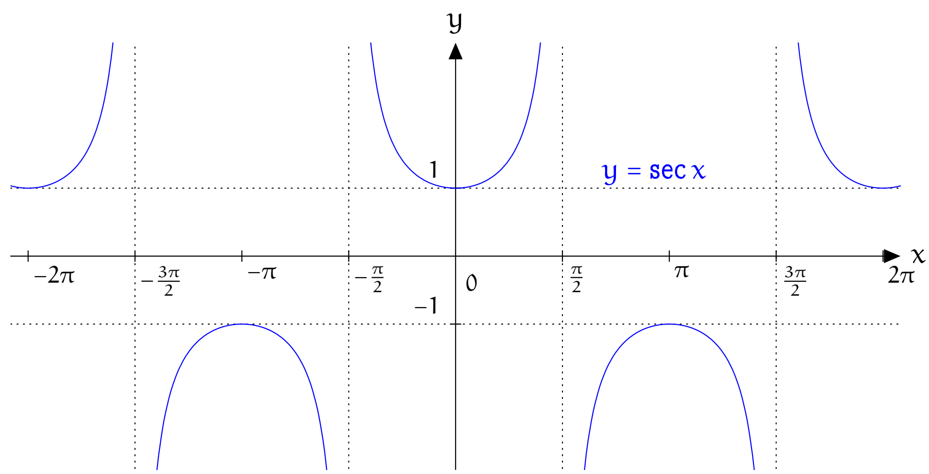


Figura 3.5 Gráfico da função $y = \sec x$.

3.3 Regra da cadeia

Como calcular a derivada da função composta $f \circ g$ num ponto x do domínio g? A resposta a é dada pela regra da cadeia no resultado seguinte, que determina a derivada da composição de funções deriváveis.

Teorema 3.1 (regra da cadeia): se f e g são duas funções deriváveis com a imagem de g sendo um subconjunto do domínio de f, então,

i) a função composta $f \circ g$ é derivável nos pontos do domínio de g;

ii) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad x \in \mathrm{Dom}(g).$

Observação 3.5: outra maneira de ver a regra da cadeia é a seguinte:

$$\text{se } y = (f \circ g)(x) \text{ e } u = g(x) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{(f\circ g)'(x)} = \underbrace{\frac{dy}{du}}_{f'(g(x))} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{g'(x)}.$$

Não é possível simplificar os du na regra da cadeia.

Exemplo 3.5: calcule a derivada de $y = (3x^2+1)^3$.

Solução: faça $f(x) = u^3$, no qual $u = 3x^2+1$. Assim,

$$f'(x) = \frac{d(u^3)}{dx} = \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{d(3x^2+1)}{dx}} \underbrace{\frac{d(u^3)}{du}}_{\underbrace{3u^2}_{3(3x^2+1)^2}} = \underbrace{\frac{d(3x^2+1)}{dx}}_{6x} 3(3x^2+1)^2 = 18x(3x^2+1),$$

ou seja,

$$f'(x) = 18x(3x^2+1)^2.$$

A seguir apresentamos fórmulas que utilizam a regra da cadeia.

Proposição 3.4: seja g uma função derivável. Então, valem as seguintes fórmulas:

i) $[e^{g(x)}]' = e^{g(x)} g'(x)$.

ii) $[\ln(g(x))]' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

iii) $[\cos(g(x))]' = -g'(x)\,\mathrm{sen}(g(x))$.

iv) $[\mathrm{sen}(g(x))]' = -g'(x)\cos(g(x))$.

v) $[(g(x))^n]' = n[g(x)]^{n-1} g'(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

vi) $[(g(x))^{1/n}]' = \frac{1}{n}[g(x)]^{\frac{1}{n}-1} g'(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Exemplo 3.6: calcule a derivada de $y = x^2 e^{3x}$ a respeito da variável x.

Solução: primeiro use o fato de x^2e^{3x} ser um produto de funções e logo use a regra da cadeia, assim

$$y' = [x^2e^{3x}]' = \underbrace{[x^2]'}_{2x} e^{3x} + x^2 \underbrace{[e^{3x}]'}_{e^{3x}\underbrace{[3x]'}_{3}} = 2xe^{3x} + x^2e^{3x}3.$$

Portanto,

$$y' = (2x+3x^2)e^{3x}.$$

3.4 Derivada de $f(x)^{g(x)}$

Começaremos com um exemplo.

Exemplo 3.7: como calcular a derivada da curva

$$y = x^x \tag{3.4}$$

relativa à variável x.

Solução: faremos em três passos o cálculo da derivada.

1. Primeiro aplique a função logaritmo neperiano aos dois membros da equação 3.4. Obtemos
$$\ln(y) = \underbrace{\ln(x^x)}_{x \ln x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln x. \tag{3.5}$$
2. Depois aplique a função exponencial aos dois membros de (3.5). Assim
$$\underbrace{e^{\ln y}}_{x^x} = e^{x \ln x} \quad \Rightarrow \quad x^x = e^{x \ln x}. \tag{3.6}$$
3. Agora derive os dois membros da equação (3.6) na variável x
$$(x^x)' = (e^x \ln x)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{\ln(x^x)}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$
Portanto, segue-se que
$$\boxed{(x^x)' = x^x(\ln x + 1)}$$

Exemplo 3.8: calcular a derivada de

$$y = 3^x$$

relativa à variável x.

Solução: faremos em dois passos o cálculo da derivada.

1. Comece pela conclusão do item 2 do Exemplo 3.4. Assim, obterá a equação
$$3^x = e^{x \ln 3}$$
2. Logo, derive a equação anterior
$$(3^x)' = (e^{x \ln 3})' = e^{x \ln 3}(x \ln 3)' = e^{\ln(3^x)}(\ln 3) = 3^x \ln 3$$
Portanto,
$$\boxed{(3^x)' = 3^x \ln 3}$$

Proposição 3.5: sejam f e g duas funções deriváveis no mesmo domínio com $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Então,

$$\boxed{\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)}[g(x)\ln f(x)]'}$$

Exemplo 3.9: determinamos de forma implícita a derivada da curva dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$ que representa uma circunferência centrada na origem e de raio 1.

Solução: faça $y = f(x)$ e substitua na equação da circunferência. Assim, obterá a equação

$$x^2 + (f(x))^2 = 1,$$

que derivamos em os ambos lados em função da variável x. Assim

$$\underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + (f(x))^2)}_{\underbrace{\frac{d}{dx}(x^2)}_{2x}+\underbrace{\frac{d}{dx}(((f(x))^2)}_{2f(x)f'(x)}} = \underbrace{\frac{d}{dx}(1)}_{0}.$$

Logo,

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2f(x)f'(x) = -2x \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x) = -\frac{x}{f(x)}}$$

Desta forma, conseguimos determinar a derivada da função $f(x)$ implicitamente, ou seja, sem ter uma fórmula explícita que a define.

Exemplo 3.10: vamos calcular a derivada da função $y = \operatorname{arc\,sen} x$, que é a inversa da função $\operatorname{sen} y = x$, no sentido de que $\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$.

Solução: observe na calculadora ou no GeoGebra que para valores $x \in [-1, 1]$ existe um único valor $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, tal que $\operatorname{sen} y = x$. Esta equação define implicitamente uma função denominada arco-seno e é indicada por $y = \operatorname{arc\,sen} x$. Assim, temos

$$\operatorname{sen} y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \operatorname{arc\,sen} x.$$

1. O domínio da função $\operatorname{arc\,sen}$ é o intervalo $[-1, 1]$.

2. A imagem da função $\operatorname{arc\,sen}$ é o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

3. A derivada da função $y = \operatorname{arc\,sen} x$ é dada por

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Justifique por que a derivada de $\operatorname{arc\,sen} x$ é dada assim.

Sugestão: derive implicitamente a equação $\operatorname{sen} y = x$ em função de x e use o fato que $\cos x\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$.

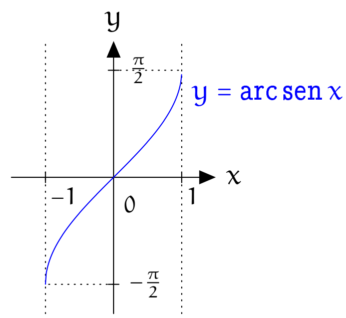


Figura 3.6 Gráfico da função $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

3.5 Aplicações das derivadas

A seguir apresentamos algumas aplicações das derivadas de funções.

1. A primeira aplicação é para calcular retas tangentes e normais ao gráfico de uma função.

2. A segunda aplicação é para calcular limites indeterminados usando a Regra de L'Hopital[2], para limites indeterminados tipo $0/0$ ou ∞/∞.

3. A terceira aplicação será determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função, bem como os pontos de máximos e mínimos locais e globais.

4. A quarta aplicação é para determinar os intervalos de concavidade do gráfico de uma função, bem como os pontos de inflexão.

5. A quinta e última aplicação é o esboço do gráfico de funções.

Outras aplicações de derivadas podem ser exploradas e estudadas pelo leitor nas referências ou em outros livros de cálculo.

[2]Guillaume de l'Hôpital (1661-1704) tem seu nome fortemente associado a essa regra, mas as evidências históricas apontam o matemático suíço Bernoulli como sendo seu descobridor. Não obstante, Hôpital foi o primeiro a publicá-la em um livro-texto de Cálculo Diferencial.

3.5.1 Reta tangente ao gráfico de uma função

Se f é uma função derivável em x_0, sabemos que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m_t,$$

no qual m_t é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$, que é dada pela seguinte fórmula:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \tag{3.7}$$

Exemplo 3.11: qual é a equação da reta t, que tangencia a parábola $y = x^2$, no ponto $P = (-1, 1)$?

Solução: sendo $y = x^2$, pela regra de derivação dada na Proposição 3.3, temos $(x^2)' = 2x$. Em P temos $x = -1$. O coeficiente angular da reta t é dado por

$$m_t = f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Assim, a reta t, tangente à curva $y = x^2$ no ponto P, tem equação

$$y - 1 = (-2)(x - (-1)),$$

ou seja, $y = -2x - 1$ apresentada na Figura 3.7.

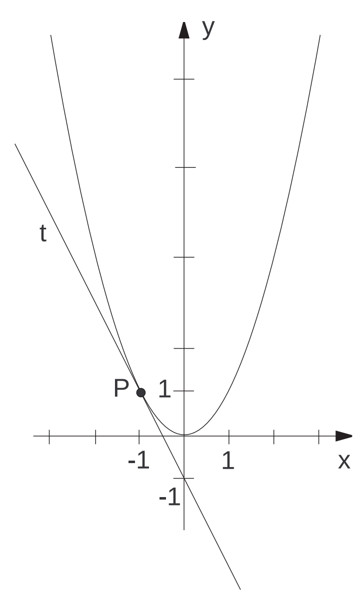


Figura 3.7 Representação gráfica da curva $y = x^2$ e da reta t, tangente à curva no ponto $P = (-1, 1)$.

Exemplo 3.12: determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da parábola $y = f(x) = 3 - 4x - x^2$, no ponto de abscissa (primeira coordenada) 3.

Determine a equação dessa reta. Em qual ponto do gráfico a reta tangente ao gráfico é horizontal?

Solução: o coeficiente angular da reta tangente à curva (parábola) $y = 3-4x-x^2$, no ponto de abscissa 3, é $m = f'(3)$. Como $f'(x) = -4-2x$, temos $m = -4-2\cdot 3 = -10$.

O ponto do gráfico, com abscissa 3, é o ponto $P = (3, f(3)) = (3, -18)$. A equação da reta pedida é $y - f(3) = f'(3)(x-3)$, ou seja, $y + 18 = -10(x-3)$. Simplificando esta equação, ela fica $y = -10x + 12$.

No ponto $(x, f(x))$ em que a reta tangente é horizontal, temos $m = 0$, ou seja, $f'(x) = 0$. Logo, $x = -2$. Assim, o ponto procurado é $(-2, f(-2)) = (-2, 7)$.

Exemplo 3.13: a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - x$ no ponto $(2, f(2))$ é $y = 3x - 4$?

Solução: sim, pois ao aplicar a fórmula (3.7), obtemos

$$y - \underbrace{f(2)}_{2} = \underbrace{f'(2)}_{3}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 3(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 4,$$

pois

$$f'(x) = (x^2 - x)' = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 2\cdot 2 - 1 = 3 \quad \text{e} \quad f(2) = 3\cdot(2)^2 - 4 = 2.$$

3.5.2 Reta normal ao gráfico de uma função

A reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é a reta perpendicular à reta tangente e f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Lembremos que as inclinações da reta tangente e reta normal, respetivamente denotadas por m_t e m_n verificam

$$m_t \cdot m_n = -1. \tag{3.8}$$

Portanto, temos dois casos:

1. Quando $m_t = f'(x_0) \neq 0$, segue-se de (3.8) que $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Logo, a equação da reta normal a f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f(x_0)}(x - x_0)} \tag{3.9}$$

2. Quando $m_t = f'(x_0) \neq 0$ a reta normal é dada por

$$\boxed{\underbrace{x = x_0}_{\text{equação da reta normal, pois a reta tangente é } y = f(x_0)}} \tag{3.10}$$

Exemplo 3.14: a reta normal ao gráfico da função $f(x) = x^2 - x$ no ponto $(2, f(2))$ é $y = -\frac{1}{3}x - 4$?

Solução: sim, já que $f'(2) = 3 \neq 0$. Assim, podemos aplicar a fórmula da reta normal (3.9) e obter

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -13(x - 2),$$

Então,

$$y = -\frac{1}{3}x - 4.$$

Problema 3.2 (atividade com GeoGebra): realize uma atividade no GeoGebra para visualização das retas tangentes e normais no ponto de abscissa $x_0 = \frac{1}{2}$ das funções

1. $f(x) = -2e^{x^2}$ (tipo exponenciais),
2. $g(x) = \ln \sqrt{x}$ (tipo logarítmicas),
3. $h(x) = \operatorname{sen}(\cos(x))$ (tipo trigonométricas),
4. $l(c) = \operatorname{cotg}(x^2)$,
5. $k(x) = \operatorname{cosec}(x)$,
6. $m(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ (tipo inversa de trigonométricas),
7. $t(x) = \operatorname{arc\,cos}(x)$.

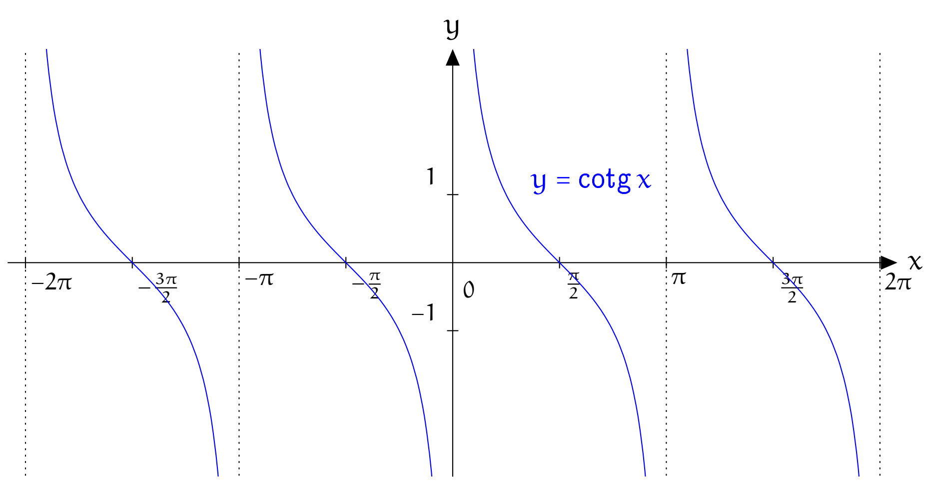


Figura 3.8 Gráfico da função $y = \operatorname{cotg} x$.

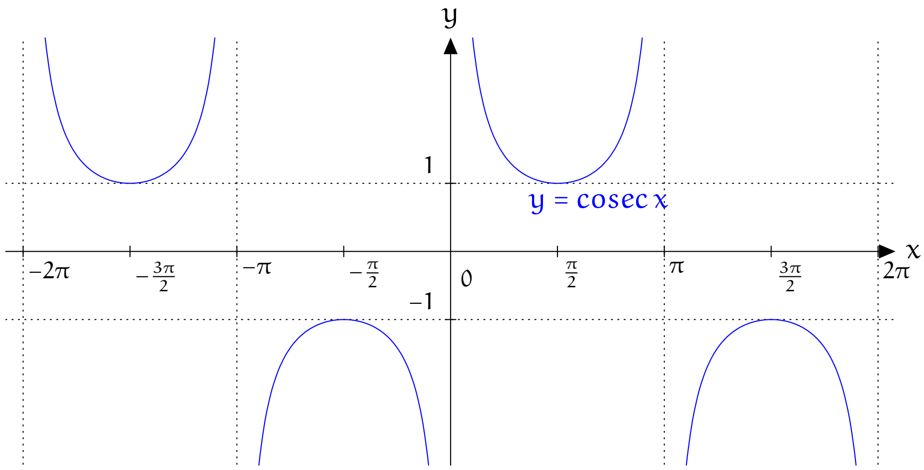


Figura 3.9 Gráfico da função $y = \operatorname{cosec} x$.

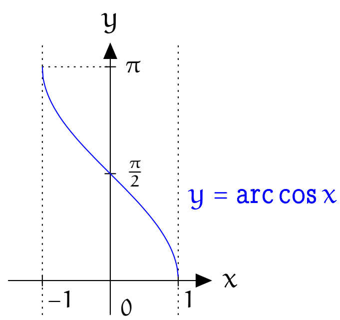


Figura 3.10 Gráfico da função $y = \arccos x$.

3.6 Regras de L'Hopital

3.6.1 Caso $0/0$

Sejam f e g duas funções deriváveis no conjunto $A =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[- \{x_0\}$, para algum $\epsilon > 0$ e com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Nestas condições:

$$\text{se} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{e existe o limite} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então, podemos afirmar que existe o limite $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e vale:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Esta regra contínua valendo se substituirmos $x \to x_0$ por $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ ou por $x \to +\infty$ ou por $x \to -\infty$.

Este tipo $0/0$ é conhecido como *Primeira Regra de L'Hopital.*

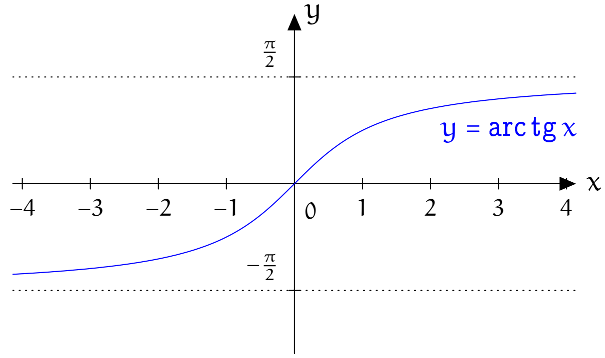


Figura 3.11 Gráfico da função $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Exemplo 3.15: vamos determinar o seguinte limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 6x + 8x - 3}{x^4 - 1},$$

usando a Primeira Regra de L'Hopital.

Solução: observe primeiro que $f(x) = x^5 - 6x + 8x - 3$ e $g(x) = x^4 - 1$, são funções deriváveis em todo $\mathbb{R}$ em particular no subconjunto $A =]0.9, 1.1[-1$ e que $g'(x) = (x^4 - 1)' = 4x^3 \neq 0$ em A. Mas

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1} = \frac{1^5 - 6\cdot 1^3 + 8\cdot 1 - 3}{1^4 - 1} = 0/0,$$

é um limite indeterminado. Por outro lado, temos que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, já que

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^5 - 6x^3 + 8x - 3)'}{(x^4 - 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4 - 18x^2 + 8 - 3}{4x^3} = -\frac{5}{4}.$$

Assim, pela primeira regra de L'Hopital concluímos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^5 - 6x^3 + 8x - 3)'}{(x^4 - 1)'} = -\frac{5}{4}.$$

3.6.2 Caso $+\infty / +\infty$

Sejam f e g duas funções deriváveis no intervalo aberto $I =]a, x_0[$, com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Nestas condições,

se $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x) = +\infty$ e existe o limite $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito ou infinito),

então, podemos afirmar que existe o limite $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e que vale:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Esta regra continua valendo se substituirmos $x \to x_0^-$ por $x \to x_0^+$, $x \to +\infty$ ou por $x \to -\infty$.

Este tipo $+\infty/+\infty$ é conhecido como *segunda regra de L'Hopital*.

Exemplo 3.16: vamos verificar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} = +\infty$$

usando a segunda Regra de L'Hopital.

Solução: observe que $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2x - 1$, são funções deriváveis em todo $\mathbb{R}$ em particular no intervalo $I =]30, +\infty[$ e que $g'(x) = 2x \neq 0$ em I. Mas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \frac{+\infty}{2\cdot(+\infty)+1} = +\infty/+\infty,$$

é um limite indeterminado. Por outro lado, temos que o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, já que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(2x^2-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

Assim, pela segunda regra de L'Hopital concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(2x-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

3.7 Crescimento e decrescimento de uma função

Definição 3.1: uma função f é crescente (estritamente crescente) no intervalo I, se qualquer $x_1, x_2 \in I$ com

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2). \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

Notação: $f \nearrow$ em I denotará que f é crescente no conjunto I.

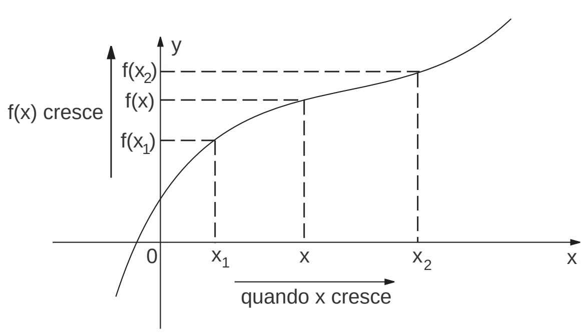


Figura 3.12 f é crescente (estritamente crescente) em um certo intervalo I.

Definição 3.2: uma função f é decrescente (estritamente decrescente) no intervalo I, se qualquer $x_1, x_2 \in I$ com

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Notação: $f \searrow$ em I denotará que f é decrescente no conjunto I.

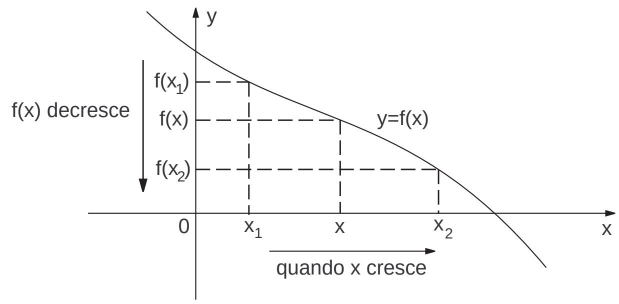


Figura 3.13 f é decrescente (estritamente decrescente) em um certo intervalo I.

Teorema 3.2 (critério de crescimento e decrescimento): seja f uma função no intervalo I. Valem as seguintes afirmações

i) Se $f'(x) > 0$ para cada $x \in I$, então, $f \nearrow$ em I.

ii) Se $f'(x) < 0$ para cada $x \in I$, então, $f \searrow$ em I.

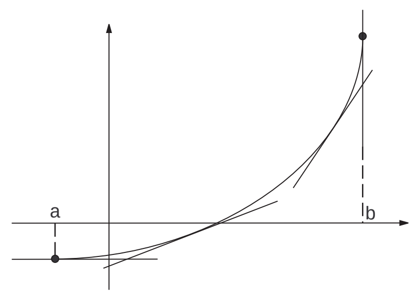


Figura 3.14 Se a derivada $f'(x)$ se mantém positiva quando $a < x < b$, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico são sempre positivos, e assim a função é crescente no intervalo $[a, b]$.

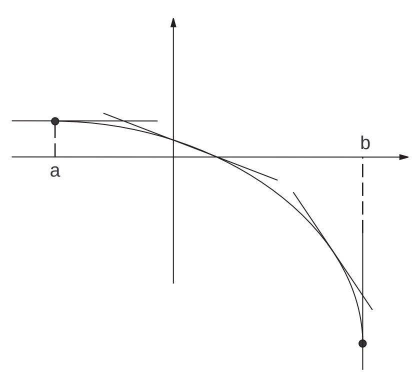


Figura 3.15 Se a derivada $f'(x)$ se mantém negativa quando $a < x < b$, as retas tangentes ao gráfico são inclinadas para a esquerda, e assim a função é decrescente quando $a \leq x \leq b$.

Exemplo 3.17:

a) A função linear $f(x) = ax + b$ é crescente em $\mathbb{R}$ quando $a > 0$ e é decrescente em $\mathbb{R}$ quando $a < 0$.

Solução: aplicando o Teorema 3.2, temos que

$$f'(x) = (ax + b)' = a > 0 \quad \Rightarrow \quad f \nearrow \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

De fato, observamos que para todo $x \in \mathbb{R}$ a desigualdade $f'(x) = a > 0$ vale, pois $a > 0$. Portanto, concluímos que

$$f \nearrow \ \text{em}\ \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

Fica claro que o caso no qual $f \searrow$ em $\mathbb{R}$ vai acontecer quando $a < 0$.

b) A função $f(x) = x^2$ é crescente em $]0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$

Solução: aplicando o Teorema 3.2 e a regra do "tombo", temos que

$$f'(x) = (x^2)' = 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad f \nearrow \quad \text{em} \quad]0, +\infty[.$$

Para verificar qual é o conjunto no qual $f \searrow$, basta observar que

$$f'(x) = (x^2)' = 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 \quad \Rightarrow \quad f \nearrow \quad \text{em} \quad]-\infty, 0[.$$

Definição 3.3: seja f uma função.

1. Diremos que um ponto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ é um ponto de máximo local de f quando existe um intervalo fechado $[a, b]$ contido no domínio de f e que contém x_0, tal que
$$f(x_0) \geq f(x), \qquad x \in [a, b].$$

2. Diremos que um ponto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ é um ponto de mínimo local de f quando existe um intervalo fechado $[a, b]$ contido no domínio de f e que contém x_0, tal que
$$f(x_0) \leq f(x), \qquad x \in [a, b].$$

Observações 3.6:

1. Se f é crescente num intervalo fechado $[a, b]$ com $a < b$, então o ponto b é um ponto de máximo de f.

2. Se f é decrescente num intervalo fechado $[a, b]$ com $a < b$, então o ponto a é um ponto de mínimo de f.

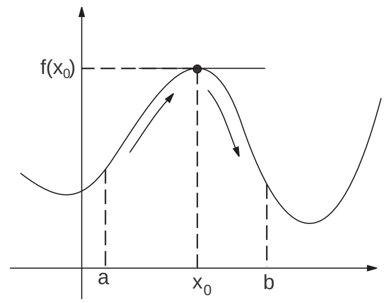


Figura 3.16 x_0 é um ponto de máximo local. Se f tem derivada em x_0, então $f'(x_0) = 0$, pois no ponto $(x_0, f(x_0))$ a reta tangente ao gráfico deve ser horizontal.

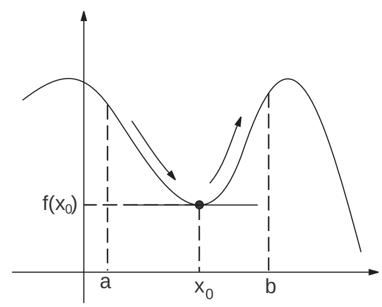


Figura 3.17 x_0 é um ponto de mínimo local. Se f tem derivada em x_0, então $f'(x_0) = 0$, pois a reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$ deve ser horizontal.

3. Se $x_0 \in \mathrm{Dom}(f) =]a, b[$ e f é $\nearrow$ (crescente) no intervalo $]x_0 - \epsilon, x_0[$ e é $\searrow$ (decrescente) no intervalo $]x_0, x_0 + \epsilon[$, para algum $\epsilon > 0$, obtemos que x_0 é um ponto de máximo local de uma função f.

4. Se $x_0 \in \mathrm{Dom}(f) =]a, b[$ e f é $\searrow$ (decrescente) no intervalo $]x_0 - \epsilon, x_0[$ e a seguir é $\nearrow$ (crescente) no intervalo $]x_0, x_0 + \epsilon[$, para algum $\epsilon > 0$, temos que x_0 é um ponto de mínimo local de uma função f.

Problema 3.3: verifique que a função

$$f(x) = \frac{\ln x}{\cos x}$$

tem infinitos pontos de máximo e mínimo locais no $\mathrm{Dom}(f)$ dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(f) &= \mathrm{Dom}(\ln) \cap \mathrm{Dom}(\cos) - \{x \in \mathbb{R} / \cos x \neq 0\} \\ &=]0, +\infty[- \{x \in \mathbb{R} / \cos x \neq 0\} \\ &=]0, \infty[- \left\{k\pi + \tfrac{\pi}{2} | k = 0, 1, 2, 3, \ldots\right\}. \end{aligned}$$

Sugestão: faça no GeoGebra o gráfico da função f.

3.8 Concavidade

Definição 3.4: se o gráfico de f estiver acima de todas as suas retas tangentes no intervalo I, diremos que o gráfico de f nesse intervalo é *côncavo para cima* em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas retas tangentes em I, é dito *côncavo para baixo* em I.

Notação: a concavidade para cima (respectivamente para baixo) de f ou da curva $y = f(x)$ será denotada pelo símbolo $\smile$ (respectivamente $\frown$).

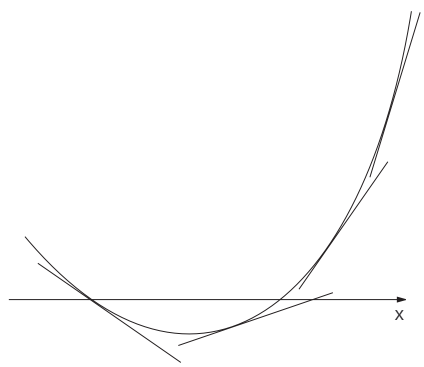


Figura 3.18 Neste gráfico a curva $y = f(x)$ é côncava para cima, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Neste caso, a inclinação da reta tangente ao gráfico, no ponto $(x, f(x))$, aumenta à medida que x cresce, ou seja, a derivada $f'(x)$ é crescente em I, e assim $(f'(x))' > 0$, ou seja, $f''(x) > 0$.

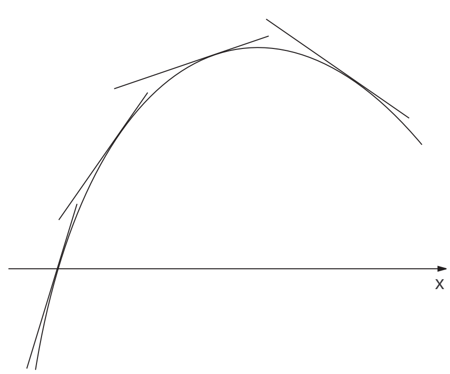


Figura 3.19 Neste gráfico a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Neste caso, a inclinação da reta tangente ao gráfico diminui à medida que x cresce, ou seja, a derivada $f'(x)$ é decrescente em I, e assim $(f'(x))' < 0$, ou seja, $f''(x) < 0$.

Teorema 3.3 (critério de concavidade): seja f uma função duas vezes diferenciável em I. As seguintes afirmações são validas:

1. Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então, o gráfico de f é $\smile$ em I.

2. Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então, o gráfico de f é $\frown$ em I.

Exemplo 3.18: seja $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos determinar os intervalos de concavidade de f.

Solução: pelo Teorema 3.3, temos que

$$f''(x) = (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)'' = (3x^2 - 4x - 5)' = 6x - 4$$

Logo

$$f''(x) = 6x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \text{e } f''(x) = 6x - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{2}{3}$$

Assim, a curva $y = f(x)$ é $\smile$ (côncava para cima) no intervalo $]\frac{2}{3}, +\infty[$ e é $\frown$ (côncava para baixo) no intervalo $]-\infty, \frac{2}{3}[$.

Observe que o ponto $\frac{2}{3}$ é um valor do domínio no qual a concavidade muda, passa de côncava para baixo em $]-\infty, \frac{2}{3}[$ para côncava para cima $]\frac{2}{3}, +\infty[$. Este tipo de ponto será chamado *ponto de inflexão* da curva $y = f(x)$.

Definição 3.5: um ponto $(x_0, f(x_0))$ é um *ponto de inflexão* da função f ou da curva $y = f(x)$ se existe um $\epsilon > 0$ tal que uma das duas condições aconteça:

1. f é $\smile$ (côncava para cima) em $]x_0 - \epsilon, x_0[$ e logo f é $\frown$ (côncava para baixo) em $]x_0, x_0 + \epsilon[$, ou

2. f é $\smile$ (côncava para cima) em $]x_0 - \epsilon, x_0[$ e logo f é $\frown$ (concava para baixo) em $]x_0, x_0 + \epsilon[$.

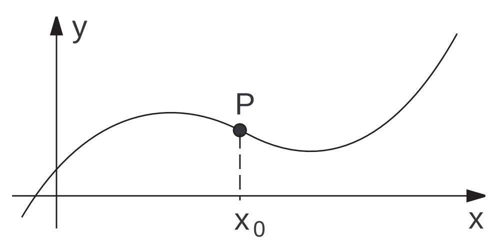


Figura 3.20 P é um ponto de inflexão do gráfico de f. Nesta ilustração, a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo antes de x_0, e côncava para cima depois de x_0.

Problema 3.4: determine os pontos de inflexão e os máximos e mínimos locais da função

$$f(x) = \sqrt{x}\,\text{sen}\,x$$

no intervalo $[0, 20]$. Além disso, calcule os pontos de máximo e mínimo global de f no intervalo $[0, 10]$.

Sugestão: use o GeoGebra para visualizar o gráfico da função e ter uma ideia de onde poderiam estar os dados solicitados. A

3.9 Estudo do gráfico de funções

Nesta seção faremos um roteiro para a construção de gráfico de funções passo a passo, que pode ser aplicado a qualquer função, como no seguinte exemplo. Usando a função sugerida, o resultado final encontra-se ilustrado na Figura 3.23.

Exemplo 3.19:

- **Passo 1:** digite na caixa de entrada do GeoGebra os dados da função e pressione "Enter´´.

  Sugestão: use a seguinte função

  ```
  f(x)=4x/(x^2+1)
  ```

- **Passo 2:** explicite o $\mathrm{Dom}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

- **Passo 3:** quando corresponder, localize no gráfico f as raízes, ou seja, cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x) = 0$.

  Sugestão: utilize o GeoGebra para determinar cada raiz como a abscissa do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo x.

- **Passo 4:** quando corresponder, calcule os limites laterais de $f(x)$ quando x tende ao ponto x_0 e nesse ponto a função não é definida.

- **Passo 5:** quando corresponder, calcule os limites laterais de $f(x)$ quando x tende ao ponto x_0 e nesse ponto a função não é contínua.

- **Passo 6:** determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f e seus pontos de máximo e mínimo locais ou globais.

  Sugestão: se f é derivável, use o Teorema 3.2 para calcular os intervalos de $\nearrow$ e $\searrow$. O resultado para a função sugerida está ilustrado na Figura 3.21.

- **Passo 7:** determine os intervalos de concavidade e destaque os pontos de inflexão f.

Sugestão: se f é derivável duas vezes, use o Teorema 3.3 para determinar os intervalos de $\smile$ e $\frown$. O resultado para a função sugerida encontra-se ilustrado na Figura 3.22.

- **Passo 8:** calcule os limites da função quando x tende a $+\infty$ ou quando x tende a $-\infty$.
- **Passo 9:** quando corresponda determine os pontos críticos da função f.

  Sugestão: um número c do domínio de f é um ponto crítico para uma função f quando $f'(c) = 0$ ou quando $f'(c)$ não existe. Portanto, para calcular os números críticos de f, resolva a equação $f'(x) = 0$. No GeoGebra pode traçar o gráfico da derivada de f e determine os pontos de interseção da curva $y = f'(x)$ com o eixo x.

$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	x

Figura 3.21 Sinal da derivada e intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

$f''(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frown$	$-\sqrt{3}$	$\smile$	0	$\frown$	$\sqrt{3}$	$\smile$	x

Figura 3.22 Sinal da segunda derivada e concavidades da função $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

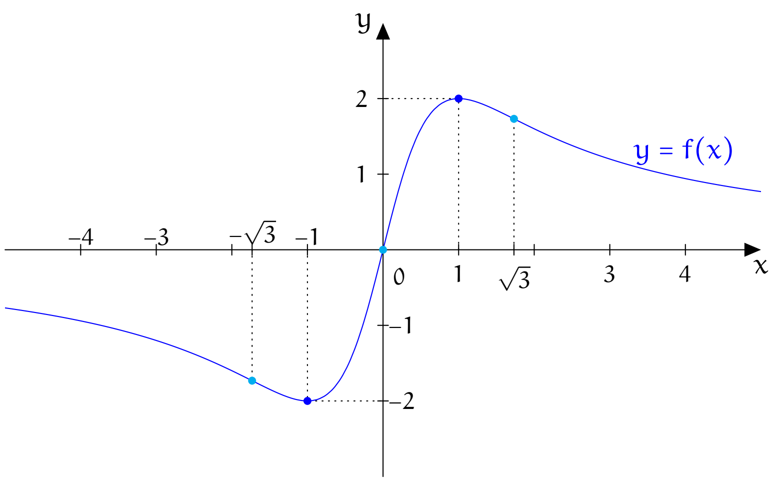


Figura 3.23 Gráfico da função $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$. Em destaque, pontos de máximo e de mínimo local e pontos de inflexão.

UNIDADE 4

Integrais indefinidas

4.1 Antiderivadas ou integrais indefinidas

Sendo $f(x)$ e $F(x)$ definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que

F é uma *antiderivada* ou uma *primitiva* de f, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$

Ou seja, F é antiderivada ou primitiva de f se F é uma função cuja derivada é f.

Como primeiros exemplos, temos

$f(x)$	primitiva de $f(x)$
$3x^2$	x^3
2	$2x$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$

Observação 4.1: se F é antiderivada de f em I e c é uma constante, então, $F+c$ também é uma antiderivada de f em I.

De fato, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então $[F(x)+c]' = F'(x) = f(x)$ e, portanto, $F(x)+c$ também é uma antiderivada de $f(x)$ em I.

Exemplo 4.1: as funções $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 + 5$ e $h(x) = x^3 - \sqrt{2}$ são primitivas da função $l(x) = 3x^2$.

Veremos agora que, em um intervalo I, duas primitivas de uma mesma função diferem entre si por uma constante.

Proposição 4.1: se F_1 e F_2 são antiderivadas de f, em $I \subset \mathbb{R}$ (I um intervalo), então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) = F_2(x) + c$, para todo $x \in I$.

Para demonstrar a Proposição 4.1 faremos uso do resultado seguinte, o qual aceitaremos sem demonstração.

Lema 4.1: se f é contínua no intervalo $[a,b]$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$, então f é constante em $[a,b]$, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração da Proposição 4.1: suponhamos que $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, sendo I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Consideremos a função $\varphi = F_1 - F_2$.

Então, $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, para todo $x \in I$.

Pelo Lema 4.1 φ é constante no intervalo I.

Assim, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) - F_2(x) = c$ para todo $x \in I$.

Portanto, $F_1(x) = F_2(x) + c$, para todo $x \in I$. □

Definição 4.1 (Integral Indefinida): sendo F uma primitiva de f no intervalo I, chama-se *integral indefinida de* f, no intervalo I, a primitiva genérica de f em I, $F(x) + C$, sendo C uma constante real genérica. Denotamos tal fato por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Nesta notação, omite-se o intervalo I. Sumarizando,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

4.2 Integrais imediatas

Coletaremos agora algumas integrais indefinidas cujo cálculo é imediato.

Proposição 4.2:

1. $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, se $\alpha \neq -1$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$
3. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$
4. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$
5. $\displaystyle\int e^{x}\,dx = e^{x} + C.$
6. $\displaystyle\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a}\ (a > 0, a \neq 1).$
7. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C.$
9. $\displaystyle\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C.$
10. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C.$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arc\,tg} x + C.$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C.$

Para a dedução das integrais acima, basta verificar que a derivada do segundo membro, em cada igualdade, é a função que se encontra sob o sinal de integração. Como exemplos temos se $\alpha \neq -1$,

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)\cdot\frac{x^{\alpha+1-1}}{\alpha+1} = x^{\alpha}.$$

Se $x > 0$, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; e se $x < 0$, $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = \dfrac{1}{x}$.
Portanto,

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, logo,

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x.$$

4.3 Manipulações elementares de integrais

Suponhamos $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$, e $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$. Então,

1. $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, logo,

   $\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x)+G(x)+C = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \quad (C = C_1+C_2)$.

2. Sendo k uma constante real, $[k\cdot F(x)]' = k\cdot F'(x) = k\cdot f(x)$, temos que

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + C = k\int f(x)\,dx \quad (kC_1 = C).$$

Reunimos os fatos acima, com outros também úteis, na proposição seguinte.

Proposição 4.3: se $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ e $\int g(x)\,dx = G(x) + C$, então, sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.
2. $\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx$.
3. $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$.
4. $\int f(x-b)\,dx = F(x-b) + C$.
5. $\int f(b-x)\,dx = -F(b-x) + C$.
6. $\int f(ax)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax) + C$.
7. $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Demonstração: as duas primeiras propriedades já foram deduzidas acima. Das cinco propriedades restantes, as quatro primeiras são consequências imediatas da última, a única que deduziremos.

Por hipótese, $F'(x) = f(x)$. Logo,

$$[F(ax + b)]' = F'(ax + b) \cdot (ax + b)' = af(ax + b),$$

de onde

$$\left(\frac{1}{a}F(ax + b)\right)' = \frac{1}{a} \cdot af(ax + b) = f(ax + b).$$

Portanto,

$$\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

4.4 Exemplos elementares

1. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$. Em particular, valem as seguintes integrais:

   (a) $\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C$

   (b) $\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + C$

2. $\int e^x\, dx = e^x + C$. Logo, valem as seguintes integrais:

   (a) $\int e^{x-5}\, dx = e^{x-5} + C$

   (b) $\int e^{2-x}\, dx = -e^{2-x} + C$

   (c) $\int e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$

3. Calcular $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

   Solução: Já que $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$, temos $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, logo, $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$. Então,

   $$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x - \int 1\, dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

4. Calcular $\int (5 \cos x + \cos 5x)\, dx$.

   Solução:

   $$\begin{aligned} \int (5 \cos x + \cos 5x)\, dx &= 5 \int \cos x\, dx + \int \cos 5x\, dx \\ &= 5 \operatorname{sen} x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + C. \end{aligned}$$

5. Calcular $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$.

Solução: temos $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Logo $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$. Então,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C = -\frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

6. Calcular $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx &= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \int x^{-1/2} \, dx + \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln |x| + C = 2\sqrt{x} + \ln |x| + C. \end{aligned}$$

4.5 Integração por mudança de variável ou integração por substituição

Suponhamos que

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C. \tag{4.1}$$

Suponhamos que $x = \varphi(t)$ é uma função derivável de t, para t em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Suponhamos definida em I a função composta $f(\varphi(t))$.

Define-se a *diferencial de* x como sendo a expressão simbólica

$$\boxed{dx = \frac{dx}{dt} dt = \varphi'(t) \, dt} \tag{4.2}$$

Como veremos agora, podemos substituir $x = \varphi(t)$ na expressão 4.1, fazendo $dx = \varphi'(t) \, dt$, ou seja, de 4.1 obtemos

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{4.3}$$

De fato, aplicando derivação em cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[F(\varphi(t))] &= \frac{d}{dx}[F(x)] \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= F'(x) \cdot \varphi'(t) \\ &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \end{aligned}$$

logo, $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C$. Portanto,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \implies \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C,$$

pela mudança de variável $x = \varphi(t)$, tomando-se $dx = \varphi'(t)\, dt$.

Na prática, quando calculamos $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$, tendo-se as considerações acima, passamos pela sequência de igualdades:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Exemplo 4.2: calcular $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx$.

Solução: começamos fazendo a substituição $u = 3 - 2x$. Então, usando (4.2), temos que

$$du = \frac{du}{dx} \cdot dx = (3-2x)'\, dx = -2dx.$$

Portanto,

$$dx = -\frac{1}{2} du.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} \int u^{-1/2}\, du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= -u^{1/2} + C = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{3-2x} + C.\end{aligned}$$

Exemplo 4.3: calcular $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

Solução: $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$. Como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, tomaremos $u = \cos x$ e teremos

$$du = \frac{du}{dx} \cdot dx = (\cos x)' dx = -\operatorname{sen} x\, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) dx = \int \frac{-1}{u} du = -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

Exemplo 4.4: calcular $\int \sec x\, dx$.

Solução: calcularemos esta integral por uma substituição que requer um truque.

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x \cdot (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx.$$

Aplicamos a mudança de variável

$$u = \sec x + \operatorname{tg} x,$$

e teremos

$$du = (\sec x + \operatorname{tg} x)' dx = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x) dx.$$

Logo,

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Exemplo 4.5: calcular $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$.

Solução: note que $(x^2+5)' = 2x$. Isto sugere fazermos $u = x^2 + 5$, de onde

$$du = 2x \, dx,$$

ou seja,

$$x \, dx = \frac{1}{2} du.$$

Temos, então,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = u^{1/2} + C = \sqrt{x^2+5} + C.$$

4.6 Ampliando nossa tabela de integrais imediatas

Com a finalidade de dinamizar o cálculo de integrais indefinidas, ampliaremos a lista de integrais imediatas da Seção 4.2, adotando como integrais "imediatas" as quatro seguintes, que deduziremos em seguida.

Proposição 4.4: sendo $a > 0$ e $\lambda \neq 0$,

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C$

Demonstração: $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} dx.$

Fazendo $\frac{x}{a} = y$, temos $dx = a \, dy$ e, então,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1 + y^2} dy = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} y + C = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Para deduzir a segunda integral, usamos a decomposição

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{\frac{1}{2a}}{a + x} + \frac{\frac{1}{2a}}{a - x}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx &= \frac{1}{2a} \int \frac{1}{a + x}\, dx + \frac{1}{2a} \int \frac{1}{a - x}\, dx \\
&= \frac{1}{2a} \ln |a + x| - \frac{1}{2a} \ln |a - x| + C \\
&= \frac{1}{2a} \ln \frac{|a + x|}{|a - x|} + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.
\end{aligned}$$

Para deduzir a terceira integral, fazemos uso da integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

e procedemos à mudança de variável, tal como no cálculo da primeira integral acima. O leitor poderá completar os detalhes.

Para deduzir a quarta integral, recorremos a um recurso diferente. Mostraremos que

$$(\ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \lambda}}.$$

De fato, sendo $u = x + \sqrt{x^2 + \lambda}$ e $(\sqrt{w})' = \frac{1}{2\sqrt{w}} \cdot w'$, temos

$$\begin{aligned}
(\ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}|)' = (\ln |u|)' &= \frac{1}{u} \cdot u' \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \lambda}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + \lambda})' \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \lambda}} \cdot (1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + \lambda}} \cdot \cancel{2}x) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \lambda}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \lambda} + x}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \lambda}}.
\end{aligned}$$

4.6.1 Nossa tabela de integrais imediatas

Adotaremos como integrais imediatas as integrais da Tabela 4.1 dada a seguir. Esta tabela inclui as integrais imediatas da Proposição 4.2, algumas integrais calculadas em exemplos anteriores e as integrais da Proposição 4.4.

Tabela 4.1 Tabela ampliada de integrais imediatas (nas últimas linhas, $a > 0$ e $\lambda \neq 0$).

$\int u^{\alpha}\, du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$	$\int \dfrac{1}{u}\, du = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$	$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$
$\int e^{u}\, du = e^{u} + C$	$\int a^{u}\, du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sec^{2} u\, du = \operatorname{tg} u + C$	$\int \operatorname{cosec}^{2} u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$
$\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C$	$\int \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$
$\int \sec u\, du = \ln\lvert\sec u + \operatorname{tg} u\rvert + C$	$\int \operatorname{cosec} u\, du = -\ln\lvert\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert + C$
$\int \dfrac{1}{1+u^{2}}\, du = \operatorname{arc\,tg} u + C$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\, du = \operatorname{arc\,sen} u + C$
$\int \dfrac{du}{a^{2}+u^{2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{u}{a} + C$	$\int \dfrac{du}{a^{2}-u^{2}} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{a+u}{a-u}\right\rvert + C$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{u}{a} + C$	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^{2}+\lambda}} = \ln\lvert u + \sqrt{u^{2}+\lambda}\rvert + C$

4.7 Problemas

Calcule as integrais indefinidas seguintes, utilizando, quando necessário, mudança de variáveis. Sempre que julgar conveniente, faça uso da tabela de integrais indefinidas Tabela 4.1.

1. $\int (x + \sqrt{x})\, dx$.

   Resposta: $\frac{x^{2}}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

2. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx.$

Resposta: $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C.$

3. $\int \operatorname{sen} ax \, dx.$

Resposta: $-\frac{\cos ax}{a} + C.$

4. $\int \frac{\ln x}{x} dx.$

Resposta: $\frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Sugestão: faça $u = \ln x.$

5. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 3x} dx.$

Resposta: $-\frac{\operatorname{cotg} 3x}{3} + C.$

6. $\int \frac{dx}{3x-7}.$

Resposta: $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C.$

7. $\int \operatorname{tg} 2x \, dx.$

Resposta: $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C.$

8. $\int \operatorname{cotg}(5x-7) dx.$

Resposta: $\frac{1}{5}\ln|\operatorname{sen}(5x-7)| + C.$

9. $\int \operatorname{cotg} \frac{x}{3} dx.$

Resposta: $3\ln|\operatorname{sen}\frac{x}{3}| + C.$

10. $\int \operatorname{tg}\varphi \sec^2\varphi \, d\varphi.$

Resposta: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + C.$

Sugestão: faça $u = \operatorname{tg}\varphi.$

11. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx.$

Resposta: $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$

Sugestão: faça $u = \operatorname{sen} x.$

12. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x \, dx.$

Resposta: $-\frac{\cos^4 x}{4} + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.

Resposta: $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$.

Sugestão: faça $u = 2x^2+3$.

14. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Resposta: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$.

15. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

Resposta: $2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}+C$.

Sugestão: faça $u = 1+\operatorname{sen}^2 x$.

16. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Resposta: $\frac{\operatorname{arc\,sen}^2 x}{2}+C$.

17. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,cos}^2 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Resposta: $-\frac{\operatorname{arc\,cos}^3 x}{3}+C$.

18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Resposta: $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

19. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$.

Resposta: $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$.

Sugestão: faça $u = x^2+2x+3$.

20. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\operatorname{sen} x+3}\,dx$.

Resposta: $\frac{1}{2}\ln(2\operatorname{sen} x+3)+C$.

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$.

Resposta: $\ln|\ln x|+C$.

Sugestão: faça $u = \ln x$.

22. $\displaystyle\int 2x(x^2+1)^4\,dx$.

Resposta: $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$.

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$.

Resposta: $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x+1|+C$.

24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$

Resposta: $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$

25. $\displaystyle\int e^{2x}\,dx.$

Resposta: $\frac{1}{2}e^{2x} + C.$

26. $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx.$

Resposta: $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$

Sugestão: faça $u = -x^2$.

27. $\displaystyle\int \frac{e^x}{3+4e^x}\,dx.$

Resposta: $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x) + C.$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2x^2}.$

Resposta: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x) + C.$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}.$

Resposta: $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{3}x) + C.$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}.$

Resposta: $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}\frac{3x}{4} + C.$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+4}.$

Resposta: $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x}{2} + C.$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2}.$

Resposta: $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right| + C.$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}.$

Resposta: $\ln(x+\sqrt{x^2+9}) + C.$

34. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{5-x^6}.$

Resposta: $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right| + C.$

Sugestão: tome $x^6 = (x^3)^2$ e faça $u = x^3$.

35. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

Resposta: $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x^2 + C.$

Sugestão: faça $u = x^2$.

36. $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}\,dx$.

Resposta: $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C$.

4.8 O método de integração por partes

Há essencialmente dois métodos empregados no cálculo de integrais indefinidas (primitivas) de funções elementares. Um deles é a integração por substituição, explorada anteriormente. O outro método é chamado de *integração por partes*, o qual exploraremos nesta seção.

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são duas funções deriváveis em um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, para cada x em I, temos

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Assim sendo,

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,dx = u(x)v(x) + C,$$

ou seja,

$$\int v(x)u'(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) + C.$$

Podemos escrever ainda

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx} \tag{4.4}$$

aqui considerando que a constante genérica C já está implícita na última integral.

Sendo $u = u(x)$ e $v = v(x)$, temos

$$du = u'(x)\,dx \text{ e } dv = v'(x)\,dx,$$

e passamos da fórmula 4.4 à forma abreviada

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du} \tag{4.5}$$

As fórmulas 4.4 e 4.5 são chamadas fórmulas de integração por partes.

Exemplo 4.6: calcular $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Solução: Tomaremos $u = x$, e $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Teremos $du = 1\,dx = dx$ e $v = \int \operatorname{sen} x\,dx$. Para os propósitos da integração por partes, basta tomar $v = -\cos x$, menosprezando a constante arbitrária da integral $v = \int \operatorname{sen} x\,dx$, pois tal escolha da função v é suficiente para validar a fórmula 4.5. Temos, então,

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x \, dx &= \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

Exemplo 4.7: calcular $\int x \ln x \, dx$.

Solução: tomamos $u = \ln x$ e $dv = x \, dx$. Temos $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \int x \, dx$.

Assim, $v = \frac{x^2}{2}$. Obtemos, então,

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

Exemplo 4.8: calcular $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

Solução: faremos $u = \operatorname{arc\,tg} x$ e $dv = dx$. E, então, $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $v = x$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ &= x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx.\end{aligned}$$

Para calcular a integral $J = \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$ procedemos à mudança de variável.

Fazendo $w = 1 + x^2$, temos $dw = 2x \, dx$ e, então, $x \, dx = \frac{1}{2} dw$. Logo,

$$J = \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{w} dw = \ln |w| + C = \ln(1 + x^2) + C.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \ln(1 + x^2) + C.$$

4.9 Uma estratégia para integrar por partes

Ao integrar por partes, uma integral da forma $\int f(x)g(x) \, dx$, devemos sempre escolher, entre as duas funções da expressão $f(x)g(x) \, dx$ uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv.

Em outras palavras, podemos fazer $u = f(x)$ e $dv = g(x) \, dx$ ou $u = g(x)$ e $dv = f(x) \, dx$ (ou ainda $u = f(x)g(x)$ e $dv = 1 \, dx$). Mas esta escolha não pode ser feita de modo aleatório.

Uma sugestão que funciona bem na grande maioria das vezes é escolher as funções u e v segundo o critério que descreveremos abaixo.

Considere o seguinte esquema de funções elementares:

L	I	A	T	E
Logarítmicas	**I**nversas de trigonométricas	**A**lgébricas	**T**rigonométricas	**E**xponenciais

No esquema acima, as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções. Uma estratégia que funciona bem é: ao realizar uma integração por partes, escolher, dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral,

- como função u: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- como formando a diferencial dv: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Sumarizando, u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de L e dv pela letra mais próxima de E. Esta estratégia já foi adotada nos exemplos desenvolvidos anteriormente.

1. Na integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx$, Exemplo 4.6, fizemos
   $u = x$ (Algébrica) e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ (Trigonométrica).
   No anagrama LIATE, A precede T.
2. Na integral $\int x \ln x \, dx$, Exemplo 4.7, fizemos
   $u = \ln x$ (Logarítmica) e $dv = x \, dx$ (Algébrica).
   No anagrama LIATE, L precede A.
3. Na integral $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$, Exemplo 4.8, fizemos
   $u = \operatorname{arc\,tg} x$ (Inversa de trigonométrica) e $dv = 1 \, dx$ (Algébrica).
   No anagrama LIATE, I precede A.

Exemplo 4.9: calcular $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução: seguindo a sugestão dada acima, faremos $u = \operatorname{sen} x$ (trigonométrica) e $dv = e^x \, dx$ (exponencial). T vem antes de E no anagrama LIATE. Logo, temos que $du = (\operatorname{sen} x)' dx = \cos x \, dx$ e tomamos $v = e^x$. Então,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Parece que voltamos ao ponto de partida, não é?

Passamos da integral $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ à integral $\int e^x \cos x \, dx$, esta equivalente à primeira em nível de dificuldade. Continuaremos, no entanto, a seguir a receita do anagrama.

Na integral $J = \int e^x \cos x \, dx$ faremos $u = \cos x$, $dv = e^x \, dx$ (estas funções u e v são definidas em um novo contexto e referem-se a esta segunda integral).

Teremos $du = (\cos x)' dx = -\operatorname{sen} x \, dx$, e $v = e^x$. Então,

$$\begin{aligned} J = \int e^x \cos x \, dx = \int u \, dv &= uv - \int v \, du \\ &= e^x \cos x - \int (-\operatorname{sen} x) e^x \, dx \\ &= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx. \end{aligned}$$

O resultado final é interessante. Chamando $I = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$,

$$\begin{aligned} I = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - J \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I,$$

ou seja,

$$2I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + C,$$

e, então, obtemos

$$I = \frac{1}{2}(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x) + C.$$

4.10 Problemas

Calcule as seguintes integrais:

1. $\int x e^x \, dx$.

   Resposta: $e^x(x-1) + C$.

2. $\int \ln x \, dx$.

   Resposta: $x(\ln x - 1) + C$.

3. $\int x^n \ln x \, dx$ $(n \neq -1)$.

   Resposta: $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$.

4. $\int \ln(1+x^2)\,dx.$

Resposta: $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\text{arc tg}\,x + C.$

5. $\int x\,\text{arc tg}\,x\,dx.$

Resposta: $\frac{1}{2}[(x^2+1)\,\text{arc tg}\,x - x] + C.$

6. $\int \text{arc sen}\,x\,dx.$

Resposta: $x\,\text{arc sen}\,x + \sqrt{1-x^2} + C.$

7. $\int x\,\text{arc sen}\,x\,dx.$

Resposta: $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\,\text{arc sen}\,x + x\sqrt{1-x^2}] + C.$

8. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

Resposta: $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$

Sugestão: faça $u = \sqrt{x}.$

9. $\int \frac{\text{arc sen}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Resposta: $2\sqrt{x}\,\text{arc sen}\,\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$

10. $\int x\cos^2 x\,dx.$

Resposta: $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

Sugestão: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$

11. $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx.$

Resposta: $(x^2+7x-5)\frac{\text{sen}\,2x}{2} + (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\text{sen}\,2x}{4} + C.$

12. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$

Resposta: $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\,\text{sen}\,bx + a\cos bx) + C.$

13. $\int \frac{x\,\text{arc sen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Resposta: $x - \sqrt{1-x^2}\,\text{arc sen}\,x + C.$

14. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

Resposta: $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$

UNIDADE 5

Novas técnicas para integrais indefinidas

5.1 A integral definida

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Subdividamos o intervalo $[a, b]$ através de $n + 1$ pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Assim, $[a, b] = [a = x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{i-1}, x_i] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n = b]$.

O conjunto de pontos $\wp = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ constitui uma *subdivisão* ou *partição* do intervalo $[a, b]$.

Tomemos pontos $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$ em $[a, b]$, tais que

$$c_1 \in [x_0, x_1] = [a, x_1],\ c_2 \in [x_1, x_2],\ \ldots\ ,\ c_i \in [x_{i-1}, x_i],\ \ldots\ ,\ c_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

Sejam $\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \ldots\ ,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \ldots\ ,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ e formemos a soma

$$S = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Esta é uma *soma integral* de f, no intervalo $[a, b]$, correspondente à partição $\wp$ e à escolha de pontos intermediários $c_1, \ldots, c_n$.

Note que, quando $f(x) > 0$ em $[a, b]$, a soma integral de f, $S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ é a soma das áreas de n retângulos, sendo o i-ésimo retângulo, para $1 \leq i \leq n$, de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Isto é ilustrado na Figura 5.1.

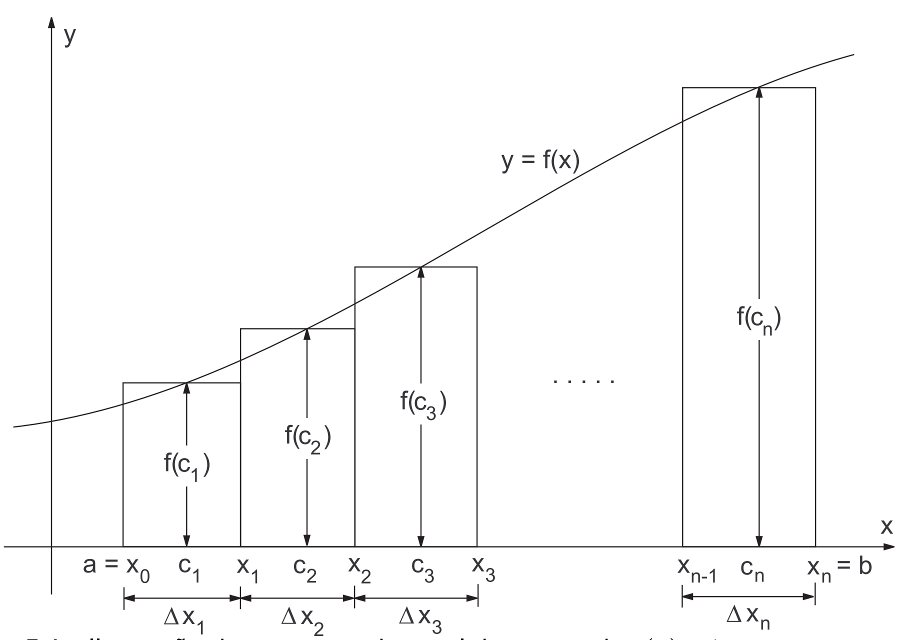


Figura 5.1 Ilustração de uma soma integral de f, quando $f(x) > 0$.

Seja Δ o maior dos números Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n. Escrevemos

$$\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} = \max \Delta x_i.$$

Tal Δ é também chamado de *norma da partição* $\wp$.

A integral definida de f, de a até b (ou no intervalo $[a, b]$) é o número real

$$\boxed{\gamma = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i}$$

Observação 5.1: se $f(x) > 0$ no intervalo $[a, b]$, quando $\max \Delta x_i \to 0$, o número k de subintervalos tende a ∞.

Os retângulos ilustrados na Figura 5.1 tornam-se cada vez mais estreitos e numerosos à medida que $\max \Delta x_i$ torna-se mais e mais próximo de 0.

Neste caso, $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ definirá a área compreendida entre a curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas verticais $x = a$, $x = b$.

Sumarizando, se $f(x) > 0$ em $[a, b]$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (\text{área sob o gráfico de } f, \text{ de } x = a \text{ até } x = b).$$

Observação 5.2: por outro lado, se $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$, teremos $\int_a^b f(x)\,dx = -A$, sendo A a área (positiva) da região plana compreendida entre o eixo x, o gráfico de f, e as retas $x = a$ e $x = b$. Note que, neste caso, feita uma subdivisão $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e escolhidos os pontos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, com $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, teremos

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i < 0,$$

pois $f(c_i) < 0$ para cada i, e $\Delta x_i > 0$ para cada i.

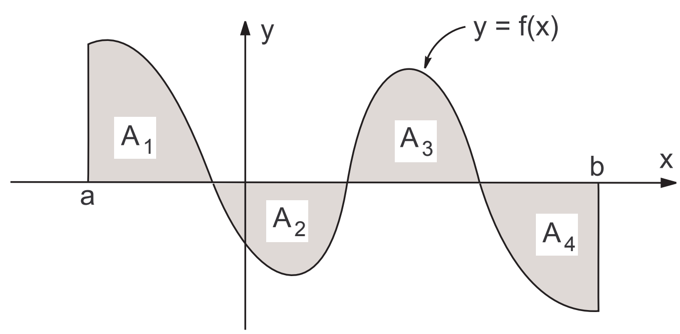


Figura 5.2 $\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4.$

Observação 5.3: se o gráfico de f, no intervalo $[a, b]$, é como o gráfico esboçado na Figura 5.2, então, sendo A_1, A_2, A_3 e A_4 as áreas (positivas) indicadas na figura, teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4.$$

Observação 5.4: pode-se demonstrar que se f é contínua em $[a,b]$, o limite

$$\boxed{\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx}$$

não depende das sucessivas subdivisões $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e nem das sucessivas escolhas de pontos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, com $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada i.

Assumiremos sem demonstração as propriedades seguintes.

Proposição 5.1: se f e g são contínuas em $[a,b]$, então, sendo k uma constante e $a < c < b$,

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$
3. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$
4. se $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

Observação 5.5: se f é contínua em $[a,b]$, são adotadas as seguintes convenções:

(i) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

(ii) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

Adotadas essas convenções, a Proposição 5.1, acima enunciada, continua verdadeira qualquer que seja a ordem dos limites de integração a, b e c, podendo ainda dois deles (ou os três) coincidirem.

5.2 O teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo estabelece o modo pelo qual as integrais definidas podem ser calculadas através de integrais indefinidas.

Teorema 5.1 (Teorema fundamental do cálculo): sendo f uma função contínua no intervalo $[a,b]$,

se $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$, então, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$

É costume denotar

$$[F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ou seja, sendo $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, obtemos

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exemplo 5.1: calcular a área compreendida entre a curva $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq \pi$.

Solução: como $\operatorname{sen} x \geq 0$ quando $0 \leq x \leq \pi$, temos que a área procurada é dada pela integral $A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. Temos $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.

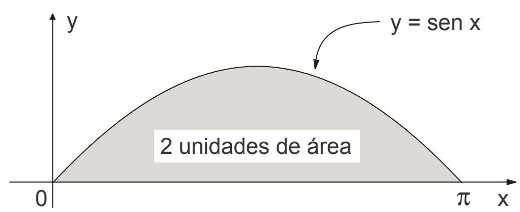


Figura 5.3 $\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx.$

Logo, pelo teorema fundamental do cálculo, temos que

$$A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

5.2.1 Integração definida com mudança de variável

Quando fazemos mudança de variável (integração por substituição), no caso de uma integral definida, podemos finalizar os cálculos com a nova variável introduzida, sem necessidade de retornar à variável original. Para tal, ao realizarmos a mudança de variável, trocamos adequadamente os limites de integração.

Suponhamos que $y = f(x)$ é uma função contínua em um intervalo I, com $a, b \in I$, e que $x = \varphi(t)$ é uma função de t derivável em um certo intervalo $J \subset \mathbb{R}$, satisfazendo às seguintes condições:

1. $f(\varphi(t)) \in I$ quando $t \in J$;
2. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, para certos $\alpha, \beta \in J$;
3. $\varphi'(t)$ é contínua em J.

Sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ em I, temos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

e como vimos, tomando $x = \varphi(t)$, teremos $dx = \varphi'(t)\,dt$ e

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Então, pelo teorema fundamental do cálculo, temos que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))\\ &= F(\varphi(t))\big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Exemplo 5.2: calcular $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx.$

Solução: Fazendo $u = 1 + x^2$, calculamos

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + C.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3} = 0.$$

Outra forma de calcular a integral seria trocando os limites de integração, ao realizar a mudança de variável. O resultado seria: para $x = -1$, $u = 2$ e para $x = 1$, $u = 2$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_2^2 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 0.$$

Exemplo 5.3: calcular a área delimitada pela circunferência de raio $a > 0$ cuja equação é $x^2 + y^2 = a^2$.

Solução: para calcular a área A desse círculo, basta calcular a área sob o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, acima do eixo x, entre os pontos $x = -a$ e $x = a$, ou seja, calcular

$$A/2 = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Faremos a substituição $x = a\,\mathrm{sen}\,t$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

Para $t = -\pi/2$, $x = -a$; para $t = \pi/2$, $x = a$. Para $x = a\,\mathrm{sen}\,t$, obtemos que $dx = a\cos t\,dt$ e $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$.

Agora, como $\cos t \ge 0$ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, temos que $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$.

Então,

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt,$$

usando a identidade $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\, dt \\
&= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt \\
&= \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi \right] - \frac{a^2}{2} \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(-\pi) \right] = \frac{\pi a^2}{2}.
\end{aligned}$$

E, portanto, a área do círculo é $A = \pi a^2$.

5.2.2 Integração definida por partes

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções deriváveis no intervalo $[a, b]$, com as derivadas $u'(x)$ e $v'(x)$ contínuas em $[a, b]$.

Sabemos que

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = uv' + vu',$$

integrando em ambos os lados da igualdade anterior, temos que

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'\, dx = \int_a^b u(x)v'(x)\, dx + \int_a^b v(x)u'(x)\, dx.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Portanto,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\, dx.$$

Em notação abreviada,

$$\boxed{\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du}$$

5.3 Problemas

Calcule as integrais definidas listadas abaixo.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$.

   Resposta: $\pi/2$.

2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Resposta: $\pi/4$.

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx$.

   Resposta: $\ln 2$.

4. $\displaystyle\int_1^{x} \frac{dt}{t}$.

   Resposta: $\ln x$.

5. $\displaystyle\int_0^{x} \operatorname{sen} t \, dt$.

   Resposta: $1 - \cos x$.

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$.

   Resposta: $1/3$.

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$.

   Resposta: $\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$.

   Sugestão: use a identidade $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, faça $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, e $\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg} u$.

8. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$.

   Resposta: $3\sqrt{2}/2$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

   Resposta: $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

   Sugestão: faça $x = \operatorname{tg} u$.

10. $\displaystyle\int_1^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x} \, dx$.

    Resposta: $4 - 2\operatorname{arc\,tg} 2$.

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{6 - 5\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}$.

    Resposta: $\ln \frac{4}{3}$.

12. Para cada $t \in [0, a]$, calcule a integral

    $$\int_0^{t} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx,$$

    interpretando-a como área sob a curva (semicírculo) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e acima do eixo x, no intervalo $[0, t]$ (Figura 5.4).

    Resposta: $\frac{t}{2}\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{a}$.

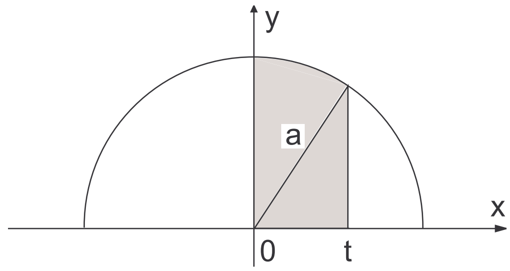


Figura 5.4 Área sob a curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ é acima do eixo x, no intervalo $[0, t]$.

13. Calcular a integral $\displaystyle\int_{-1/2}^{4} (2xe^{-x} + e^{1/2})\,dx$.

    Resposta: $\dfrac{11\sqrt{e}}{2} - \dfrac{10}{e^4}$.

5.4 Completando quadrados em integrais indefinidas

Da tabela ampliada de integrais imediatas (Tabela 4.1 página 103), temos as integrais da Tabela 5.1

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C.$$

Tabela 5.1 $(a > 0,\ \lambda \neq 0)$

Voltaremos nossa atenção agora ao cálculo das integrais

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \qquad I_2 = \int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \qquad I_4 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

nas quais, a, b, c, A e B são números reais e $a \neq 0$.

Veremos que, para calcular cada uma das integrais I_1, I_2, I_3, e I_4, tudo (ou quase tudo) que temos a fazer é *completar um quadrado* em $ax^2 + bx + c$ e, então, usar a Tabela 5.1 de integrais.

Lembramos que *completar um quadrado em* $ax^2 + bx + c$ é escrever este trinômio do segundo grau na forma $a(x + m)^2 + n$.

Primeiramente, *colocamos o coeficiente* a *em evidência*:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Completamos, então, o quadrado em $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}$:

$$x^2 + \beta x + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right).$$

Fazemos, então, para o cálculo da integral, a substituição

$$u = x + \frac{\beta}{2}, \quad du = dx$$

e teremos

$$x^2 + \beta x + \gamma = u^2 \pm k^2, \qquad ax^2 + bx + c = a(u^2 \pm k^2).$$

Logo, com alguns pequenos ajustes, recaímos em integrais da Tabela 5.1.

Exemplo 5.4: calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1}$.

Solução: começamos fazendo

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = 2\left[u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right], \end{aligned}$$

sendo $u = x + 3/4$, temos que $du = dx$. Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1} &= \int \frac{du}{2\left[u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - u^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \ln\left|\frac{\frac{1}{4} + u}{\frac{1}{4} - u}\right| + C \\ &= -\ln\left|\frac{1 + 4u}{1 - 4u}\right| + C = -\ln\left|\frac{1 + 4x + 3}{1 - (4x + 3)}\right| + C \\ &= -\ln\left|\frac{4x + 4}{4x + 2}\right| + C = -\ln\left|\frac{2x + 2}{2x + 1}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{2x + 1}{2x + 2}\right| + C. \end{aligned}$$

Exemplo 5.5: calcular $\displaystyle\int \frac{x - 1}{\sqrt{1 - x - x^2}}dx$.

Solução: começamos fazendo

$$\begin{aligned} 1 - x - x^2 &= -(x^2 + x - 1) = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right] \\ &= -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $u = x + 1/2$, temos que $du = dx$ e $x = u - 1/2$. Logo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx &= \int \frac{x-1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx \\
&= \int \frac{u-3/2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du \\
&= \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du \\
&= I - \frac{1}{2}J,
\end{aligned}$$

sendo $I = \displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2 - u^2}}\,du$ e $J = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2 - u^2}}\,du.$

Para o cálculo de I, fazemos $w = (\sqrt{5}/2)^2 - u^2$. Logo, $dw = -2u\,du$, então,

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du &= \int \frac{-\frac{1}{2}dw}{\sqrt{w}} = -\sqrt{w} + C \\
&= -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2} = -\sqrt{1-x-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}
J = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}\,du &= \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{\sqrt{5}/2} + C \\
&= \operatorname{arc\,sen} \frac{2u}{\sqrt{5}} + C = \operatorname{arc\,sen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx &= I - \frac{1}{2}J \\
&= -\sqrt{1-x-x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.
\end{aligned}$$

5.5 Algumas integrais envolvendo funções trigonométricas

5.5.1 Integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, m e n inteiros não negativos

Primeiro caso: m ou n é um inteiro ímpar (ou seja, da forma $2k+1$).

Consideramos $J = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx.$

Sendo m e n inteiros não negativos, no caso em que o expoente m é ímpar, teremos $m = 2k + 1$ e, então,

$$\begin{aligned} J &= \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx. \end{aligned}$$

Agora fazemos $\cos x = t$ e, então, $dt = -\operatorname{sen} x \, dx$. Obtemos

$$J = \int (1 - t^2)^k t^n (-dt) = -\int (1 - t^2)^k t^n \, dt,$$

que é uma integral de um polinômio em t.

Se m é par, mas n é ímpar, transformamos a integral J em uma integral de um polinômio por um procedimento análogo.

Exemplo 5.6: calcular $J = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx$.

Solução: consideramos

$$\begin{aligned} J &= \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^4 x \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^6 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int t^6 (1 - t^2)^2 \, dt, \quad \text{sendo } t = \operatorname{sen} x, \ dt = \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} J &= \int t^6 (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10}) \, dt \\ &= \frac{t^7}{7} - \frac{2t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C \\ &= \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} - \frac{2 \operatorname{sen}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} + C. \end{aligned}$$

Segundo caso: m e n são ambos pares (ou seja, da forma $2k$).

Neste caso, abaixamos os graus das potências de funções trigonométricas, mediante as relações

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}, \tag{5.1}$$

ou seja, fazemos

$$\begin{aligned} J &= \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^{2\ell} x \, dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k (\cos^2 x)^\ell \, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^\ell dx. \end{aligned}$$

Exemplo 5.7: calcular $I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$.

Solução: observe primeiro que $I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$.

Fazendo uso das relações trigonométricas em (5.1), temos

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \, dx.
\end{aligned}
$$

Calculando separadamente as quatro integrais, temos:

$I_1 = \int dx = x,$ (juntaremos adiante todas as constantes em uma só)

$I_2 = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x,$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx \qquad \left(\cos^2 a = \tfrac{1+\cos 2a}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int \cos^3 2x \, dx \qquad \text{(potência de cosseno, de expoente ímpar)} \\
&= \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x \, dx \\
&= \int (1 - t^2)\cdot \frac{dt}{2} \qquad \left(t = \operatorname{sen} 2x,\ \ dt = 2\cos 2x \, dx, \text{ logo } \cos 2x \, dx = \tfrac{dt}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}(I_1 - I_2 - I_3 + I_4) \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C.
\end{aligned}
$$

5.6 Fórmulas de redução (ou de recorrência)

As *fórmulas de redução*, ou *fórmulas de recorrência*, são frequentemente encontradas em tábuas de integrais.

Exemplo 5.8: empregando a fórmula de redução

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \sec^{n-2} x\, dx \tag{5.2}$$

calcule as integrais $\int \sec^3 x\, dx$, $\int \sec^4 x\, dx$, e $\int \sec^5 x\, dx$.

Solução: aplicando a fórmula dada para $n = 3$,

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\, dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \sec^2 x\, dx \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + C.\end{aligned}$$

Para $n = 5$, temos

$$\begin{aligned}\int \sec^5 x\, dx = I_5 &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4} I_3 = \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2} I_1\right) \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3 \operatorname{tg} x \sec x}{8} + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.\end{aligned}$$

5.7 Substituições trigonométricas

As *substituições trigonométricas* são substituições empregadas em integrais envolvendo uma das expressões $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$, nas quais a variável x é substituída (correspondentemente) por uma das funções $a \operatorname{sen} \theta$, $a \operatorname{tg} \theta$ e $a \sec \theta$.

Os três procedimentos de substituições trigonométricas, habitualmente usados, são ilustrados geometricamente nas Figuras 5.5 e 5.6.

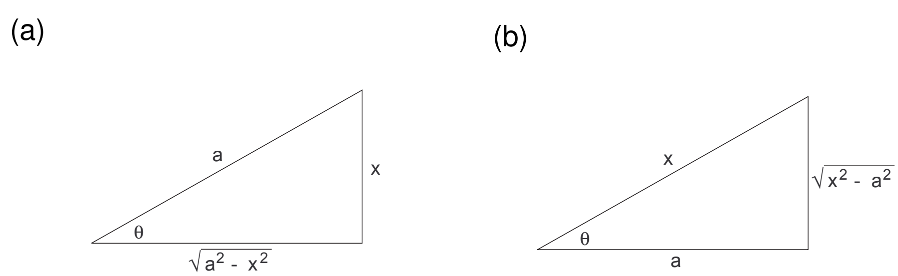


Figura 5.5 Em (a) $\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta\, d\theta$, $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \cos\theta$. Em (b), $\frac{a}{x} = \cos\theta$, ou $\frac{x}{a} = \sec\theta$, $dx = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$, $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \operatorname{tg}\theta$. Em ambos os casos, a raiz quadrada da diferença de quadrados é um cateto.

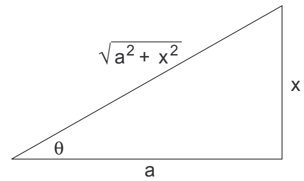


Figura 5.6 A raiz quadrada $\sqrt{a^2+x^2}$ é interpretada geometricamente como sendo a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos x e a. Agora, $\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\theta$, $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$ e $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} = \sec\theta$.

Exemplo 5.9: calcular $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Solução: para o cálculo desta integral, usaremos uma substituição trigonométrica, baseada no esquema geométrico da Figura 5.5 (a).

Observando as relações trigonométricas da Figura 5.5 (a), fazemos

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \cos\theta, \quad dx = a\cos\theta\, d\theta.$$

Temos, então,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a^2\cos^2\theta\, d\theta.$$

Usando a relação $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$, temos

$$\int a^2\cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2}{4}\operatorname{sen}2\theta + C.$$

Agora substituímos

$$\theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}, \quad \operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$$

e obtemos

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

No caso de uma integral definida, ao realizar a mudança de variável podemos também trocar os limites de integração, tal como ilustrado no exemplo seguinte.

Exemplo 5.10: calcular $\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\,dx$.

Solução: para desenvolver a estratégia de substituição trigonométrica, utilizamos a Figura 5.7.

Então, teremos que

$$\frac{x}{3} = \operatorname{tg}\theta, \qquad dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \quad \text{e} \quad \frac{3}{\sqrt{9+x^2}} = \cos\theta,$$

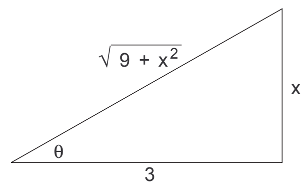


Figura 5.7 $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{9+x2}}$.

ou seja,

$$\sqrt{9+x^2} = 3\sec\theta.$$

Sendo $x = 3\,\mathrm{tg}\,\theta$, tomaremos θ assumindo valores de 0 a $\pi/4$ e assim x percorrendo os valores de 0 a 3.

Então,

$$\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} 3\sec\theta\cdot 3\sec^2\theta\,d\theta = 9\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta.$$

Conforme vimos no Exemplo 5.8,

$$\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\,dx &= 9\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta = 9\left[\frac{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\,\theta|\right]_0^{\pi/4}\\
&= 9\left[\frac{\sec(\pi/4)\,\mathrm{tg}(\pi/4)}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec(\pi/4)+\mathrm{tg}(\pi/4)|\right]\\
&\quad -9\left[\frac{\sec 0\,\mathrm{tg}\,0}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec 0 + \mathrm{tg}\,0|\right]\\
&= 9\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right] - 9\left[0 + \frac{1}{2}\ln 1\right]\\
&= \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2}\ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

5.8 Problemas

Integrais que requerem completamento de quadrados:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.
   Resposta: $\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+1}{2} + C$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$.
   Resposta: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$.

3. $\displaystyle\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}\,dx.$

Resposta: $\ln|3x^2-7x+11|+C.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}.$

Resposta: $\frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}}.$

Resposta: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|6x+5+\sqrt{12(3x^2+5x)}\right|+C.$

6. $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

Resposta: $2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$

Integrais envolvendo funções trigonométricas:

1. $\displaystyle\int \text{sen}^3 x\,dx.$

Resposta: $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$

2. $\displaystyle\int \text{sen}^5 x\,dx.$

Resposta: $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$

3. $\displaystyle\int \cos^4 x\,\text{sen}^3 x\,dx.$

Resposta: $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C.$

4. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^4 x}\,dx.$

Resposta: $\text{cosec}\,x-\frac{1}{3}\text{cosec}^3 x+C.$

Sugestão: use o mesmo procedimento descrito na página 124 para o cálculo da integral $\displaystyle\int \text{sen}^m x\cos^n x\,dx$, quando m ou n é um expoente ímpar.

5. $\displaystyle\int \text{sen}^4 x\,dx.$

Resposta: $\frac{3}{8}x-\frac{\text{sen}\,2x}{4}+\frac{\text{sen}\,4x}{32}+C.$

6. $\displaystyle\int \text{tg}^3 x\,dx.$

Resposta: $\frac{\text{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$

Sugestão: $\text{tg}^3 x=\text{tg}\,x\,\text{tg}^2 x=\text{tg}\,x(\sec^2 x-1).$

7. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx.$

Resposta: $\frac{3}{5}\cos^{5/3} x+3\cos^{-1/3} x+C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5\,\text{sen}\,x}$.

Resposta: $\frac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\text{tg}\,\frac{x}{2}-2}{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}-1}\right| + C.$

Sugestão: use a identidade $\text{sen}\,x = \dfrac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\,\frac{x}{2}}$ (temos também $\cos x = \frac{1-\text{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\,\frac{x}{2}}$).

Faça $\text{tg}\,\frac{x}{2} = u$, com $\frac{x}{2} = \text{arc}\,\text{tg}\,u$ e, então, $dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$.

Fórmulas de redução:

1. Usando a fórmula de recorrência

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\,\text{sen}\,x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx,$$

mostre que

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\,\text{sen}\,x\cos^3 x + \frac{3}{8}\,\text{sen}\,x\cos x + \frac{3x}{8} + C;$$
$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{1}{7}\,\text{sen}\,x\cos^6 x + \frac{6}{35}\,\text{sen}\,x\cos^4 x + \frac{8}{35}\,\text{sen}\,x\cos^2 x + \frac{16}{35}\,\text{sen}\,x + C.$$

2. Usando a fórmula de recorrência

$$\text{tg}^n x\,dx = \frac{\text{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2}x\,dx$$

calcule

(a) $\displaystyle\int \text{tg}^5 x\,dx.$

Resposta: $\frac{\text{tg}^4 x}{4} - \frac{\text{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$

(b) $\displaystyle\int \text{tg}^6 x\,dx.$

Resposta: $\frac{\text{tg}^5 x}{5} - \frac{\text{tg}^3 x}{3} + \text{tg}\,x - x + C.$

Substituições trigonométricas:

1. Calcule as integrais seguintes, através de substituições trigonométricas.

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx.$

Resposta: $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \text{arc}\,\text{sen}\,\frac{x}{a} + C.$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$

Resposta: $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx.$

Resposta: $\sqrt{x^2-a^2} - a\,\text{arc}\cos\frac{a}{x} + C.$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$.

Resposta: $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$.

UNIDADE 6

Integração de funções racionais e aplicações da integral definida

6.1 Integração de funções racionais

Nesta seção estudaremos o cálculo de integrais

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx,$$

nas quais $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais em x. Lembramos que tais funções $\frac{p(x)}{q(x)}$ são chamadas *funções racionais*.

Quando o grau de $p(x)$ é maior que ou igual ao grau de $q(x)$, devemos primeiramente dividir $p(x)$ por $q(x)$,

$$\begin{array}{r|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array},$$

obtendo quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$, de forma que

$$p(x) = q(x)Q(x) + R(x),$$

sendo $R(x) = 0$ ou uma função polinomial de grau menor que o grau da função polinomial divisor $q(x)$.

Neste caso,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)Q(x) + R(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)},$$

e, então,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{q(x)}\, dx.$$

Exemplo 6.1: suponhamos que queremos calcular

$$I = \int \frac{2x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x + 2}\, dx.$$

Solução: como o grau do numerador é maior que o grau do denominador no integrando, devemos primeiramente proceder à divisão de polinômios a seguir, na qual obteremos $Q(x) = 2x + 1$ e $R(x) = 2x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 1 & x^3 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} 2x^4 + \quad - 6x^2 + 4x & 2x + 1 \\ \cline{1-1} x^3 \qquad - x + 1 & \\ x^3 \qquad - 3x + 2 & \\ \cline{1-1} 2x - 1. & \end{array}$$

Temos

$$I = \int \frac{(x^3 - 3x + 2)(2x + 1) + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}\, dx = \int (2x + 1)\, dx + \int \frac{2x - 1}{x^3 - 3x + 2}\, dx.$$

Observação 6.1: de acordo com o anterior, precisamos apenas estudar integrais de funções racionais próprias, isto é, funções racionais nas quais o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

6.1.1 Decompondo funções racionais em frações parciais

6.1.1.1 Primeiro caso: o denominador tem raízes reais, distintas entre si.

Suponhamos que na função racional própria $\frac{p(x)}{q(x)}$ o denominador, sendo de grau n, fatora-se em produtos lineares distintos

$$q(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n),$$

ou então,

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n),$$

tendo, os n fatores lineares, raízes distintas entre si

Então aplicamos um resultado da álgebra de frações racionais que diz que, neste caso, existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)} = \frac{A_1}{a_x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n},$$

sendo os coeficientes das *frações parciais*, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, determinados de maneira única.

Neste caso,

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx &= \int \frac{A_1}{a_1x + b_1}\, dx + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}\, dx \\ &= \frac{A_1}{a_1} \ln|a_1x + b_1| + \cdots + \frac{A_n}{a_n} \ln|a_nx + b_n| + C.\end{aligned}$$

Exemplo 6.2: calcular $\int \frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)}\, dx$.

Solução: começamos fazendo

$$\frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)} = \frac{x^2 - 3}{(x - 2)(x + 2)(2x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{2x + 1}.$$

Para calcular os coeficientes A, B e C, somamos as três frações parciais à direita, igualando a soma à função racional original.

$$\frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)} = \frac{A(x + 2)(2x + 1) + B(x - 2)(2x + 1) + C(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)(2x + 1)}.$$

Observando que os denominadores são iguais, devemos obter A, B e C de modo a termos a igualdade (identidade) de polinômios

$$x^2 - 3 = A(x+2)(2x+1) + B(x-2)(2x+1) + C(x-2)(x+2). \tag{6.1}$$

Desenvolvendo o produto à direita e comparando os coeficientes dos termos de mesmo grau, chegaremos a três equações lineares nas incógnitas A, B e C que teremos que resolver. Mas, ao invés de usar esse maneira de achar A, B e C, podemos usar o fato que os polinômios à esquerda e à direita em (6.1) são iguais e eles têm o mesmo valor para cada x real.
Tomando $x = -2$ em (6.1), obtemos $B(-2-2)(-4+1) = 1$ e, então, $B = 1/12$.
Agora para $x = 2$ em (6.1), temos $A \cdot 20 = 1$ e, então, $A = 1/20$.
Já para $x = -\frac{1}{2}$ em (6.1), encontramos $C(-\frac{1}{2} - 2)(-\frac{1}{2} + 2) = -15/4$ e $C = \frac{11}{15}$.

Observe que os valores de x são as raízes de $(x^2 - 4)(2x + 1)$.

Assim,

$$\int \frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)}\, dx = \int \frac{1/40}{x - 2}\, dx + \int \frac{1/12}{x + 2}\, dx + \int \frac{11/15}{2x + 1}\, dx$$
$$= \frac{1}{40} \ln|x - 2| + \frac{1}{12} \ln|x + 2| + \frac{11}{30} \ln|2x + 1| + C.$$

6.1.1.2 Segundo caso: o denominador tem somente raízes reais, mas algumas raízes múltiplas

No próximo exemplo ilustramos uma decomposição, em frações parciais, de uma função racional própria, cujo denominador tem apenas raízes reais, tendo, porém, raízes múltiplas.

Exemplo 6.3: calcular $\int \frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}\, dx$.

Solução: aqui a raiz -1, do denominador, é de multiplicidade 3. A decomposição, em frações parciais que funciona neste caso é da forma

$$\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}, \tag{6.2}$$

na qual teremos A, B, C e D determinados de maneira única.

Como antes, primeiramente somamos as frações parciais:

$$\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^3 + B(2x-1) + C(2x-1)(x+1) + D(2x-1)(x+1)^2}{(2x-1)(x+1)^3}.$$

Tendo à esquerda e à direita o mesmo denominador, teremos:

$$A(x+1)^3 + B(2x-1) + C(2x-1)(x+1) + D(2x-1)(x+1)^2.$$

Quando $x=-1$ em (6.2), temos $-3B=4$. Logo, $B=-\dfrac{4}{3}$.

Já para $x=1/2$ em (6.2), obtemos $A\cdot\dfrac{27}{8}=\dfrac{1}{4}$. Portanto $A=\dfrac{2}{27}$.

Tendo esgotado, para valores de x, as raízes de $(2x-1)(x+1)^3$, tomamos agora valores de x que não produzam em nossos cálculos valores numéricos muito grandes.

Tomando $x=0$ em (6.2), temos $A-B-C-D=0$ e no caso de $x=1$, obtemos $8A+B+2C+4D=1$. Logo,

$$\begin{cases} C+D= & \frac{38}{27}; \\ 2C+4D= & \frac{52}{27}, \end{cases}$$

e, então, $C=\dfrac{31}{27}$, $D=\dfrac{7}{27}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}\,dx &= \int\frac{2/27}{2x-1}\,dx+\int\frac{-4/3}{(x+1)^3}\,dx+\int\frac{31/27}{(x+1)^2}\,dx+\int\frac{7/27}{x+1}\,dx\\ &=\frac{1}{27}\ln|2x-1|+\frac{2}{3(x+1)^2}-\frac{31}{27(x+1)}+\frac{7}{27}\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

Problema 6.1: calcular $\displaystyle\int\frac{x^3-2x+1}{(3x-2)^2(5x+1)^3(1-7x)}\,dx.$

Resposta:

$$\frac{7}{4976468640}\left(\frac{205920}{14-21x}-\frac{66160380}{35x+7}-\frac{42697512}{7(5x+1)^2}-5855005\ln|1-7x|+\right.$$

$$\left.+123840\ln|2-3x|+5731165\ln|5x+1|\right)+C.$$

Sugestão: determine $A,\ldots,F$ na seguinte descomposição em frações parciais

$$\frac{x^3-2x+1}{(3x-2)^2(5x+1)^3(1-7x)}=\frac{A}{(3x-2)^2}+\frac{B}{3x-2}+\frac{C}{(5x+1)^3}+\frac{D}{(5x+1)^2}+\frac{E}{5x+1}+\frac{F}{1-7x}.$$

6.1.1.3 Terceiro caso: o denominador tem raízes complexas não reais

Um terceiro caso de decomposição, em frações parciais, ocorre quando o denominador tem fatores quadráticos irredutíveis (fatores de grau 2 sem raízes reais), como no seguinte:

Exemplo 6.4:

a) calcular a seguinte integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{3x^2 - x}{(x-2)^3(x^2+x+4)(x^2+1)}dx,$$

na qual $x^2 + x + 4$ e $x^2 + 1$ não tem raízes reais.

Solução: neste caso, devemos fazer

$$\frac{3x^2 - x}{(x-2)^2(x^2+x+4)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+4} + \frac{Fx+G}{x^2+1},$$

e proceder tal como antes na busca dos coeficientes A a G.

Ou seja, na decomposição em frações parciais, para os fatores lineares no denominador seguimos as regras anteriores, mas sobre cada fator quadrático vai um polinômio do primeiro grau $Mx + N$.

b) E se tivermos no denominador, potências de fatores quadráticos irredutíveis, tal como na integral $\displaystyle\int \frac{x^5 + 3x - 5}{(x^2 - 3x + 4)^2(x^2+2)^3(3x-5)}\,dx$?

Neste caso, notando que $x^2 + 3x - 5$ e $x^2 + 2$ não têm raízes reais, fazemos

$$\begin{aligned}\frac{x^5 + 3x - 5}{(x^2 - 3x + 4)^2(x^2+2)^3(3x-5)} &= \frac{Ax+B}{(x^2-3x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-3x+4}\\ &+ \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3} + \frac{Gx+H}{(x^2+2)^2} + \frac{Ix+J}{x^2+2} + \frac{K}{3x-5}\end{aligned}$$

Este é um cálculo deveras longo. Para calcular a integral de fração racional elementar, devemos recorrer às fórmulas de recorrência descritas a seguir.

Observação 6.2: na verdade, esse tipo de decomposição funciona mesmo se os fatores quadráticos têm raízes reais, desde que estas não sejam raízes de outros fatores do denominador.

Exemplo 6.5: calcular a integral

$$\int \frac{x^3 - 2}{(x^2-4)(2x+1)}\,dx.$$

Solução: podemos fazer a decomposição

$$\frac{x^2 - 3}{(x^2-4)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-4} + \frac{C}{2x+1}$$

e determinar os coeficientes A, B e C, como anteriormente.

6.1.1.4 Fórmulas de recorrência para $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

Uma boa tábua de integrais nos fornecerá

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^n} = \frac{x}{2k^2(n-1)(x^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2k^2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^{n-1}}} \qquad (6.3)$$

bem como também (aqui λ pode ser uma constante negativa)

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n} = \frac{x}{2\lambda(n-1)(x^2+\lambda)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\lambda(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n-1}}} \tag{6.4}$$

De um modo mais geral, encontramos também em uma boa tábua de integrais o resultado seguinte.

Proposição 6.1: sendo $a > 0$, $n \geq 2$ e $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, temos que

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{-(2ax+b)}{\Delta\cdot(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} \tag{6.5}$$

$$+\frac{-2a(2n-3)}{\Delta\cdot(n-1)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \tag{6.6}$$

e

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + (N - \frac{b}{2a})}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(N - \frac{b}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \tag{6.7}$$

sendo $\int \frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{du}{u}$ pela substituição $u = ax^2+bx+c$, $du = (2ax+b)\,dx$.

6.2 Problemas

Integração de funções racionais:

Calcule as integrais de funções racionais.

1. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx.$

   Resposta: $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C.$

2. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}.$

   Resposta: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right| + C.$

3. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}.$

   Resposta: $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + C.$

4. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}.$

   Resposta: $\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$

5. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx.$

   Resposta: $\frac{3}{x-8} + \ln\frac{(x-2)^2}{x^2} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

Resposta: $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Resposta: $\frac{1}{6}\ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

8. $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

Resposta: $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x + C$.

Recorrência em integrais de funções racionais

use as fórmulas de recorrência (6.3) a (6.7) para mostrar que

1. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x^2+4)^3}\,dx = \frac{-2x-16}{32(x^2+4)^2} - \frac{3x}{128(x^2+4)} - \frac{3}{256}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^4}$
$\displaystyle= \frac{2x-4}{12(x^2-4x+5)^3} + \frac{5(2x-4)}{48(x^2-4x+5)^2} + \frac{5(2x-4)}{32(x^2-4x+5)} + \frac{5}{16}\operatorname{arc\,tg}(x-2) + C.$

6.3 Aplicações selecionadas da integral definida

6.3.1 Área de uma região plana

Suponhamos que f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Para $x \in [a, b]$, consideramos, apoiada à esquerda no ponto x, uma fatia retangular vertical de base Δx e altura $h(x) = f(x) - g(x)$ como na Figura 6.1. A área dessa fatia será dada por $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$.

Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em vários subintervalos de comprimento Δx e sobre cada um deles construirmos uma área ΔA, como acima, teremos a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, dada aproximadamente por

$$\sum \Delta A = \sum [f(x) - g(x)]\Delta x,$$

em que pelo bem da simplicidade, estamos omitindo índices do somatório.

A área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, será dada pelo limite de tais somas integrais, quando $\Delta x \to 0$, ou seja,

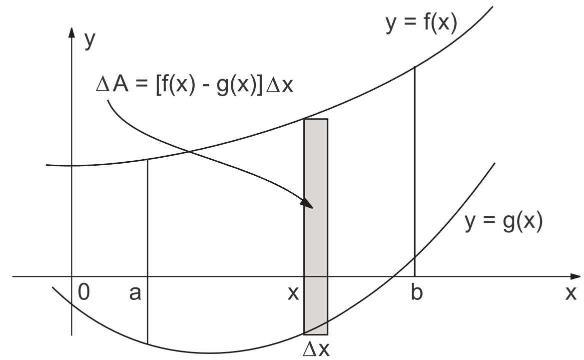


Figura 6.1 Fatia retangular vertical de base Δx e altura $h(x) = f(x) - g(x)$, apoiada à esquerda no ponto x.

será dada por

$$\boxed{A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum [f(x) - g(x)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

Sendo $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$, costuma-se simbolizar $dA = [f(x) - g(x)]dx$. Temos, então, $A = \int_a^b dA$.

Costuma-se dizer que $dA = [f(x) - g(x)]\,dx$ é um *elemento infinitesimal de área*, de altura $f(x)-g(x)$ sobre um *elemento infinitesimal de comprimento* dx. O símbolo de integração, $\int$ provém da forma de um arcaico S e tem o significado de "*soma* de um número infinito de quantidades infinitesimais" . Assim, $f(x) \geq 0$, implica que $\int_a^b f(x)\,dx$ corresponde, *grosso modo*, a uma soma de "elementos infinitesimais de área", de altura $f(x)$ e base dx, com x "variando" de a até b.

Exemplo 6.6: calcular a área delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

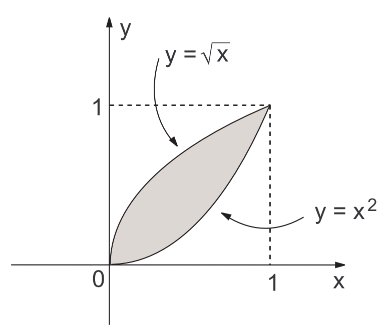


Figura 6.2 Área delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução: as curvas dadas se interceptam em $x_0 = 0$ e em $x_1 = 1$ (soluções de $x^2 = \sqrt{x}$). Para $0 \leq x \leq 1$, temos $\sqrt{x} \geq x^2$. Veja a Figura 6.2.

Assim sendo, a área entre as duas curvas é dada por

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\, dx = \int_0^1 [x^{1/2} - x^2]\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

6.3.2 Média ou valor médio de uma função

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Em $[a, b]$ tomemos os $n + 1$ pontos igualmente espaçados

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

isto é, tais que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

A média aritmética dos $n + 1$ valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ é dada por

$$\mu_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n+1}.$$

Definiremos a média (ou valor médio) da função f no intervalo $[a, b]$ como sendo

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty} \mu_n.$$

É possível demonstrar que

$$\boxed{\bar{f} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}}$$

Exemplo 6.7: determine o valor médio de $f(x) = x^2$ no intervalo $a \le x \le b$.

Solução: o valor médio de f em $[a, b]$ é dado por

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)\\ &= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.\end{aligned}$$

6.3.3 Volume de um sólido

Na Figura 6.3, para cada x, $a \le x \le b$, um plano perpendicular a um eixo x corta um sólido (com forma de uma batata) determinando neste uma secção transversal de área $A(x)$. De $x = a$ até $x = b$, são determinadas as áreas de todas as secções transversais desse sólido, sendo $b - a$ o seu "comprimento". Qual é o seu volume?

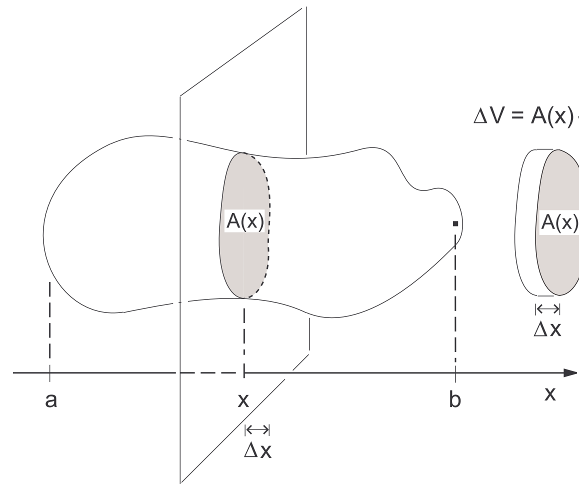


Figura 6.3 Para cada x, $a \leq x \leq b$, um plano perpendicular a um eixo x corta um sólido determinando uma secção transversal de área $A(x)$. Uma fatia do sólido terá volume $\Delta V = A(x) \cdot \Delta x$.

Suponhamos que o intervalo $[a, b]$ é subdividido em n subintervalos, todos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$.

Se x é um ponto dessa subdivisão, determina-se um volume de uma fatia "cilíndrica", de "base" com área $A(x)$ e "altura" Δx,

$$\Delta V = V(x) \cdot \Delta x.$$

Uma aproximação do volume do sólido é dada pelo somatório desses vários volumes cilíndricos,

$$V \cong \sum \Delta V = \sum_x A(x) \cdot \Delta x,$$

sendo o somatório aqui escrito sem os habituais índices i para simplificar a notação. Quanto mais finas as fatias "cilíndricas", mais próximo o somatório estará do volume do sólido, sendo seu volume igual a

$$\boxed{V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum A(x) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx}$$

Os cientistas de áreas aplicadas costumam dizer que $dV = A(x) \cdot dx$ é um *elemento infinitesimal de volume*, construído sobre um ponto x, de um "cilindro" de área da base $A(x)$ e altura (espessura) "infinitesimal" dx. Ao "somar" os infinitos elementos de volume, temos $\displaystyle\int_a^b dV = \int_a^b A(x)\, dx$ igual ao volume do sólido.

Exemplo 6.8: qual é o volume de um tronco de pirâmide, de altura h, cuja base é um quadrado de lado a e cujo topo é um quadrado de lado b?

Solução: posicionemos um eixo x perpendicular às duas bases. Cada ponto (altura) x demarcado nesse eixo corresponde, no tronco de pirâmide, a uma secção transversal quadrada, de modo que $x = 0$ corresponde à base quadrada de lado a e $x = h$ corresponde ao topo do quadrado de lado b. Veja a Figura 6.4.

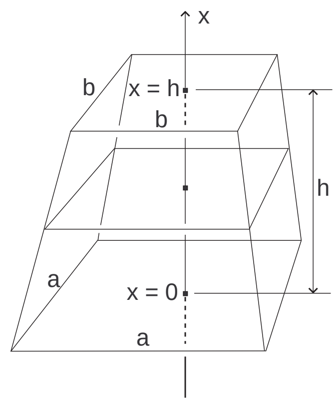


Figura 6.4 Tronco de pirâmide, de altura h, cuja base é um quadrado de lado a e cujo topo é um quadrado de lado b.

Procurando uma função afim, $f(x) = mx + n$, tal que $f(0) = a$ e $f(h) = b$, encontramos $f(x) = a + \frac{b-a}{h}x$.

A área da secção transversal, na altura x, é dada por

$$A(x) = \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2.$$

O volume do tronco de pirâmide é então

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2 dx.$$

Fazendo $u = a + \frac{b-a}{h}x$, temos $du = \frac{b-a}{h}\,dx$. Além disso, $u = a$ para $x = 0$ e $u = b$ para $x = h$ e, então,

$$\begin{aligned} V = \int_0^h A(x)\,dx &= \frac{h}{b-a}\int_a^b u^2\,du \\ &= \frac{h}{b-a}\cdot\left.\frac{u^3}{3}\right|_a^b = \frac{h}{3(b-a)}(b^3 - a^3) = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Observação 6.3: note que o volume do tronco de pirâmide é $1/3$ do produto de sua altura pelo valor médio das áreas das secções transversais (veja o Exemplo 6.7). Conforme um antigo papiro, esta fórmula já era conhecida pela civilização egípcia do segundo milênio a.C.

6.3.3.1 Volume de um sólido de revolução

Quando rotacionamos uma região do plano xy em torno do eixo x ou do eixo y, realizando uma volta completa, o lugar geométrico descrito pelos pontos da região é o que chamamos um *sólido de revolução*.

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo x, uma região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Para cada $x \in [a, b]$, um plano perpendicular ao eixo x, cortando este no ponto x, determina no sólido de revolução uma secção transversal. Esta é obtida pela revolução completa, em torno do eixo x, do segmento vertical $A_x B_x$, sendo $A_x = (x, g(x))$ e $B_x = (x, f(x))$. Veja a Figura 6.5.

A área dessa secção transversal é a área de uma região plana compreendida entre dois círculos concêntricos de centro $(x, 0)$, sendo um menor, de raio $g(x)$, e outro maior, de raio $f(x)$. Como a área de um círculo de raio r é πr^2, temos que a área $A(x)$ da secção transversal do sólido de revolução é dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2.$$

Portanto, o volume do sólido de revolução será

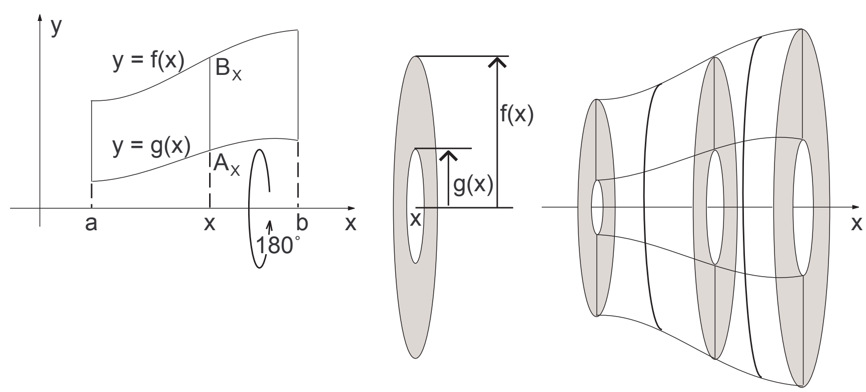


Figura 6.5 Para cada $x \in [a, b]$ um plano perpendicular ao eixo x, cortando o eixo no ponto x, determina no sólido de revolução uma secção transversal circular ou anular.

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b (\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2)\,dx}$$

Se a região plana for delimitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, teremos $g(x) = 0$ e, então,

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx.$$

Exemplo 6.9: calcule o volume de uma esfera de raio R.

Solução: a esfera de raio R pode ser interpretada como o sólido obtido pela revolução da região semicircular $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$, em torno do eixo x. Uma tal região é delimitada pelas curvas $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ e $y = 0$, com $-R \leq x \leq R$. Assim, aqui $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$, sendo

$$dV = A(x)\,dx = \pi[f(x)]^2\,dx = \pi(R^2 - x^2)\,dx$$

o elemento de volume a integrar. Portanto,

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

6.3.4 Área de uma superfície de revolução

Consideremos a curva $y = f(x)$, gráfico de uma função f contínua, a qual assumiremos que tem derivada f' também contínua, para $a \leq x \leq b$.

Rotacionando-se essa curva em torno do eixo x, obtemos uma superfície de revolução.

A área da superfície obtida pela revolução da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x é dada por

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}$$

6.3.5 Centro de gravidade de uma figura plana

Se temos em um plano ou no espaço n pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tendo massas m_1, m_2, $\ldots$, m_n, respectivamente, o centro de massa $\bar{P}$ do sistema de n pontos é dado por

$$\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

ou seja, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Consideremos uma região plana, delimitada pelos gráficos das funções contínuas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Olhando essa região como uma placa plana, de espessura desprezível, suponhamos que ela possui densidade superficial (massa por unidade de área) δ constante.

Particionando-se o intervalo $[a, b]$ em intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através dos pontos $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, aproximamos essa região por uma

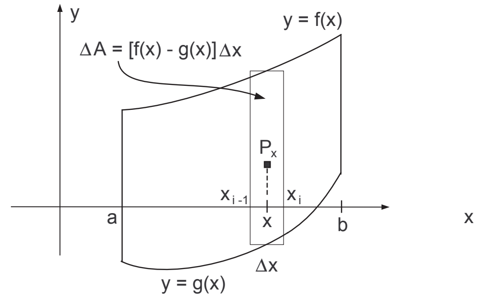


Figura 6.6 Região plana, delimitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = b$. O ponto P_x representa o centro de massa do retângulo elementar de área $\Delta A = (f(x) + g(x))\Delta x$.

reunião de retângulos, como na Figura 6.6, sendo cada retângulo de altura $f(x) - g(x)$ e base Δx, sendo aqui x o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Esse retângulo elementar tem área $\Delta A = (f(x) - g(x))\Delta x$, seu centro de massa é o ponto $P_x = \left(x, \frac{f(x)+g(x)}{2}\right)$, sendo sua massa dada por

$$\Delta m = \delta \cdot \Delta A = \delta(f(x) - g(x))\Delta x.$$

O centro de massa da reunião de todos esses retângulos elementares coincide com o centro de massa dos pontos P_x, atribuindo-se a cada ponto a massa Δm do seu retângulo.

Assim, uma aproximação do centro de massa da região plana considerada é o centro de massa dos vários retângulos elementares e é dada por

$$\hat{P} = \frac{\sum \Delta m \cdot P_x}{\sum \Delta m} = \frac{\sum \delta \cdot \Delta A \cdot P_x}{\sum \delta \cdot \Delta A} = \frac{\sum \Delta A \cdot P_x}{\sum \Delta A}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\Delta A \cdot P_x &= \Delta A \cdot \left(x, \frac{f(x) + g(x)}{2}\right) \\
&= (f(x) - g(x))\Delta x \cdot \left(x, \frac{f(x) + g(x)}{2}\right) \\
&= \left(x(f(x) - g(x))\Delta x, (f(x) - g(x)) \cdot \frac{f(x) + g(x)}{2}\Delta x\right) \\
&= \left(x(f(x) - g(x))\Delta x, \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) \cdot \Delta x\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, o centro de massa $\bar{P}$ da região plana considerada será dado por

$$\bar{P} = \lim_{\Delta x \to 0} \hat{P} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sum \Delta A \cdot P_x}{\sum \Delta A}.$$

Portanto, passando ao limite nas duas coordenadas de $\hat{P}$, chegamos ao resultado: o centro de gravidade da região plana delimitada pelas curvas contínuas

$y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, é dado por

$$\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}),$$

sendo

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x(f(x) - g(x))\,dx}{\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx}{\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}.$$

6.4 Problemas

Áreas de regiões planas:

1. Calcule a área delimitada pelas curvas $y^2 = 9x$ e $y = 3x$.

   Resposta: $1/2$.

2. Calcule a área delimitada pelas curvas $xy = a^2$, $x = a$, $y = 2a$ $(a > 0)$ e o eixo x.

   Resposta: $a^2 \ln 2$.

3. Calcule a área delimitada pela curva $y = x^3$, pela reta $y = 8$ e pelo eixo y.

   Resposta: 12.

4. Calcule a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

   Resposta: πab.

   Sugestão: a área é delimitada pelos gráficos de funções $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, com $-a \leq x \leq a$. Ao calcular a integral, faça a substituição $x = a \operatorname{sen} t$. Use a fórmula de redução de potências $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$.

Valor médio de uma função contínua:

Determine a média ou valor médio da função dada, no intervalo especificado.

1. $f(x) = x^2$, $a \leq x \leq b$.

   Resposta: $\bar{f} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $a \leq x \leq b$ $(0 \leq a < b)$.

   Resposta: $\frac{2(a+b+\sqrt{ab})}{3(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.

3. $f(x) = \cos^2 x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.

   Resposta: $1/2$.

Volume de sólidos:

Em cada problema, calcule o volume do sólido obtido por revolução, conforme descrito.

1. A elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ gira em torno do eixo x.

   Resposta: $\frac{1}{3}\pi a b^2$.

2. O arco de senóide $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, gira em torno do eixo x.

   Resposta: $\pi^2/2$.

3. A região delimitada pela parábola $y^2 = 4x$, pela reta $x = 4$ e pelo eixo x, gira em torno do eixo x.

   Resposta: 32π.

Áreas de superfícies de revolução:

Em cada problema, calcule a área da superfície obtida por revolução da curva dada em torno do eixo especificado.

1. $y^2 = 4ax$, $0 \leq x \leq 3a$, rotacionada em torno do eixo x.

   Resposta: $\frac{56}{3}\pi a^2$.

2. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, rotacionada em torno do eixo x.

   Resposta: $4\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

Centro de massa (ou gravidade) de uma região plana:

Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada.

1. Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

   Resposta: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

2. Área delimitada pela curva $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ e pelo eixo x.

   Resposta: $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 8/5)$.

3. Área delimitada pela parábola $y^2 = ax$ e pela reta $x = a$.

   Resposta: $(\bar{x}, \bar{y}) = (3a/5, 0)$.

Referências Bibliográficas

[1] N. Piskunov,
Differential and Integral Calculus,
New York: Routledge, 1965.

[2] Peter Almay,
Cálculo Diferencial e Integral (3 vols.),
São Paulo: Kronos, 1977.

[3] Arthur B. Simon,
Calculus with Analytic Geometry,
Glenview, Illinois: Scott Foresman & Co., 1982.

[4] Frank Morgan,
Calculus Lite, 2nd ed.,
Wellesley, Massachusetts: A K Peters, 1999.

[5] H. L. Guidorizzi,
Um Curso de Cálculo, Vol.1, 5a. Ed.,
LTC, Rio de Janeiro, 2001.

SOBRE OS AUTORES

Guillermo Antonio Lobos Villagra

Bacharel em Matemática pela Universidad de Talca, mestre e doutor em Matemática pela UNICAMP. Fez pós-doutorado na Espanha nas Universidades de Múrcia e Salamanca, é professor efetivo do Departamento de Matemática da UFSCar desde 1996. Tem experiência como pesquisador na área de Matemática, com ênfase em Geometria Diferencial. Participou de projetos de pesquisa como Pronex-Temático, Edital Universal da FAPESP e CNPq, respectivamente. Coordenou o Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar. Atualmente faz parte do Conselho de Pesquisa da UFSCar e participa dos Projetos: PNPD/CAPES e CT-Infra/FINEP; Projetos de Iniciação Científica das OBMEP e PICME, ambos do CNPq/IMPA; Projetos de Ensino a Distância da UAB-UFSCar.

João Carlos Viera Sampaio

Licenciado em Matemática pelo IBILCE-UNESP de São José do Rio Preto, mestre em Matemática pelo ICMC-USP de São Carlos e doutor em Matemática pela Rutgers University, Universidade Estadual de Nova Jersey, EUA, é professor efetivo do Departamento de Matemática da UFSCar desde 1977. Leciona aos alunos da Licenciatura em Matemática e das engenharias da UFSCar em suas disciplinas básicas. É professor e orientador junto ao Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar. Suas áreas de maior interesse no momento são a História da Matemática e a Matemática Recreativa como Recurso de Ensino.

Luiz Roberto Hartmann Junior

Licenciado em Matemática pela FCT-UNESP de Presidente Prudente, mestre e doutor em Matemática pelo ICMC-USP de São Carlos, é professor efetivo do Departamento de Matemática da UFSCar desde 2010. Leciona aos alunos dos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática e aos alunos das engenharias da UFSCar em suas disciplinas básicas. É professor e orientador junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar. Suas áreas de maior interesse no momento são Análise Geométrica e Topologia Algébrica.

Waldeck Schützer

Bacharel e mestre em Matemática pelo ICMC-USP e doutor em Matemática pela Rutgers University, Universidade Estadual de Nova Jersey, EUA, é professor efetivo do Departamento de Matemática da UFSCar desde 1996, onde leciona aos alunos da Licenciatura em Matemática, das engenharias e também da Engenharia Ambiental da UAB-UFSCar. Tem experiência como pesquisador na área de Matemática, com ênfase em Teoria de Lie e Combinatória. Suas áreas de interesse no momento são Aspectos Combinatoriais da Teoria de Representações de Álgebras e Grupos de Lie e Combinatória dos Polinômios de Jack Simétricos e Não Simétricos. Atualmente é vice coordenador do Programa de Graduação em Matemática.