Profa. Dra. Heloisa de Arruda Camargo

AT1-3 – Introdução à Matemática Discreta

Nesta unidade, após uma breve explicação geral sobre o que é a Matemática Discreta, abordaremos alguns elementos que nos auxiliam no estudo da Matemática Discreta: a definição, o teorema e a prova. Esses elementos aparecem com muita freqüência no nosso conteúdo, logo, é importante esclarecer o que eles significam e porque são ferramentas úteis neste contexto.

1. O que é Matemática Discreta?

A Matemática Discreta é um ramo da matemática de reconhecida importância para a computação. O estudo desse ramo da matemática propicia, além do aprendizado de conceitos fundamentais que dão suporte às diversas disciplinas clássicas da computação, o desenvolvimento da habilidade de estruturação do raciocínio abstrato para resolução de problemas.

Antes de tudo, neste momento você pode estar se perguntando o que significa o termo “discreta” no nome Matemática Discreta. A Matemática Discreta estuda estruturas matemáticas que não exigem a noção de continuidade, portanto, esse ramo da matemática se contrapõe à chamada Matemática Contínua. A matemática como um todo oferece ferramentas para modelar e solucionar diversos problemas do mundo real. A Matemática Contínua trata de fenômenos do mundo real em que a transição de um estado para outro é tão suave que pode ser representada de forma infinita. O conjunto dos números reais está na base dos modelos de Matemática Contínua. A Matemática Discreta, por outro lado, é adequada para representar situações ou domínios em que a transição de um estado para outro é bem definida. Assim, os instrumentos principais tratados pela Matemática Discreta são os conjuntos contáveis, em particular o conjunto dos números inteiros.

As disciplinas de Matemática Discreta estão presentes em todos os cursos de computação, devido à sua importância para quase todas as áreas, principalmente construção de algoritmos, estruturas de dados, linguagens de programação, compiladores, entre outras.

A Matemática Discreta é uma área de conhecimento bastante abrangente, e não pode ser estudada na sua totalidade em uma única disciplina. Alguns temas que fazem parte dessa área, devido à sua importância, costumam ser tratados em outras disciplinas como Lógica Matemática, Teoria de Probabilidades e Teoria dos Grafos.

O conteúdo de Matemática Discreta tratado aqui está estruturado de forma a cobrir uma seleção de tópicos entre aqueles que são tradicionalmente incluídos como parte desse ramo da matemática. Os tópicos selecionados são abordados de forma genérica e introdutória. Assim, este texto pode ser utilizado como material complementar para uma disciplina introdutória ao tema.

Começaremos apresentando, nesta Unidade 1, uma discussão sobre as noções básicas de teorema, prova e definição, bem como as formas que um teorema pode assumir, com o objetivo de esclarecer o papel dessas ferramentas no estudo que vem em seguida. Na Unidade 2, serão vistos os conceitos de conjuntos e subconjuntos, além das principais operações entre conjuntos e suas propriedades. Na Unidade 3, abordaremos a noção de relações com enfoque em algumas relações especiais, as formas de representação de relações, a composição de relações, as propriedades das relações e as relações de equivalência. Na Unidade 4 será estudado o conceito de função, suas formas de notação e representação, as funções inversas, os tipos de função e algumas funções especiais de particular importância. Na Unidade 5 veremos a teoria dos números com o estudo das operações de divisão inteira e módulo, o cálculo do máximo divisor comum e a aritmética modular. Na Unidade 6, serão apresentados os fundamentos da teoria dos grafos e, finalmente, na Unidade 7, abordaremos noções de conjuntos parcialmente ordenados.

2. Como e por que estudar Matemática Discreta?

2.1. Para que serve a Matemática Discreta?

Os alunos, de forma geral, questionam a utilidade dos conteúdos estudados em disciplinas de Matemática Discreta, no momento em que estão cursando tal disciplina. Na Matemática Discreta, assim como em outras disciplinas da matemática, nem sempre é possível apontar de forma direta e objetiva, como e quando os conceitos serão utilizados. Entretanto, os benefícios com o estudo de uma disciplina como essa são reconhecidos posteriormente e são obtidos em duas vertentes: aprendizado de conceitos básicos que estão nos fundamentos de outros temas da computação e desenvolvimento de um raciocínio lógico e estruturado que consiste de uma importante ferramenta para outras disciplinas.

2.2. Qual a dificuldade de estudar Matemática Discreta?

Muitos alunos desenvolvem a idéia de que estudar matemática é “difícil” e assustam diante de problemas a serem resolvidos, ou diante de um teorema a ser provado, criando assim uma resistência à compreensão e utilidade de importantes mecanismos presentes nesse contexto. A compreensão do papel dos instrumentos utilizados no estudo como as definições, os teoremas e as provas, permite que estes sejam vistos como meios para auxiliar o estudo de conceitos e não como elementos complicadores. As definições são ferramentas importantes porque os objetos matemáticos, que são abstratos, adquirem existência por meio delas. Quanto às provas, podemos afirmar que correspondem a um experimento em alguma outra área do conhecimento, pois é por meio da prova que se confirma a validade de um resultado ou afirmação da matemática. A prova é um excelente meio para se aprender a pensar claramente e logicamente, o que auxilia a construção de raciocínio estruturado, útil para a formulação e resolução de problemas em computação. Daí vem a importância do estudo de teoremas e suas provas na matemática discreta. Por meio desse estudo é possível desenvolver e complementar o ferramental matemático básico do aluno para um aprendizado consistente da computação.

2.3. Como estudar Matemática Discreta?

A melhor maneira de estudar qualquer disciplina da matemática é resolvendo muitos exercícios e certificando-se de estar "em dia" com o que foi ensinado, sem deixar acumular conceitos que não foram entendidos. Assim, uma boa dica é estudar com papel e lápis na mão. Rabisque, faça gráficos e desenhos que auxiliem a compreensão dos conceitos abstratos. Refaça exemplos e, principalmente, resolva muitos exercícios. O raciocínio necessário para resolução de exercícios pode parecer difícil em um primeiro momento. Com o tempo, adquirindo familiaridade com os termos e expressões, e principalmente com o entendimento de exemplos e exercícios resolvidos, é possível constatar que a maioria dos exercícios é simples e de resolução rápida. O aprendizado vem com a resolução de um número grande desses exercícios.

3. A importância da notação na Matemática Discreta

A matemática nos dá ferramentas para modelar objetos e conceitos, com o objetivo de resolver problemas. Para atender a essa finalidade, a matemática dispõe de uma linguagem própria, precisa e rigorosa. Assim, ao contrário do que acontece em linguagem corrente como o português, não pode haver ambiguidades, imprecisões ou possibilidade de interpretações dúbias em um símbolo, expressão ou sentença matemática.

Um conceito expresso corretamente em uma linguagem matemática não pode dar margem a interpretações subjetivas. Assim, a notação matemática – usada para símbolos, sintaxe, expressões - é muito importante e não pode ser usada de forma descuidada. Você vai perceber que, por exemplo, os símbolos x, **x e** *x* (letra x, letra x em negrito, letra x em itálico, respectivamente) podem representar entidades diferentes em um mesmo contexto, e precisam ser usados de forma correta. Na matemática não é adequado escrever uma expressão sem o devido cuidado com os símbolos utilizados e esperar que o significado correto dessa expressão fique subentendido. Com a prática, percebe-se que essas regras, ao invés de trazerem complicações, são grandes aliadas nossas, pois simplificam a comunicação e não deixam margem para dúvidas.

4. Definição, Teorema e Prova

4.1. A definição

Os objetos matemáticos são abstratos, isto é, só existem na mente das pessoas. Assim, esses objetos adquirem existência por meio das definições. Uma **definição** estabelece condições específicas para que um objeto seja o que ele é. É importante notar que, para que a definição seja de fato precisa, ela deve utilizar termos cujos significados são totalmente conhecidos. Por exemplo:

"Um inteiro é par se for divisível por 2".

Essa definição estabelece de forma clara e sem ambiguidades o que é um número par, desde que seja conhecido o significado dos termos "inteiro" e "divisível".

Considere este outro exemplo:

"Um conjunto é uma coleção de objetos."

Essa definição estabelece o que é um conjunto, desde que esteja claro o significado das palavras "coleção" e "objetos".

Usualmente, quando as definições são apresentadas, partimos do pressuposto que os significados dos termos utilizados são conhecidos.

4.2. O teorema

Além das definições, outros elementos de fundamental importância para nós são o teorema e a prova. Um **teorema** é uma afirmação que pode ser provada. Assim, por meio dos teoremas são feitas declarações sobre o que é verdadeiro a respeito dos conceitos definidos. A **prova**, por sua vez, é uma demonstração irrefutável, ou inegável, de que o teorema é verdadeiro.

Podemos afirmar que uma prova na matemática corresponde a um experimento em alguma outra área do conhecimento, pois é por meio da prova que se confirma a validade de um resultado ou afirmação da matemática. Assim, resumindo, temos que:

Um **teorema** é uma afirmação declarativa sobre objetos da matemática, para a qual existe uma prova.

Uma **afirmação declarativa** é uma sentença que expressa uma idéia sobre alguma coisa ou situação. Por exemplo: Vai chover amanhã.

Prova é uma dissertação que mostra, de maneira irrefutável, que uma afirmação declarativa é verdadeira.

Designações para um teorema

Existem diversos termos que são usados, ao invés do termo ***teorema***, para fazer referência a afirmações declarativas que podem ser provadas, com conotações diferentes. As conotações atribuídas a cada termo não são de consenso entre os matemáticos. Elas dependem da interpretação que os matemáticos fazem a respeito da generalidade, da importância e do prestígio de uma determinada afirmação, que são coisas naturalmente subjetivas. A palavra teorema tem a conotação de importância e generalidade.

Algumas palavras que constituem alternativas para teorema e podem aparecer neste estudo são:

Proposição: Um teorema de importância secundária. Faz uma afirmação que não tem tanto prestígio quanto um teorema e, normamente, exige uma prova menos elaborada que um teorema.

Lema: Um teorema cujo objetivo principal é ajudar a provar outro teorema mais importante. Lemas são partes ou instrumentos usados para elaborar uma prova complicada.

Corolário: Resultado com uma prova rápida, cujo passo principal é o uso de outro teorema provado anteriormente.

Formas de expressar um teorema

Os teoremas são expressos por meio de afirmações padronizadas que estão fundamentadas, quanto à veracidade ou falsidade, nos operadores de implicação e de equivalência da Lógica Matemática.

A grande maioria dos teoremas pode ser expressa na forma **Se-então**:

Se A então B

Nessa afirmação, *A* é chamado hipótese e *B*, conclusão. A afirmação *Se A então* B significa que sempre que a condição A for verdadeira, a condição B também será.

Por exemplo, a afirmação

"A soma de dois números inteiros pares é par."

pode ser reformulada para ser escrita na forma **Se-então**, como:

"Se x e y são inteiros pares, então x+y também é par."

Nesse exemplo, a hipótese A é *"x e y são inteiros pares" e a* conclusão B é *"x+y também é par"*.

Maneiras alternativas de expressar "Se A então B":

"A implica B" ou *"B é implicado por A"*
"Sempre que A, temos B" ou *"B, sempre que A"*
"A é suficiente para B" ou *"A é uma condição suficiente para B"*
"$A \Rightarrow B$*"*

A afirmação "Se A então B" assegura que a condição B é verdadeira sempre que A o for, mas não faz qualquer referência a B quando A é falsa.

Outra maneira de expressar um teorema é usando a forma **Se-e-Somente-Se**:

A se e somente se B

que é uma maneira concisa de expressar a afirmação dupla *"Se A então B, e se B então A"*.

Por exemplo, a afirmação
"Se um inteiro x é par, então x+1 é impar, e se x+1 é impar, então x é par".
pode ser reformulada para ser escrita na forma **Se-e-Somente-Se** como:
"Um inteiro x é par se e somente se x+1 é impar".

Nesse exemplo, a condição A é *"um inteiro x é par" e a* condição B é *"x+1 é ímpar"*.

Maneiras alternativas de expressar *"A se e somente se B"*:

"A see B"
"A é necessário e suficiente para B"
"A é equivalente a B"
"$A \Leftrightarrow B$*"*

A afirmação “A se e somente se B” assegura que as condições A e B devem ser ambas verdadeiras ou ambas falsas.

4.3. A Prova do Teorema

Na matemática, uma afirmação que ainda não foi provada é chamada de **conjectura**. Quando é possível apresentar uma prova dessa afirmação, ela pode então ser chamada de teorema.

Cada um dos passos envolvidos na prova deve ser precisamente fundamentado, com base em definições, propriedades ou resultados já conhecidos. Devem também ser colocados de forma genérica, ou seja, válida para todos os objetos aos quais o teorema se refere.

A prova matemática não pode ser baseada em evidências ou bom senso, apenas. Rigor e precisão são fundamentais para que uma afirmação ganhe o “status” de teorema, ou seja, possa ser usada como uma verdade irrefutável. Mesmo quando uma afirmação parece óbvia, para que se torne um teorema, deve ser provada formalmente.

Além disso, não podemos considerar provada uma afirmação genérica, apenas com base no fato de que podemos apresentar muito exemplos específicos para os quais ela seja válida.

Assim, devemos ficar atentos ao fato de que, embora em algumas situações, casos particulares possam sugerir que uma afirmação é plausível, ela pode não ser provada para todos os objetos. Como exemplo, considere a seguinte afirmação:

Todo número primo é ímpar.

Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Se tentarmos encontrar exemplos particulares para os quais ela é verdadeira, encontraremos milhares, a começar pelo 3.

Mas não podemos esquecer o número dois! O número dois só é divisível por 1 e por ele mesmo, logo é primo, e é também par. Esse exemplo (chamado de contra-exemplo) contradiz a afirmação acima, logo ela não pode ser verdadeira.

Esse exemplo mostra claramente que uma prova de que uma afirmação é verdadeira não pode ser baseada em casos específicos. Ela deve ser válida para rigorosamente todos os objetos a que se refere. Aqui, a maioria não prevalece. Basta um caso que contradiga a afirmação para que ela não seja verdadeira.

No exemplo anterior, o que apresentamos, na verdade, foi uma prova de que a afirmação “*Todo número primo é ímpar*” é falsa, o que chamamos de ***refutação***. Refutar uma afirmação significa provar que ela é falsa, o que é geralmente muito mais fácil do que provar que uma afirmação é verdadeira. Nesse caso usamos o método mais comum e simples, que é o método do contra-exemplo, discutido um pouco mais adiante.

Técnicas de Demonstração

Independentemente da forma em que o teorema está escrito (Se-então ou Se-e-somente-se), diferentes mecanismos de prova podem ser usados. Esses mecanismos são chamados de técnicas de demonstração. Os principais mecanismos de prova de teoremas são a prova por exaustão, a prova direta, a prova por contraposição e a prova por absurdo. Cada uma delas é adequada para um tipo de situação. Discussões mais detalhadas sobre as técnicas de prova e sua utilização serão apresentadas nas unidades seguintes, à medida que resultados importantes forem sendo declarados na forma de teoremas que precisam ser provados. A seguir, é apresentado um resumo sobre o funcionamento de cada uma dessas técnicas.

Prova por exaustão

Uma demonstração por exaustão é adequada quando o teorema faz uma afirmação sobre um número finito de objetos. Nesse caso, é possível verificar exaustivamente que a propriedade afirmada é válida para todos os objetos. Por exemplo, a afirmação "Todo inteiro entre 1 e 50 que é divisível por 10, também é divisível por 5" faz uma afirmação sobre um conjunto finito de objetos, que são os inteiros de 1 a 5. Embora tedioso, é possível verificar, para todos esses inteiros, um a um, que aqueles que são divisíveis por 10 também são divisíveis por 5.

Prova direta

A técnica da prova direta é a mais utilizada. Essa técnica de demonstração consiste em partir das hipóteses e aplicar transformações, utilizando propriedades ou outros teoremas já provados sobre os objetos envolvidos até chegar à conclusão.

Prova por contrapositiva

Essa técnica utiliza a equivalência lógica de mesmo nome, que garante que a expressão ***Se A então B*** é equivalente à expressão ***Se não B então não A***. Com base nisso, assumimos que ***não B*** é verdade e provamos que ***não A*** decorre de ***não B***. Esse processo equivale a mostrar que B é consequência de A.

Prova por absurdo

A prova por absurdo parte do pressuposto que a hipótese é verdadeira e, além disso, supõe, como hipótese de absurdo, que a negação da conclusão é verdadeira. As transformações são aplicadas utilizando todas as hipóteses, até chegar à uma contradição. Esse processo equivale a mostrar que a conclusão B decorre da hipótese A.

Afirmação Verdadeira por Vacuidade

O que podemos afirmar sobre a veracidade de afirmações do tipo "*Se A então B*" em que a hipótese é impossível? Isso ocorre com bastante freqüência e é necessário esclarecermos qual a interpretação correta. Por exemplo, vamos considerar a afirmação:

Se um número inteiro é simultaneamente positivo e negativo, então ele é primo.

Essa afirmação é verdadeira ou falsa?

Está claro que a hipótese é impossível, uma vez que um número inteiro não pode ser ao mesmo tempo positivo e negativo. Mas isso não implica, de forma nenhuma, que a afirmação toda é falsa. Para que uma afirmação do tipo *Se A então B* seja falsa, deve haver uma situação, pelo menos, em que a hipótese A seja verdadeira e a conclusão B seja falsa. Como não podemos encontrar um número inteiro que seja negativo e positivo, não podemos encontrar um caso em que a hipótese seja verdadeira e a conclusão seja falsa. Logo, a afirmação *Se A então B* não pode ser falsa, o que nos autoriza a concluir que a afirmação é verdadeira!

Afirmações desse tipo são chamadas *afirmações vazias* e são consideradas ***verdadeiras por vacuidade***.

Essas afirmações podem aparecer algumas vezes no decorrer da disciplina, e é muito importante que essa forma de interpretar a veracidade das expressões seja compreendida. Vamos retornar a esse assunto quando for necessário.

Contra-exemplo

Muitas vezes precisamos provar que uma afirmação é falsa, ou seja, refutar a afirmação. A maneira mais simples de provar que uma afirmação é falsa é apresentar um contra-exemplo para aquela afirmação, isto é, mostrar um único caso específico para o qual a afirmação não seja verdadeira.

Por exemplo, se formos solicitados a refutar a afirmação:

Se um número inteiro a é maior que 2, então a é par.

basta apresentar um caso em que essa afirmação não seja verdadeira. Como a afirmação é do tipo Se A então B, sendo A = um número inteiro a maior que 2 e a conclusão B = a é par, temos que encontra um número que torne a hipótese A verdadeira e torne o consequente B falso.

Se a = 3, temos um caso em que a é maior que 2 (a hipótese A é verdadeira) e não é par (a conclusão B é falsa), logo provamos que a afirmação é falsa. Em outras palavras, a afirmação foi refutada.

Considerando agora a afirmação:

Um inteiro x é positivo se e somente se x+1 é positivo.

Essa é uma afirmação do tipo *A se e somente se B, sendo* que a condição A = x é positivo e a condição B = x+1 é positivo. Para refutarmos uma afirmação desse tipo por contra-exemplo, temos que encontrar um caso em que A é verdadeira e B é falsa, ou vice-versa.

Se x = 0, temos que x+1=1 é positivo, mas x não é. Encontramos assim um valor para x (x=0) para o qual a condição B é verdadeira, mas a condição A é falsa. Encontramos então um contra-exemplo para a afirmação, provando que ela é falsa.

As provas de afirmações que são verdadeiras por vacuidade e as provas de afirmações falsas são casos particulares de provas, que podem ser feitas de forma simples. As afirmações verdadeiras não vazias requerem demonstrações formadas por uma sequência de passos bem fundamentados que, partindo de uma hipótese, levam até a conclusão. A demonstração de um teorema pode ser feita por diferentes técnicas. Algumas dessas técnicas serão apresentadas ao longo da disciplina.