AT2-1 - Unidade 2

Limite e Continuidade[1]

Cálculo Diferencial e Integral

Bacharelado em Sistemas de Informação

UAB - UFSCar

[1]Versão completa com 47 páginas

Tópicos de AT2-1

Tópicos de AT2-1

Sobre a definição formal de limite

A definição formal de limite é matematicamente sofisticada, requer muitas horas de estudo para ser entendida. Portanto, faremos aquí uma exploração intuitiva do conceito de limite e de suas propriedades, através de exemplos e interpretações gráficas.
Deixamos para o fórum o estudo da definição formal de limite.

Exemplo 1: Limite de uma função linear

Considere a função $f(x) = 2x + 3$. Quando x assume uma infinidade de valores aproximando-se mais e mais de 0, o número $2x + 3$ assume uma infinidade de valores, aproximando-se de $2 \cdot 0 + 3 = 3$.
Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0, é igual a 3, e escrevemos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x + 3) = 3$$

Em geral

Se f é uma função real definida em uma reunião de intervalos, e x_0 é um ponto no interior ou no extremo de um desses intervalos.
Os matemáticos dizem que: o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, é igual a L que, simbolicamente, se escreve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \quad (L \in \mathbb{R})$$

significa que quando os números reais x tendem ao número real x_0, as imagens $f(x)$ tendem ao número real L, ou seja, quando podemos fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, tomando x suficientemente próximo de x_0, mantendo $x \neq x_0$.
No exemplo do slide anterior, fizemos $f(x)$ próximo de 3 o quanto quisermos, bastando tomar x bem próximo de 0.

Lista de exemplos intuitivos

1. $\lim_{x\to x_0} k = k \quad (x_0 \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ contante fixa)
2. $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n \quad (n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R})$
3. Sendo $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial, onde $a_n, \ldots, a_1, a_0$ são todos números reais, tem-se que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\\ &= \underbrace{\lim_{x\to x_0} a_n x^n}_{\underbrace{a_n \lim_{x\to x_0} x^n}_{a_n x_0^n}} + \cdots + \underbrace{\lim_{x\to x_0} a_1 x}_{\underbrace{a_1 \lim_{x\to x_0} x}_{a_1 x_0}} + \underbrace{\lim_{x\to x_0} a_0}_{a_0}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0), \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

Definição

Nos exemplos anteriores, de limites com x tendendo a x, tivemos sempre x_0 no domínio de f e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Quando isto ocorre, dizemos que f é contínua no ponto x_0.

Intuitivamente

Uma função f é contínua em um ponto x_0 de seu domínio, se o gráfico dela não apresenta "saltos" em x_0

Exemplos

As funções constantes, lineares, afins, quadráticas, cúbicas, polinomiais são exemplos de funções contínuas, isto é em cada ponto dos domínios as funções são contínuas. Em geral, uma função racional é contínua nos pontos de seu domínio. Também, são contínuas em qualquer ponto de seu domínio a função valor absoluto, a função raíz quadrada, as funções exponenciais da forma $h(x) = a^x$ com $a > 0$, as funções $f(x) =$ sen x, $g(x) = \cos x$, etc.

Exemplo: Calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$, usando simplificação

Solução. Tomando $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, temos que $2 \notin D(f)$.
Quando x se aproxima de 2, x^3 se aproxima de 8. Assim subtituindo os valores obtemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{0}{0}.$$

Este resultado, $0/0$, é muito comum no cálculo de limites, e não tem significado como valor de um limite. A expressão $0/0$ é um símbolo de indeterminação ocorrendo em uma tentativa de cálculo de um limite. A ocorrência desta expressão significa que o limite ainda não foi calculado.
Para evitar o símbolo de indeterminação $0/0$, neste exemplo fazemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} &= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) \\ &= 2^2+2\cdot 2+4 = 12\end{aligned}$$

Exemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ =?, usando mudança de variável

Um cálculo direto dá uma *indeterminação*, ou seja

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0}, \qquad (*)$$

lembre-se que o limite não foi calculado em (*),
para calcular o limite, tome $y = \sqrt[3]{x+1}$, eleve ao cubo a igualdade, assim $y^3 = x+1$, logo considere $x = y^3 - 1$.
Quando x tende a 0, y tende a 1 (em símbolos: se $x \to 0$, então $y \to 1$).
E aí temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} = \lim_{y\to 1} \frac{\cancel{(y-1)}}{(y^2+y+1)\cancel{(y-1)}}$$
$$= \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{1^2+1+1} = \frac{1}{3}$$

Tópicos de AT2-1

Vamos admitir as seguintes propriedades de limites

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ valem, então

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2 = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
   (O limite de uma soma é igual à soma dos limites das parcelas);
2. $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kL_1 = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$
   (Toda constante saí fora do limite);
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2 = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$
   (O limite do produto é igual ao produto dos limites);
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$
   (O limite do quociente é igual ao quociente dos limites, se $L_2 \neq 0$).

Exemplos

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^3-3)}{\lim_{x\to 2}(x^2+1)} = \frac{\lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 3}{\lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 1} = \frac{2^3-3}{2^2+1} = 1$

2. A função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1; \\ 3 & \text{se } x = 1, \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$.

   Com efeito, para $x \neq 1$, temos que

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = x+1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1 = 1+1 = 2 \neq 3 = f(1).$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$$

   Portanto, podemos concluir que f não é contínua em $x = 1$.

Outras propriedades de limites e funções contínuas

1. Se f e g são duas funções tais que $Im(f) \subset D(g)$, (a imagem de f é um subconjunto do domínio de g), $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e g é contínua em $L \in \mathbb{R}$, então podemos calcular o limite da função composta $g \circ f$ quando $x \to x_0$, da seguinte forma:

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} (g(f(x)) = g(\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}_{L}) = g(L).$$

2. Se $Im(f) \subset D(g)$ e f é contínua em x_0 e g é contínua em $f(x_0)$, então a função composta $g \circ f$ é contínua em x_0.
Pelo item anterior, temos que

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = (g(f(x_0))) = (g \circ f)(x_0).$$

Observações

1. Na propriedade 1 do slide anterior, se g não é contínua em $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ mesmo que $L \in D(g)$ podemos ter que

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) \neq g(\lim_{x \to x_0} f(x)).$$

De fato, basta considerar a função identidade $f(x) = x$ e a função $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1; \\ 3 & \text{se } x = 1, \end{cases}$ que é discontínua em $x = 1$. Então para $x_0 = 1$ um cálculo simples diz que

$$\lim_{x \to 1} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \neq 3 = g(1) = g(\underbrace{\lim_{x \to 1} f(x)}_{1}).$$

Tópicos de AT2-1

Questões

Calcule os limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$

(c) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)(x-4)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}}15$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$

(g) $\displaystyle\lim_{s\to 4}\frac{6s-1}{2s-9}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

Respostas e sugestões

- (a) 4; (b) $1/9$; (c) $3x^2$; (d) $5\sqrt{2}-20$
- (e) 15; (f) $-3/8$; (g) -23; (h) 2.

Tópicos de AT2-1

Nesta seção enunciamos o Teorema do Confronto e damos aplicações dele no cálculo de importantes limites espaciais que envolvendo funções trigonométricas.

Teorema do Confronto

Dadas três funções f, g, h que satisfazem as duas propriedades abaixo:

1. existe $r > 0$ tal que
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \text{para todo} \quad 0 < |x - x_0| < r; \text{ e}$$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$.

Então podemos concluir que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Observação

As funções seno e cosseno podem ser introduzidas como as únicas funções definidas em $\mathbb{R}$, indicadas por sen e cos, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\text{sen } 0 = 0$;
2. $\cos 0 = 1$;
3. Quaisquer que sejam os números reais a e b
$$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a$$
4. Quaisquer que sejam os números reais a e b
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$$
5. Existe $r > 0$ tal que
$$0 < \text{sen } x < x < \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \text{ para } 0 < x < r.$$

Exemplo: cálculo do limite especial $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

Pelo slide anterior $\exists r > 0$, tal que para $0 < x < r$, vale $0 < \text{sen } x$ e

$$\text{sen } x < x < \frac{\text{sen } x}{\cos x} \quad \text{multiplicando por} \quad \left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{invertindo as frações } ()^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x. \quad (*)$$

Analogamente para $-r < x < 0$, obtemos as mesmas desigualdades que em $(*)$, pois $\cos(-x) = \cos x$ e $\frac{\text{sen } (-x)}{-x} = \frac{-\text{sen } x}{-x} = \frac{\text{sen } x}{x}$.
Portanto, para $0 < |x| < r$, vale $\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$.
Logo, pelo Teorema do Confronto, obtemos

$$\boxed{1 = \lim_{x\to 0} \cos x \leq \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \leq \lim_{x\to 0} 1 = 1.}$$

Exemplo: calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Solução. Para calcilar o limite podemos utilizar o limite éspecial calculado no slide anterior.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} \quad (*)$$

Usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ em $(*)$, obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\ = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} &= \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}}_{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Tópicos de AT2-1

Questões

Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes questões:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5$?
2. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$?
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = \dfrac{1}{2}$?
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = +\infty$?
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$?

Tópicos de AT2-1

Exemplo: se $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, então valem as seguintes afirmações

- f é contínua em todo os pontos $a \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Pois,
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to a} 1}{\lim\limits_{x\to a} x^2} = \frac{1}{a^2} = f(a).$$
- f é uma função *par*. $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = f(x), \quad \forall\, x \in D(f).$

Tabela:

x	x^2	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
± 1	1	1
$\pm 0,5$	$0,25$	4
$\pm 0,2$	$0,04$	25
$\pm 0,1$	$0,01$	100
$\pm 0,01$	$0,0001$	10000
$\pm 0,001$	$0,000001$	1000000

continuação do exemplo

Pela tabela do slide anterior, temos que na primeira coluna os valores de x cada vez são mais próximos de 0. Na última coluna da tabela, temos que os valores correspondentes de $f(x)$ tornam-se cada vez maiores. Neste caso podemos fazer $f(x)$ ultrapassar qualquer número positivo, tomando x suficientemente próximo de 0. Assim, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0 é "$+$ *infinito*", e escrevemos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

ou seja,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}$$

Interpretação geométrica

A interpretação geométrica de $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ pode ser feita no GeoGebra, onde pode ser feito um esboço do gráfico da curva $y = \frac{1}{x^2}$ e manipular de forma dinâmica o gráfico, com o intuito de visualizar que a medida que x se aproxima de 0, $y = f(x)$ torna-se cada vez maior. Para isto escreva na "Entrada do GeoGebra" a seguinte função "$1/x^2$" e de Enter, automaticamente a curva será construída.

Tópicos de AT2-1

Noção intuitiva

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1	1
2	4	0,25
5	25	0,04
10	100	0,01
100	10000	0,0001
1000	1000000	0,000001

Agora observe a tabela acima. Note que, à medida que x cresce indefinidamente, assumindo valores positivos cada vez maiores, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ torna-se cada vez mais próximo de 0. Isto também é sugerido pelo gráfico da função. Neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a "$+$ *infinito*", é igual a 0, e escrevemos

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

Exemplo

A interpretação geométrica do $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, ou seja, à medida em que x cresce, tomando valores cada vez maiores, $f(x)$ aproxima-se de 0. E ainda $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Cálculo de limites de forma intuitiva

Nas duas tabelas anteriores, também ilustramos:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty}$$

Também podemos facilmente inferir

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$$

Álgebra de limites infinitos

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $\qquad$ $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$(\pm\infty)^2=+\infty$ $\qquad$ $(+\infty)(-\infty)=-\infty$

$(+\infty)^3=+\infty$ $\qquad$ $(-\infty)^3=-\infty$ $\qquad$ $\dfrac{1}{\pm\infty}=0$

$(-\infty)^{(\text{inteiro positivo par})}=+\infty$ $\qquad$ $(-\infty)^{(\text{inteiro positivo ímpar})}=-\infty$

$+\infty+c=+\infty$ (c constante) $\qquad$ $-\infty+c=-\infty$ (c constante)

$$c\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty & \text{se } c>0\\ -\infty & \text{se } c<0\end{cases} \qquad c\cdot(-\infty)=\begin{cases}+\infty & \text{se } c<0\\ -\infty & \text{se } c>0\end{cases}$$

$$\frac{+\infty}{c}=\begin{cases}+\infty & \text{se } c>0\\ -\infty & \text{se } c<0\end{cases} \qquad \frac{-\infty}{c}=\begin{cases}+\infty & \text{se } c<0\\ -\infty & \text{se } c>0\end{cases}$$

Atenção! Com os “resultados” no cálculo de limites

$(+\infty)-(+\infty)$, $\quad(-\infty)+(+\infty)$, $\quad 0\cdot(\pm\infty)$ e $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

são novos *símbolos de indeterminação*. Nada significam como valores de limites. Caso chegue a algum deles no cálculo de um limite, tem que repensar o procedimento de cálculo.

Exemplo: calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$

Solução. Uma substituição direta nos dá

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^3+4} = \frac{3\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2\lim\limits_{x\to+\infty} x - \lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + \lim\limits_{x\to+\infty} 4}$$

$$= \frac{+\infty-(+\infty)-1}{+\infty+4}$$

Para evitarmos símbolos de indeterminação, fazemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^3+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{3-\frac{2}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}}{+\infty\left(1+\frac{4}{+\infty}\right)} = \frac{3-0}{+\infty\cdot(1+0)} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Como calcular limite de funções racionais

Nos limites da forma $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em x, prevalecem os termos de maior grau de ambos os polinômios, ou seja, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

então $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ (e $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$.)

Observação

No exemplo do slide anterior, basta fazer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

para calcular o limite. Mas atenção. Este cálculo só vale para limites de funções racionais, em que $x \to \pm\infty$.

Exemplo: calcular $\lim_{x \to -\infty} (x^5 - x^3)$

Uma substituição direta nos dá

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - x^3) = (-\infty)^5 - (-\infty)^3 = (-\infty) - (-\infty) = (-\infty) + (+\infty),$$

portanto chegamos a um símbolo de indeterminação.
No entanto, fazendo a seguinte fatorização

$$x^5 - x^3 = x^5 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

podemos calcular facilmente o limite

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - x^3) = \lim_{x \to -\infty} x^5 (1 - \frac{1}{x^2}) = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

Tópicos de AT2-1

Questões

Calcule os limites

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x-5}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^3(2-3x)^2}{x^5+5}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+ax}-x)$

Respostas e sugestões

- (a) 2; (b) 0; (c) 0; (d) 72;
- (e) 0. *Sugestão.*
$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}.$$
- (f) $a/2$. *Sugestão.* Imite o procedimento usado no exercício anterior.

Tópicos de AT2-1

Exemplo. Limites laterais de $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ quando $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$

- O domínio de f é $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $x > 0$, $|x| = x \;\Rightarrow\; f(x) = x + \dfrac{x}{x} = x + 1$.
- Se $x < 0$, $|x| = -x \;\Rightarrow\; f(x) = x + \dfrac{x}{-x} = x - 1$.
- O gráfico de f é a união de duas semi-retas: $\{(x, y) \;/\; y = x + 1,\; x > 0\} \cup \{(x, y) \;/\; y = x - 1,\; x < 0\}$.
- Se x tende a 0, mantendo-se > 0, $f(x)$ tende a 1. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela direita*, é igual a 1, e denotamos
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$
- Se x tende a 0, mantendo-se < 0, $f(x)$ tende a -1. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela esquerda*, é igual a -1, e denotamos
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

Em geral, limite lateral à direita: $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$

Seja p um número real no interior ou no extremo inferior de um intervalo contido no domínio de uma função f.

- o limite lateral de $f(x)$, quando x tende a p pela direita, se escreve

$$\lim_{x \to p^+} f(x)$$

  o simbolo $x \to p^+$ indica que $x \in D(f)$ e está aproximando-se de p com valores de x maiores que p. Isto significa que $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x > p}} f(x)$.

- O limite lateral à direita pode existir ou não.
  1. Quando existe $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = L$ pode acontecer que:

$$L \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad L = +\infty \quad \text{ou} \quad L = -\infty$$

  .

  2. Quando não exite $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$, implica que não exite $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

Em geral, limite lateral à esquerda: $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$

Seja p um número real no interior ou no extremo inferior de um intervalo contido no domínio de uma função f.

- o limite lateral de $f(x)$, quando x tende a p pela direita, se escreve

$$\lim_{x \to p^-} f(x)$$

  o simbolo $x \to p^-$ indica que $x \in D(f)$ e está aproximando-se de p com valores de x menores que p. Isto significa que $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x < p}} f(x)$.

- O limite lateral à esquerda pode existir ou não.
  1. Quando existe $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = L$ pode acontecer que:

$$L \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad L = +\infty \quad \text{ou} \quad L = -\infty$$

  .

  2. Quando não exite $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$, implica que não exite $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

Caraterização do limite usando seus limites laterais

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existam números reais a e b tais que $]a,p[$ e $]p,b[$ estejam contidos em $D(f)$. Então

$$\text{Existe } \lim_{x\to p} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \text{Existem } \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = L.$$

Por outro lado, qualquer uma das afirmações a seguir:

1. $\lim_{x\to p^+} f(x)$ não existe ou $\lim_{x\to p^-} f(x)$ não existe;
2. $\lim_{x\to p^+} f(x) \neq \lim_{x\to p^-} f(x)$;

implicam que o $\lim_{x\to p} f(x)$ não existe.

Exemplo: Limites laterais de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ quando $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.

- O domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- 0 é extremo superior do intervalo $]-\infty, 0[\subset D(f)$, e também é extremo inferior do intervalo $]0, +\infty[\subset D(f)$.
- Faça um esboço do gráfico de f no GeoGebra, e observe que os limites laterais

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x} = -\infty$$

- Como os limites laterais são distintos podemos concluir que $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.

As propriedades de a soma, diferença, produto e quociente de limites valem para os limites laterais.

Exemplo: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Solução.

- Basta verificar que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ para obter o resto das igualdades.
- Faça $z = (x-1)^2$
- Observe que $z > 0$ para qualquer valor de $x > 0$.
- Veja também que quando x aproxima-se de 1, temos que z aproxima-se de 0, mas por valores positivos.
  Assim
  $$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{z\to 0^+} \frac{1}{z} = +\infty$$
  .

Calcular $\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|}$ e $\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|}$

Solução.

- Observe que $x+2>0$ se e somente se $x>-2$.
- Assim, se $x>-2$, temos $x+2>0$ e então $|x+2| = x+2$.
- Logo, se $x<-2$, temos $x+2<0$ e então $|x+2| = -(x+2)$.
- Portanto, temos

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \frac{(x \cancel{+} 2)}{(x \cancel{+} 2)} = \lim_{x \to -2} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \frac{(x \cancel{+} 2)}{-(x \cancel{+} 2)} = \lim_{x \to -2} -1 = -1$$

Tópicos de AT2-1

Questões

1. Esboçe um gráfico de uma função $y = f(x)$ que verifique:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

2. Calcule os limites laterais

(a) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \frac{|\pi - x|}{x-\pi}$ (b) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{|\pi - x|}{x-\pi}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+4}{2-x}$

3. Calcule $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ e diga se existe $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$. Diga também se f é contínua no ponto -3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-3x} & \text{se } x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$$

Respostas e sugestões

1. Sugestão use a apostilha (aula 2) do Prof. João Sampaio.
2. (a) -1 (b) 1 (c) $+\infty$
3.
   - $\displaystyle\lim_{x \to -3^+} f(x) = -1$,
   - $\displaystyle\lim_{x \to -3^-} f(x) = \frac{1}{11}$.
   - Daí, não existe o limite $\displaystyle\lim_{x \to -3} f(x)$.
   - Apessar de $f(-3) = -1$, mas como não existe $\displaystyle\lim_{x \to -3} f(x)$, f não é contínua no ponto -3.