Números Reais e Funções

AT1-1 - Unidade 1

Cálculo Diferencial e Integral[1]

Bacharelado em Sistemas de Informação

UAB - UFSCar

[1] Não imprimir esta versão tem mais de 300 páginas

Tópicos da Unidade 1

1. Números Reais
   - Conjuntos numéricos
   - Axiomática
   - Intervalos

2. Funções
   - Definições
   - Exemplos
   - Operações

Tópicos da Unidade 1

Números naturais e inteiros

Números naturais e inteiros

- O conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N}$ é o conjunto dos *números inteiros positivos* $\mathbb{Z}_+$, ou seja

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{Z}_+$$

Números naturais e inteiros

- O conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N}$ é o conjunto dos *números inteiros positivos* $\mathbb{Z}_+$, ou seja

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{Z}_+$$

Números naturais e inteiros

- O conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N}$ é o conjunto dos *números inteiros positivos* $\mathbb{Z}_+$, ou seja

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{Z}_+$$

- O conjunto dos *números inteiros negativos*

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1\}$$

Números naturais e inteiros

- O conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N}$ é o conjunto dos *números inteiros positivos* $\mathbb{Z}_+$, ou seja

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{Z}_+$$

- O conjunto dos *números inteiros negativos*

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1\}$$

Números naturais e inteiros

- O conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N}$ é o conjunto dos *números inteiros positivos* $\mathbb{Z}_+$, ou seja

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{Z}_+$$

- O conjunto dos *números inteiros negativos*

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1\}$$

união com o zero 0 e os números naturais forma o conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z}$, isto é

Números naturais e inteiros

- O conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N}$ é o conjunto dos *números inteiros positivos* $\mathbb{Z}_+$, ou seja

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{Z}_+$$

- O conjunto dos *números inteiros negativos*

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1\}$$

união com o zero 0 e os números naturais forma o conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z}$, isto é

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

Números racionais e irracionais

Números racionais e irracionais

- O conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q}$ é formado por todos os números x tal que x é uma fração da forma $\frac{p}{q}$, onde os números p, q são números inteiros e q é diferente de 0, ou seja

Números racionais e irracionais

- O conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q}$ é formado por todos os números x tal que x é uma fração da forma $\frac{p}{q}$, onde os números p, q são números inteiros e q é diferente de 0, ou seja

Números racionais e irracionais

- O conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q}$ é formado por todos os números x tal que x é uma fração da forma $\dfrac{p}{q}$, onde os números p, q são números inteiros e q é diferente de 0, ou seja

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Números racionais e irracionais

- O conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q}$ é formado por todos os números x tal que x é uma fração da forma $\dfrac{p}{q}$, onde os números p, q são números inteiros e q é diferente de 0, ou seja

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

- O conjunto dos *números irracionais* $\mathbb{Q}^c$ é formado pelos números que não são racionais, isto é

$$\mathbb{Q}^c = \{x |\ x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\dfrac{281011375}{-125}} =$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\dfrac{281011375}{-125}} =$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\dfrac{281011375}{-125}} = \left(\dfrac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} =$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} =$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\dfrac{281011375}{-125}} = \left(\dfrac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} =$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\dfrac{281011375}{-125}} = \left(\dfrac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} =$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} =$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} =$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,13131313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\dfrac{281011375}{-125}} = \left(\dfrac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\dfrac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,1313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,13131313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,131313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,1313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$,

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,131313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,131313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,1313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.
4. o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$,

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,1313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.
4. o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$,

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,131313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.
4. o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} = 1,414213562373095... \in \mathbb{Q}^c$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,1313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.
4. o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} = 1,414213562373095... \in \mathbb{Q}^c$
5. o perímetro de uma circunferência de raio 1 é

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,131313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.
4. o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} = 1,414213562373095... \in \mathbb{Q}^c$
5. o perímetro de uma circunferência de raio 1 é

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,1313131313131313131313\ldots \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.
4. o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} = 1,414213562373095\ldots \in \mathbb{Q}^c$
5. o perímetro de uma circunferência de raio 1 é o número irracional π,

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,1313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.
4. o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} = 1,414213562373095... \in \mathbb{Q}^c$
5. o perímetro de uma circunferência de raio 1 é o número irracional π, $\pi = 3,141592653589793... \in \mathbb{Q}^c$

Exemplos de números racionais e irracionais e notações

1. $\sqrt[3]{\frac{281011375}{-125}} = \left(\frac{2248091 \cdot 125}{-5^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{131^3 \cdot 5^3}}{-5} = -\sqrt[3]{131^3} = -131 \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{310}{99} = 3,\overline{13} = 3,13131313131313131313131313... \in \mathbb{Q}$
3. $1,414213562373095 \in \mathbb{Q}$ e $1,\overline{414213562373095} \in \mathbb{Q}$, mas $1,414213562373095 \neq 1,\overline{414213562373095}$, pois o número racional $1,414213562373095$ tem um número finito de casas decimais não nulas e o número racional $1,\overline{414213562373095}$ tem um número infinito de casas decimais não nulas.
4. o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 é o número irracional $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} = 1,414213562373095... \in \mathbb{Q}^c$
5. o perímetro de uma circunferência de raio 1 é o número irracional π, $\pi = 3,141592653589793... \in \mathbb{Q}^c$

Observe também que:

Observe também que:

- $\sqrt{2} =$ 1,414213562373095048801688724209698
0785696718753769480731766797379907324784621070
38850387534327641572735013846230912297
02492483605585073721264412149709993583141322266
5927505592755799950501152782060571 5...

Observe também que:

- $\sqrt{2} =$ 1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038753432764157273501384623091229702492483605585073721264412149709993583141322266592750559275579995050115278206057 15...

Observe também que:

- $\sqrt{2} =$ 1,414213562373095048801688724209698
0785696718753769480731766797379907324784621070
38850387534327641572735013846230912297
02492483605585073721264412149709993583141322266
59275055927557999505011527820605715...
- $\pi =$ 3,141592653589793238462643383279502884197
1693993751058209749445923078164062862089986280
34825342117067982148086513282306647093844609
550582231725359408128481117450284102701938521
105559644622948954930381964428810975665 93...

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

- $e = 2,718281828459045235360287 4...$

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

- $e = 2,718281828459045235360287 4...$

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

- $e = 2,718281828459045235360287 4...$
  = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699
  959574966967627724076630353547594571382178525166427427466
  39193200305992181741359662904357290033429526059563073
  813232862794349076323382988075319525101901157383418793
  070215408914993488416750924476146066808226480016847 74
  11853742345442437107539077744992069551702761838606261 3
  313845830007520449338265602976067371132007093287091274
  437470472306969772093101416928368190255151086574637721
  112523897844250569536967707854499699679468644549059879
  316368892300987931277361782154249992295763514
  822082698951936 68...

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

- $e = 2,718281828459045235360287...$
  = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699
  959574966967627724076630353547594571382178525166427427466
  391932003059921817413596629043572900334295260595630738
  132328627943490763233829880753195251019011573834187930
  702154089149934884167509244761460668082264800168477411
  853742345442437107539077744992069551702761838606261331
  384583000752044933826560297606737113200709328709127443
  747047230696977209310141692836819025515108657463772111
  252389784425056953696770785449969967946864454905987931
  636889230098793127736178215424999229576351482208269895
  193668... $\in \mathbb{Q}^c$

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

- $e = 2,718281828459045235360287 4...$
  = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699
  959574966967627724076630353547594571382178525166427427 46
  63919320030599218174135966290435729003342952605956307 3
  81323286279434907632338298807531952510190115738341879 3
  07021540891499348841675092447614606680822648001684774
  11853742345442437107539077744992069551702761838606261 3
  31384583000752044933826560297606737113200709328709127 4
  43747047230696977209310141692836819025515108657463772 1
  11252389784425056953696770785449969967946864454905987 9
  3163688923009879312773617821542499922957635 14
  82208269895193668... $\in \mathbb{Q}^c$
  Aquí esta o número de Euler com 545 casas decimais.

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

- $e = 2,718281828459045235360287...$
  $=$ 2,718281828459045235360287471352662497757247093699
  95957496696762772407663035354759457138217852516642742746
  639193200305992181741359662904357290033429526059563073
  813232862794349076323382988075319525101901157383418793
  07021540891499348841675092447614606680822648001684774
  118537423454424371075390777449920695517027618386062613
  313845830007520449338265602976067371132007093287091274
  437470472306969772093101416928368190255151086574637721
  112523897844250569536967707854499699679468644549059879
  316368892300987931277361782154249992295763514
  82208269895193668... $\in \mathbb{Q}^c$
  Aquí esta o número de Euler com 545 casas decimais.
- sen $1 = 0,017452406437283512819... \in \mathbb{Q}^c$

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

- $e = 2,718281828459045235360287 4...$
  $=$ 2,718281828459045235360287471352662497757247093699
  959574966967627724076630353547594571382178525166427427466
  39193200305992181741359662904357290033429526059563073
  813232862794349076323382988075319525101901157383418793
  070215408914993488416750924476146066808226480016847741
  185374234544243710753907774499206955170276183860626133
  138458300075204493382656029760673711320070932870912744
  374704723069697720931014169283681902551510865746377211
  125238978442505695369677078544996996794686445490598793
  16368892300987931277361782154249992295763514
  822082698951936 68... $\in \mathbb{Q}^c$
  Aquí esta o número de Euler com 545 casas decimais.
- sen $1 = 0,017452406437283512819... \in \mathbb{Q}^c$

Outros irracionais

Ao longo desta disciplina veremos outros número irracionais, tais como:

- $e = 2,718281828459045235360287 4...$
  $=$ 2,718281828459045235360287471352662497757247093699
  95957496696762772407663035354759457138217852516642742746
  63919320030599218174135966290435729003342952605956307 3
  81323286279434907632338298807531952510190115738341879 3
  07021540891499348841675092447614606680822648001684774
  11853742345442437107539077744992069551702761838606261 3
  31384583000752044933826560297606737113200709328709127 4
  43747047230696977209310141692836819025515108657463772 1
  11252389784425056953696770785449969967946864454905987 9
  31636889230098793127736178215424999229576351 4
  82208269895193668... $\in \mathbb{Q}^c$
  Aquí esta o número de Euler com 545 casas decimais.
- $\text{sen } 1 = 0,017452406437283512819... \in \mathbb{Q}^c$
- $\log_{10} 2 = 0,30102999566398119521373 88... \in \mathbb{Q}^c$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$,

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \qquad \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ $\quad$ e $\quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \phi$,

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ $\quad$ e $\quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \phi$, onde a letra grega ϕ (lea-se "phi") denota ao longo destas notas o conjunto vazio.

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ $\quad$ e $\quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \phi$, onde a letra grega ϕ (lea-se "phi") denota ao longo destas notas o conjunto vazio.
2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ $\quad$ e $\quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \phi$, onde a letra grega ϕ (lea-se "phi") denota ao longo destas notas o conjunto vazio.
2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis infinitos que possuem a mesma quantidade de elementos.

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \phi$, onde a letra grega ϕ (lea-se "phi") denota ao longo destas notas o conjunto vazio.
2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis infinitos que possuem a mesma quantidade de elementos.
3. $\mathbb{Q}^c$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos que possuem a mesma quantidade de elementos,

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R} \quad$ e $\quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \phi$, onde a letra grega ϕ (lea-se "phi") denota ao longo destas notas o conjunto vazio.
2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis infinitos que possuem a mesma quantidade de elementos.
3. $\mathbb{Q}^c$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos que possuem a mesma quantidade de elementos, mas são conjuntos não enumeráveis,

$\mathbb{R}$

- O conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$ é formado pela união dos números racionais e irracionais, assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Observações

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R} \quad$ e $\quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \phi$, onde a letra grega ϕ (lea-se "phi") denota ao longo destas notas o conjunto vazio.
2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis infinitos que possuem a mesma quantidade de elementos.
3. $\mathbb{Q}^c$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos que possuem a mesma quantidade de elementos, mas são conjuntos não enumeráveis, pois tem mais elementos que o conjunto dos números naturais, inteiros e racionais.

Tópicos da Unidade 1

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$,

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$,

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b,

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b.

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

i. $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$ Existência de elementos neutros

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$ Existência de elementos neutros
6. Para todo a em $\mathbb{R}$, existe um único número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "$+$" e *multiplicação* "$\cdot$" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$ Existência de elementos neutros
6. Para todo a em $\mathbb{R}$, existe um único número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$ Existência de elementos neutros
6. Para todo a em $\mathbb{R}$, existe um único número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ Existência de oposto

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$ Existência de elementos neutros
6. Para todo a em $\mathbb{R}$, existe um único número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ Existência de oposto
7. Para todo número real $a \neq 0$, existe um único número real $a^{-1} = \frac{1}{a}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a+b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a+b=b+a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a+(b+c)=(a+b)+c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a+0=a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$ Existência de elementos neutros
6. Para todo a em $\mathbb{R}$, existe um único número real $-a$ tal que $a+(-a)=0$ Existência de oposto
7. Para todo número real $a \neq 0$, existe um único número real $a^{-1} = \frac{1}{a}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

$i.$ $\mathbb{R}$ é um corpo

No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de *adição* "+" e *multiplicação* "·" satisfazem os seguintes sete axiomas[2]

1. Para todo a, b em $\mathbb{R}$, existe um único número real $a + b$, chamado *soma* de a e b, e existe um único número real $a \cdot b$, chamado *produto* de a e b. Bem definida
2. $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ Comutativa
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Associativa
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributiva
5. $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ $(0 \neq 1)$ Existência de elementos neutros
6. Para todo a em $\mathbb{R}$, existe um único número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ Existência de oposto
7. Para todo número real $a \neq 0$, existe um único número real $a^{-1} = \frac{1}{a}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ Existência de inverso

[2] Axiomas são propriedades aceitas sem demonstração.

Observação

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),
o axioma $i.2$ de comutatividade,

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
   o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),
   o axioma $i.2$ de comutatividade,
   o axioma $i.3$ de associatividade,

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
   o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),
   o axioma $i.2$ de comutatividade,
   o axioma $i.3$ de associatividade,
   o axioma $i.4$ de distributividade,

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
   o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),
   o axioma $i.2$ de comutatividade,
   o axioma $i.3$ de associatividade,
   o axioma $i.4$ de distributividade,
   o axioma $i.5$ da existência dos elementos neutros,

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),
o axioma $i.2$ de comutatividade,
o axioma $i.3$ de associatividade,
o axioma $i.4$ de distributividade,
o axioma $i.5$ da existência dos elementos neutros,
o axioma $i.6$ da existência de oposto e

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),
o axioma $i.2$ de comutatividade,
o axioma $i.3$ de associatividade,
o axioma $i.4$ de distributividade,
o axioma $i.5$ da existência dos elementos neutros,
o axioma $i.6$ da existência de oposto e
o axioma $i.7$ da existência de inverso,

Observação

1. O conjunto dos números reais com as operações de adicição e multiplicação, e com
   o axioma $i.1$ de fechamento (bem definda),
   o axioma $i.2$ de comutatividade,
   o axioma $i.3$ de associatividade,
   o axioma $i.4$ de distributividade,
   o axioma $i.5$ da existência dos elementos neutros,
   o axioma $i.6$ da existência de oposto e
   o axioma $i.7$ da existência de inverso,
   tornam $\mathbb{R}$ um corpo.

Observação

Observação

1. Os axiomas $i.6$ e $i.7$ de existência de oposto e existência de inverso permitem definir as operações de *substração* "$-$" e *divisão* "$\div$", respectivamente nos números reais. Isto é,

Observação

1. Os axiomas $i.6$ e $i.7$ de existência de oposto e existência de inverso permitem definir as operações de *substração* "$-$" e *divisão* "$\div$", respectivamente nos números reais. Isto é,

$$a - b = a + (-b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \quad b \neq 0.$$

Observação

1. Os axiomas $i.6$ e $i.7$ de existência de oposto e existência de inverso permitem definir as operações de *substração* "$-$" e *divisão* "$\div$", respectivamente nos números reais. Isto é,

$$a - b = a + (-b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \quad b \neq 0.$$

2. Em particular, temos que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd} \qquad \text{e}$$

Observação

1. Os axiomas $i.6$ e $i.7$ de existência de oposto e existência de inverso permitem definir as operações de *substração* "$-$"e *divisão* "$\div$", respectivamente nos números reais. Isto é,

$$a - b = a + (-b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \quad b \neq 0.$$

2. Em particular, temos que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

Observação

1. Os axiomas $i.6$ e $i.7$ de existência de oposto e existência de inverso permitem definir as operações de *substração* "$-$" e *divisão* "$\div$", respectivamente nos números reais. Isto é,

$$a - b = a + (-b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \quad b \neq 0.$$

2. Em particular, temos que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Observação

1. Os axiomas $i.6$ e $i.7$ de existência de oposto e existência de inverso permitem definir as operações de *substração* "$-$" e *divisão* "$\div$", respectivamente nos números reais. Isto é,

$$a - b = a + (-b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \quad b \neq 0.$$

2. Em particular, temos que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Exemplo

Exemplo

Dados os números reais a, r com

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$,

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$, então, podemos afirmar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ...$$

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$, então, podemos afirmar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ...$$

é sempre um número real.

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$, então, podemos afirmar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots$$

é sempre um número real. Vamos calcular o valor de S:

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$, então, podemos afirmar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots$$

é sempre um número real. Vamos calcular o valor de S:

$$S = a + \overbrace{ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots}^{\text{fatore por } r}$$

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$, então, podemos afirmar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots$$

é sempre um número real. Vamos calcular o valor de S:

$$\begin{aligned} S &= a + \overbrace{ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots}^{\text{fatore por } r} \\ &= a + r\underbrace{\left(a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots\right)}_{\text{observe que isto vale } S} \end{aligned}$$

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$, então, podemos afirmar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots$$

é sempre um número real. Vamos calcular o valor de S:

$$\begin{aligned} S &= a + \overbrace{ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots}^{\text{fatore por } r} \\ &= a + r\underbrace{\left(a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots\right)}_{\text{observe que isto vale } S} \end{aligned}$$

Assim, $\quad S = a + rS$

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$, então, podemos afirmar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots$$

é sempre um número real. Vamos calcular o valor de S:

$$\begin{aligned} S &= a + \overbrace{ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots}^{\text{fatore por } r} \\ &= a + r\underbrace{\left(a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots\right)}_{\text{observe que isto vale } S} \end{aligned}$$

Assim, $\qquad S = a + rS \quad \Rightarrow \quad S = \dfrac{a}{1-r}$

Exemplo

Dados os números reais a, r com r entre -1 e 1 $(-1 < r < 1)$, então, podemos afirmar que a soma infinita

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots$$

é sempre um número real. Vamos calcular o valor de S:

$$\begin{aligned} S &= a + \overbrace{ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots}^{\text{fatore por } r} \\ &= a + r\underbrace{\left(a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots\right)}_{\text{observe que isto vale } S} \end{aligned}$$

Assim, $\quad S = a + rS \quad \Rightarrow \quad S = \dfrac{a}{1-r}$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots = \frac{a}{1-r}, \quad a \in \mathbb{R}, \ -1 < r < 1.$$

Lista 1 de exercícios

Lista 1 de exercícios

Em cada um dos itens abaixo, justifique sua resposta.

1. $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$?

Lista 1 de exercícios

Em cada um dos itens abaixo, justifique sua resposta.

1. $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$?
2. $\frac{13}{99} = \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^4} + \frac{13}{10^6} + \ldots = 0,\overline{13} = 0,131313\ldots$?

Lista 1 de exercícios

Em cada um dos itens abaixo, justifique sua resposta.

1. $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$?
2. $\frac{13}{99} = \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^4} + \frac{13}{10^6} + ... = 0,\overline{13} = 0,131313...$?
3. $\frac{11^2 \pi^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{-1331\pi}} \in \mathbb{Q}^c$?

Lista 1 de exercícios

Em cada um dos itens abaixo, justifique sua resposta.

1. $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$?
2. $\frac{13}{99} = \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^4} + \frac{13}{10^6} + \ldots = 0,\overline{13} = 0,131313\ldots$?
3. $\frac{11^2 \pi^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{-1331\pi}} \in \mathbb{Q}^c$?
4. Afirmar que $-2 = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = \sqrt{(-2)^2} = 2$ está correto?

Lista 1 de exercícios

Em cada um dos itens abaixo, justifique sua resposta.

1. $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$?
2. $\frac{13}{99} = \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^4} + \frac{13}{10^6} + \ldots = 0,\overline{13} = 0,131313\ldots$?
3. $\frac{11^2 \pi^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{-1331\pi}} \in \mathbb{Q}^c$?
4. Afirmar que $-2 = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = \sqrt{(-2)^2} = 2$ está correto?
5. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$?

ii. $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

ii. $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

$ii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

ii. $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

$ii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

$ii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

$ii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
   (leia-se: se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$)

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

$ii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
   (leia-se: se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$)
3. se $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

$ii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a$ $\Rightarrow$ $a = b$
   (leia-se: se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$)
3. se $a \leq b$ e $b \leq c$ $\Rightarrow$ $a \leq c$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

$ii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
   (leia-se: se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$)
3. se $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$
4. se $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

$ii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
   (leia-se: se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$)
3. se $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$
4. se $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

ii. $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado

No conjunto dos números reais introduzimos uma relação de ordem, chamada *menor ou igual* "$\leq$" que satisfaz os seguintes axiomas[3] para todo a, b e c números reais

1. $a \leq b$ ou $b \leq a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a$ $\Rightarrow$ $a = b$
   (leia-se: se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$)
3. se $a \leq b$ e $b \leq c$ $\Rightarrow$ $a \leq c$
4. se $a \leq b$ $\Rightarrow$ $a + c \leq b + c$
5. se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ $\Rightarrow$ $0 \leq a \cdot b$

[3] Os axiomas $ii.1$ ao $ii.5$ tornam o corpo $\mathbb{R}$ totalmente ordenado

Exemplo

Exemplo

1. Se $\overbrace{\text{Se}\quad 0 < a < b}^{\text{Hipótese}} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{média geométrica}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{média aritmética}}.}^{\text{Tese}} \quad (*)$

Exemplo

1. Se $\overbrace{0 < a < b}^{\text{Hipótese}} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{média geométrica}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{média aritmética}}.}^{\text{Tese}} \quad (*)$

Exemplo

1. $\overbrace{\text{Se} \quad 0 < a < b}^{\text{Hipótese}} \;\Rightarrow\; \overbrace{\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{média geométrica}} \quad < \quad \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{média aritmética}}.}^{\text{Tese}} \qquad (*)$

Se a ou b forem negativos, a desigualdade $(*)$ não faz sentido!

Exemplo

1. $$\text{Se}\quad \overbrace{0 < a < b}^{\text{Hipótese}} \;\Rightarrow\; \overbrace{\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{média geométrica}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{média aritmética}}.}^{\text{Tese}} \qquad (*)$$

Se a ou b forem negativos, a desigualdade $(*)$ não faz sentido!
De fato, se $a = -2$ e $b = 3$, temos que $\sqrt{ab} = \sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$.

Exemplo

1. Se $\overbrace{0 < a < b}^{\text{Hipótese}} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{média geométrica}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{média aritmética}}.}^{\text{Tese}} \quad (*)$

Se a ou b forem negativos, a desigualdade $(*)$ não faz sentido!
De fato, se $a = -2$ e $b = 3$, temos que $\sqrt{ab} = \sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$.
Agora, se a e b forem ambos negativos, temos que $(*)$ não se verifica!

Exemplo

1. Se $\overbrace{0 < a < b}^{\text{Hipótese}} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{média geométrica}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{média aritmética}}.}^{\text{Tese}} \quad (*)$

Se a ou b forem negativos, a desigualdade $(*)$ não faz sentido!
De fato, se $a = -2$ e $b = 3$, temos que $\sqrt{ab} = \sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$.
Agora, se a e b forem ambos negativos, temos que $(*)$ não se verifica!
De fato, se $a = -2$ e $b = -3$, então

$$\sqrt{ab} = \sqrt{6} = 2,44948974278317809819728 40... > -\frac{5}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Exemplo

1. Se $\overbrace{0 < a < b}^{\text{Hipótese}} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{média geométrica}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{média aritmética}}.}^{\text{Tese}} \quad (*)$

Se a ou b forem negativos, a desigualdade $(*)$ não faz sentido!
De fato, se $a = -2$ e $b = 3$, temos que $\sqrt{ab} = \sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$.
Agora, se a e b forem ambos negativos, temos que $(*)$ não se verifica!
De fato, se $a = -2$ e $b = -3$, então

$$\sqrt{ab} = \sqrt{6} = 2,44948974278317809819728 40... > -\frac{5}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

A desigualdade entre as médias geométricas e a aritmética, obtem-se do seguinte fato:

- $0 < (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$

iii. $\mathbb{R}$ é um corpo arquimedeano

[4] O axioma $iii.1$ é conhecido como "Propriedade de Arquimedes".
Este axioma torna $\mathbb{R}$ um corpo arquimedeano.
Observe que este axioma não vale se $a \leq 0$.

iii. $\mathbb{R}$ é um corpo arquimedeano

O corpo totalmente ordenado dos números reais $\mathbb{R}$ verifica o seguinte axioma[4]:

[4] O axioma $iii.1$ é conhecido como "Propriedade de Arquimedes".
Este axioma torna $\mathbb{R}$ um corpo arquimedeano.
Observe que este axioma não vale se $a \leq 0$.

iii. $\mathbb{R}$ é um corpo arquimedeano

O corpo totalmente ordenado dos números reais $\mathbb{R}$ verifica o seguinte axioma[4]:

1. Para todo a e b números reais, se a é positivo, então existe n número natural tal que b é menor que o produto de n por a, é dizer:

[4] O axioma $iii.1$ é conhecido como "Propriedade de Arquimedes".
Este axioma torna $\mathbb{R}$ um corpo arquimedeano.
Observe que este axioma não vale se $a \leq 0$.

iii. $\mathbb{R}$ é um corpo arquimedeano

O corpo totalmente ordenado dos números reais $\mathbb{R}$ verifica o seguinte axioma[4]:

1. Para todo a e b números reais, se a é positivo, então existe n número natural tal que b é menor que o produto de n por a, é dizer:

[4] O axioma $iii.1$ é conhecido como "Propriedade de Arquimedes".
Este axioma torna $\mathbb{R}$ um corpo arquimedeano.
Observe que este axioma não vale se $a \leq 0$.

$iii.$ $\mathbb{R}$ é um corpo arquimedeano

O corpo totalmente ordenado dos números reais $\mathbb{R}$ verifica o seguinte axioma[4]:

1. Para todo a e b números reais, se a é positivo, então existe n número natural tal que b é menor que o produto de n por a, é dizer:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a$$

[4] O axioma $iii.1$ é conhecido como "Propriedade de Arquimedes".
Este axioma torna $\mathbb{R}$ um corpo arquimedeano.
Observe que este axioma não vale se $a \leq 0$.

Exemplos

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:

$$(\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a)$$

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:

$$(\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a)$$

   então existe um número natural n tal que $1 < n \cdot x$

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:

   $$(\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a)$$

   então existe um número natural n tal que $1 < n \cdot x \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < x.$

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:
   $$(\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a)$$
   então existe um número natural n tal que $1 < n \cdot x \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < x$.
2. $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.
   Solução:

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:
   $$(\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a)$$
   então existe um número natural n tal que $1 < n \cdot x \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < x$.
2. $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.
   Solução:

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:
   $$(\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a)$$
   então existe um número natural n tal que $1 < n \cdot x \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < x$.
2. $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.
   Solução:
   Pelo axioma de Arquimedes:

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:
   $$(\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a)$$
   então existe um número natural n tal que $1 < n \cdot x \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < x$.
2. $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.
   Solução:
   Pelo axioma de Arquimedes: para $a = 1 > 0$ e $b = x$, existe um número natural n tal que $x < n \cdot 1$

Exemplos

1. Para todo $x > 0$, existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
   Solução:
   Considere $a = x > 0$ e $b = 1$ e aplique o axioma de Arquimedes:
   $$(\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a \quad \Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n \cdot a)$$
   então existe um número natural n tal que $1 < n \cdot x \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < x.$
2. $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.
   Solução:
   Pelo axioma de Arquimedes: para $a = 1 > 0$ e $b = x$, existe um número natural n tal que $x < n \cdot 1$
   $$\Rightarrow \quad x < n.$$

$iv.$ $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto $\mathbb{R}$

[5] O axioma $iv.1$ é conhecido como "axioma de densidade".

iv. $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto $\mathbb{R}$

A densidade dos números racionais sobre os números reais é dada no seguinte axioma[5]:

[5] O axioma $iv.1$ é conhecido como "axioma de densidade".

iv. $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto $\mathbb{R}$

A densidade dos números racionais sobre os números reais é dada no seguinte axioma[5]:

1. Entre dois números reais quaisquer sempre existe algum número racional, é dizer:

[5] O axioma $iv.1$ é conhecido como "axioma de densidade".

$iv.$ $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto $\mathbb{R}$

A densidade dos números racionais sobre os números reais é dada no seguinte axioma[5]:

1. Entre dois números reais quaisquer sempre existe algum número racional, é dizer:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}, \quad \exists r \in \mathbb{Q} \quad \text{tal que} \quad a < r < b$$

[5] O axioma $iv.1$ é conhecido como "axioma de densidade".

Exemplos

Exemplos

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$ se $a < b \ \Rightarrow \ \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$.

   Solução:

Exemplos

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$ se $a < b \Rightarrow \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$.

   Solução:

$$\text{Como} \quad a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$

Exemplos

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$ se $a < b\ \Rightarrow\ \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$.
   Solução:

$$\text{Como}\quad a < b \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$

$$\Rightarrow a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$$

Exemplos

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$ se $a < b \ \Rightarrow\ \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Solução:

$$\text{Como} \quad a < b \ \Rightarrow\ \frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$

$$\Rightarrow a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} =$$

Exemplos

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$ se $a < b \ \Rightarrow \ \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$.
Solução:

$$\text{Como} \quad a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$

$$\Rightarrow a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} <$$

Exemplos

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$ se $a < b \ \Rightarrow\ \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$.
   Solução:

$$\text{Como} \quad a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$

$$\Rightarrow a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$$

Exemplos

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$ se $a < b \;\Rightarrow\; \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Solução:

$$\text{Como}\quad a < b \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$

$$\Rightarrow a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Exemplos

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$ se $a < b \ \Rightarrow\ \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$.
   Solução:

$$\text{Como} \quad a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2},$$

$$\Rightarrow a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

2. Como conseqüência do item 1, temos que: "entre dois números racionais existem infinitos números racionais".

v. $\mathbb{R}$ é um corpo completo

[6] O axioma v.1 é conhecido como "axioma do supremo";
$\mathbb{R}$ é um corpo completo com $v.1$;
v.1 torna $\mathbb{R}$ uma copia perfeita da reta.
No enunciado de $v.1$, k é uma "cota superior de A";
e s é "o supremo de A", e
s é a menor das cotas superiores de A, quando existe

v. $\mathbb{R}$ é um corpo completo

O conjunto dos números reais verifica o seguinte axioma[6]:

[6] O axioma v.1 é conhecido como "axioma do supremo";
$\mathbb{R}$ é um corpo completo com $v.1$;
v.1 torna $\mathbb{R}$ uma copia perfeita da reta.
No enunciado de $v.1$, k é uma "cota superior de A";
e s é "o supremo de A", e
s é a menor das cotas superiores de A, quando existe

v. $\mathbb{R}$ é um corpo completo

O conjunto dos números reais verifica o seguinte axioma[6]:

1. Todo subconjunto A de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente possui supremo, isto é

[6] O axioma v.1 é conhecido como "axioma do supremo";
$\mathbb{R}$ é um corpo completo com $v.1$;
v.1 torna $\mathbb{R}$ uma copia perfeita da reta.
No enunciado de $v.1$, k é uma "cota superior de A";
e s é "o supremo de A", e
s é a menor das cotas superiores de A, quando existe

v. $\mathbb{R}$ é um corpo completo

O conjunto dos números reais verifica o seguinte axioma[6]:

1. Todo subconjunto A de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente possui supremo, isto é

[6] O axioma v.1 é conhecido como "axioma do supremo";
$\mathbb{R}$ é um corpo completo com $v.1$;
v.1 torna $\mathbb{R}$ uma copia perfeita da reta.
No enunciado de $v.1$, k é uma "cota superior de A";
e s é "o supremo de A", e
s é a menor das cotas superiores de A, quando existe

v. $\mathbb{R}$ é um corpo completo

O conjunto dos números reais verifica o seguinte axioma[6]:

1. Todo subconjunto A de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente possui supremo, isto é

$$\forall\ A \subset \mathbb{R}, \quad A \neq \phi \ \text{ e } \underbrace{\exists k \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \forall\ x \in A, \quad x \leq k,}_{\text{limitado superiormente}}$$

$$\underbrace{\exists!\ s \in \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \forall\ \epsilon > 0 \ \ \exists\ a \in A, \quad a - \epsilon \leq s.}_{\text{supremo}}$$

[6] O axioma v.1 é conhecido como "axioma do supremo";
$\mathbb{R}$ é um corpo completo com $v.1$;
v.1 torna $\mathbb{R}$ uma copia perfeita da reta.
No enunciado de $v.1$, k é uma "cota superior de A";
e s é "o supremo de A", e
s é a menor das cotas superiores de A, quando existe

Exemplo

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ é limitado.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.
   Por exemplo: $\exists -10 \in \mathbb{R}$ tal que $-10 \leq x, \quad \forall\, x \in A$.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.
   Por exemplo: $\exists -10 \in \mathbb{R}$ tal que $-10 \leq x, \ \ \forall\, x \in A$.
   A é limitado superiormente, pois existem cotas superiores.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.
   Por exemplo: $\exists -10 \in \mathbb{R}$ tal que $-10 \leq x, \quad \forall\, x \in A$.
   A é limitado superiormente, pois existem cotas superiores.
   Por exemplo: $\exists 10 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 10, \quad \forall\, x \in A$.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.
   Por exemplo: $\exists -10 \in \mathbb{R}$ tal que $-10 \leq x, \quad \forall\, x \in A$.
   A é limitado superiormente, pois existem cotas superiores.
   Por exemplo: $\exists 10 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 10, \quad \forall\, x \in A$.
   - A menor das cotas superiores neste caso é 1.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.
   Por exemplo: $\exists -10 \in \mathbb{R}$ tal que $-10 \leq x, \quad \forall\ x \in A$.
   A é limitado superiormente, pois existem cotas superiores.
   Por exemplo: $\exists 10 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 10, \quad \forall\ x \in A$.
   - A menor das cotas superiores neste caso é 1.
     Logo 1 é o supremo de A.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.
   Por exemplo: $\exists -10 \in \mathbb{R}$ tal que $-10 \leq x, \quad \forall\ x \in A$.
   A é limitado superiormente, pois existem cotas superiores.
   Por exemplo: $\exists 10 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 10, \quad \forall\ x \in A$.
   - A menor das cotas superiores neste caso é 1.
     Logo 1 é o supremo de A.
     Como $1 \in A$ temos que o supremo é chamado de máximo
   - A menor das cotas inferiores de A é o infimo de A.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.
   Por exemplo: $\exists -10 \in \mathbb{R}$ tal que $-10 \leq x, \quad \forall\, x \in A$.
   A é limitado superiormente, pois existem cotas superiores.
   Por exemplo: $\exists 10 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 10, \quad \forall\, x \in A$.
   - A menor das cotas superiores neste caso é 1.
     Logo 1 é o supremo de A.
     Como $1 \in A$ temos que o supremo é chamado de máximo
   - A menor das cotas inferiores de A é o infimo de A.
     Neste caso o infimo de A existe e é igual a 0.

Exemplo

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ é limitado.
   Isto é, A é limitado superiormente e inferiormente
   Solução:
   Seja $x \in A$ qualquer.
   A é limitado inferiormente, pois existem cotas inferiores.
   Por exemplo: $\exists -10 \in \mathbb{R}$ tal que $-10 \leq x, \ \ \forall\ x \in A$.
   A é limitado superiormente, pois existem cotas superiores.
   Por exemplo: $\exists 10 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 10, \ \ \forall\ x \in A$.
   - A menor das cotas superiores neste caso é 1.
     Logo 1 é o supremo de A.
     Como $1 \in A$ temos que o supremo é chamado de máximo
   - A menor das cotas inferiores de A é o infimo de A.
     Neste caso o infimo de A existe e é igual a 0.
     Como $0 \notin A$, temos que A não tem mínimo.

Exemplo

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.
   Solução:

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.
   Solução:
   Seja $x \in B$ qualquer. Temos dois casos a ser considerados:

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.
   Solução:
   Seja $x \in B$ qualquer. Temos dois casos a ser considerados:
   - Caso 1: Se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 < \sqrt{2} < 2$;

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.

   Solução:

   Seja $x \in B$ qualquer. Temos dois casos a ser considerados:

   - Caso 1: Se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 < \sqrt{2} < 2$;
   - Caso 2: se $0 \leq x$ e $x^2 < 2 \;\Rightarrow\; 0 \leq x = \sqrt{x^2} < \sqrt{2} < 2$.

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.

   Solução:

   Seja $x \in B$ qualquer. Temos dois casos a ser considerados:

   - Caso 1: Se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 < \sqrt{2} < 2$;
   - Caso 2: se $0 \leq x$ e $x^2 < 2 \;\Rightarrow\; 0 \leq x = \sqrt{x^2} < \sqrt{2} < 2$.

   Portanto em ambos casos concluimos que $x < 2$ para $x \in B$.

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.
   Solução:
   Seja $x \in B$ qualquer. Temos dois casos a ser considerados:
   - Caso 1: Se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 < \sqrt{2} < 2$;
   - Caso 2: se $0 \leq x$ e $x^2 < 2 \ \Rightarrow \ 0 \leq x = \sqrt{x^2} < \sqrt{2} < 2$.

   Portanto em ambos casos concluimos que $x < 2$ para $x \in B$.
   Isto mostra que B é um conjunto limitado.

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.

   Solução:

   Seja $x \in B$ qualquer. Temos dois casos a ser considerados:

   - Caso 1: Se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 < \sqrt{2} < 2$;
   - Caso 2: se $0 \leq x$ e $x^2 < 2 \Rightarrow \quad 0 \leq x = \sqrt{x^2} < \sqrt{2} < 2$.

   Portanto em ambos casos concluimos que $x < 2$ para $x \in B$. Isto mostra que B é um conjunto limitado.

2. $\sqrt{2}$ é também uma cota superior de B pelo item acima;

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.
   Solução:
   Seja $x \in B$ qualquer. Temos dois casos a ser considerados:
   - Caso 1: Se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 < \sqrt{2} < 2$;
   - Caso 2: se $0 \leq x$ e $x^2 < 2 \ \Rightarrow \ 0 \leq x = \sqrt{x^2} < \sqrt{2} < 2$.

   Portanto em ambos casos concluimos que $x < 2$ para $x \in B$. Isto mostra que B é um conjunto limitado.
2. $\sqrt{2}$ é também uma cota superior de B pelo item acima;
3. Veja que $\sqrt{2} \notin B$;

Exemplo

O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ tem as seguintes propriedades.

1. B é limitado superiormente por 2.
   Solução:
   Seja $x \in B$ qualquer. Temos dois casos a ser considerados:
   - Caso 1: Se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 < \sqrt{2} < 2$;
   - Caso 2: se $0 \leq x$ e $x^2 < 2 \;\Rightarrow\; 0 \leq x = \sqrt{x^2} < \sqrt{2} < 2$.

   Portanto em ambos casos concluimos que $x < 2$ para $x \in B$.
   Isto mostra que B é um conjunto limitado.
2. $\sqrt{2}$ é também uma cota superior de B pelo item acima;
3. Veja que $\sqrt{2} \notin B$;
4. Verifique que $\sqrt{2}$ é o supremo de B em $\mathbb{R}$;

Tópicos da Unidade 1

Tipos de intervalos em $\mathbb{R}$

Tipos de intervalos em $\mathbb{R}$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Então temos os intervalos

- Intervalos abertos

$$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ ]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\ ]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tipos de intervalos em $\mathbb{R}$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Então temos os intervalos

- Intervalos abertos

$$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ ]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\ ]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Intervalos fechados

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ ]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \end{aligned}$$

Tipos de intervalos em $\mathbb{R}$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Então temos os intervalos

- Intervalos abertos

$$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ ]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\ ]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Intervalos fechados

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ ]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \end{aligned}$$

- Intervalos semiabertos e semifechados

$$\begin{aligned}]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \end{aligned}$$

Lista 2

Lista 2

1. A inequação $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$ é equivalente a $3x - 1 \geq 5(x+2)$?

Lista 2

1. A inequação $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$ é equivalente a $3x - 1 \geq 5(x+2)$?
2. Se $I = [0, 2]$ e $J = [-1, 1[$, então $I \cap J = [0, 1]$?

Lista 2

1. A inequação $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$ é equivalente a $3x - 1 \geq 5(x+2)$?
2. Se $I = [0,2]$ e $J = [-1,1[$, então $I \cap J = [0,1]$?
3. $]-\infty, \pi[$ não possui infimo, mas tem π como supremo?

Lista 2

1. A inequação $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$ é equivalente a $3x - 1 \geq 5(x+2)$?
2. Se $I = [0,2]$ e $J = [-1,1[$, então $I \cap J = [0,1]$?
3. $]-\infty, \pi[$ não possui infimo, mas tem π como supremo?
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x + 3 \leq 9\}$ tem infimo $\frac{4}{5}$, mas não mínimo?

Lista 2

1. A inequação $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$ é equivalente a $3x-1 \geq 5(x+2)$?
2. Se $I = [0,2]$ e $J = [-1,1[$, então $I \cap J = [0,1]$?
3. $]-\infty, \pi[$ não possui infimo, mas tem π como supremo?
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x+3 \leq 9\}$ tem infimo $\frac{4}{5}$, mas não mínimo?
5. $\left]\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right] = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x+3 \leq 9\}$?

Lista 2

1. A inequação $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$ é equivalente a $3x - 1 \geq 5(x+2)$?
2. Se $I = [0,2]$ e $J = [-1,1[$, então $I \cap J = [0,1]$?
3. $]-\infty, \pi[$ não possui infimo, mas tem π como supremo?
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x + 3 \leq 9\}$ tem infimo $\frac{4}{5}$, mas não mínimo?
5. $\left]\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right] = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x+3 \leq 9\}$?
6. $x \in \left]-\infty, -\frac{35}{4}\right[\cup \left]-7, +\infty\right[$ é solução da desigualdade

$$\frac{x}{x+7} < 5, \quad x \neq -7 \text{ ?}$$

Lista 2

1. A inequação $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$ é equivalente a $3x - 1 \geq 5(x+2)$?
2. Se $I = [0,2]$ e $J = [-1,1[$, então $I \cap J = [0,1]$?
3. $]-\infty, \pi[$ não possui infimo, mas tem π como supremo?
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x + 3 \leq 9\}$ tem infimo $\frac{4}{5}$, mas não mínimo?
5. $\left]\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right] = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < 5x + 3 \leq 9\}$?
6. $x \in \left]-\infty, -\frac{35}{4}\right[\cup \left]-7, +\infty\right[$ é solução da desigualdade
$$\frac{x}{x+7} < 5, \quad x \neq -7 \text{ ?}$$
7. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < (x+5)(x-3)\} =]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[$?

Tópicos da Unidade 1

Conceitos básicos sobre funções reais a valores reais

Conceitos básicos sobre funções reais a valores reais

Considere que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.
Uma função f real a valores reais é uma regra que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder um único elemento $f(x) \in B$.

$$\text{Escrevemos:} \quad f: \begin{array}{rcl} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- A é o domínio de f e é denotado por $D(f)$;

Conceitos básicos sobre funções reais a valores reais

Considere que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.
Uma função f real a valores reais é uma regra que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder um único elemento $f(x) \in B$.

$$\text{Escrevemos:} \quad f: \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

- A é o domínio de f e é denotado por $D(f)$;
- B é o contradomínio de f;

Conceitos básicos sobre funções reais a valores reais

Considere que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.
Uma função f real a valores reais é uma regra que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder um único elemento $f(x) \in B$.

$$\text{Escrevemos:} \quad f: \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

- A é o domínio de f e é denotado por $D(f)$;
- B é o contradomínio de f;
- $Im(f) = \{f(x) \in B \mid x \in D(f)\}$ é a imagem de f;

Conceitos básicos sobre funções reais a valores reais

Considere que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.
Uma função f real a valores reais é uma regra que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder um único elemento $f(x) \in B$.

$$\text{Escrevemos:} \quad f: \begin{array}{l} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

- A é o domínio de f e é denotado por $D(f)$;
- B é o contradomínio de f;
- $Im(f) = \{f(x) \in B \mid x \in D(f)\}$ é a imagem de f;
- o conjunto de todos os pares ordenados da forma $(x, f(x))$ tal que x percorre o domínio de f, é o gráfico de f, isto é $Graf(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$.

Tópicos da Unidade 1

Função módulo ou valor absoluto

Função módulo ou valor absoluto

A função módulo é da forma

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0, \end{cases}$$

Função módulo ou valor absoluto

A função módulo é da forma

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se \;\; x \geq 0 \\ -x, & se \;\; x < 0, \end{cases}$$

associa a cada $x \in \mathbb{R} = D(f)$ seu valor absoluto $|x| \geq 0$.

Função módulo ou valor absoluto

A função módulo é da forma

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se \;\; x \geq 0 \\ -x, & se \;\; x < 0, \end{cases}$$

associa a cada $x \in \mathbb{R} = D(f)$ seu valor absoluto $|x| \geq 0$.
Assim, a imagem de f é $Im(f) = [0, +\infty[$.

Função módulo ou valor absoluto

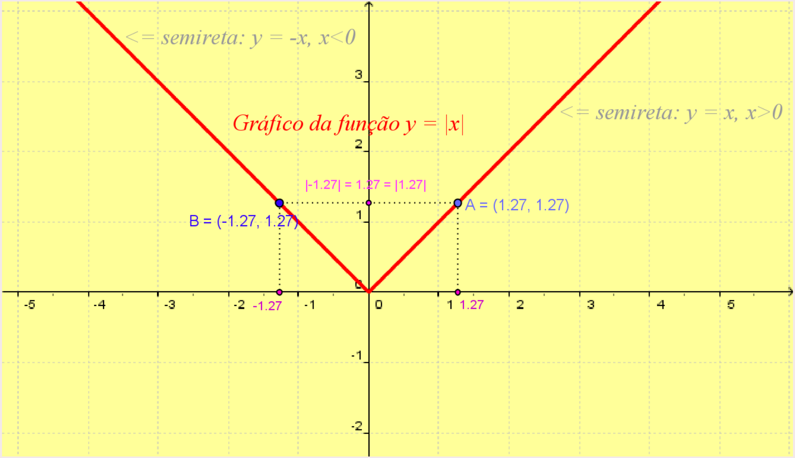
A função módulo é da forma

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se \;\; x \geq 0 \\ -x, & se \;\; x < 0, \end{cases}$$

associa a cada $x \in \mathbb{R} = D(f)$ seu valor absoluto $|x| \geq 0$.
Assim, a imagem de f é $Im(f) = [0, +\infty[$.
Logo, a representação gráfica de f é dada pela união de duas semiretas:

$$Graf(f) = \underbrace{\{(x, y) \mid y = x \text{ e } x \geq 0\}}_{semireta} \cup \underbrace{\{(x, y) \mid y = -x \text{ e } x < 0\}}_{semireta}$$

Gráfico da função $y = |x|$, clique sobre os retângulos para dar zoom



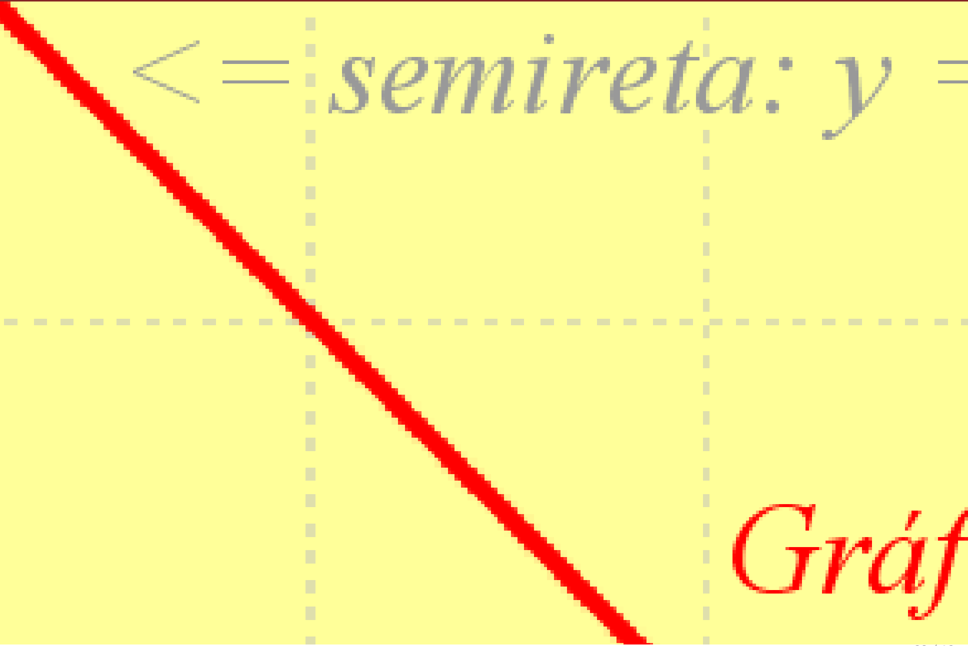
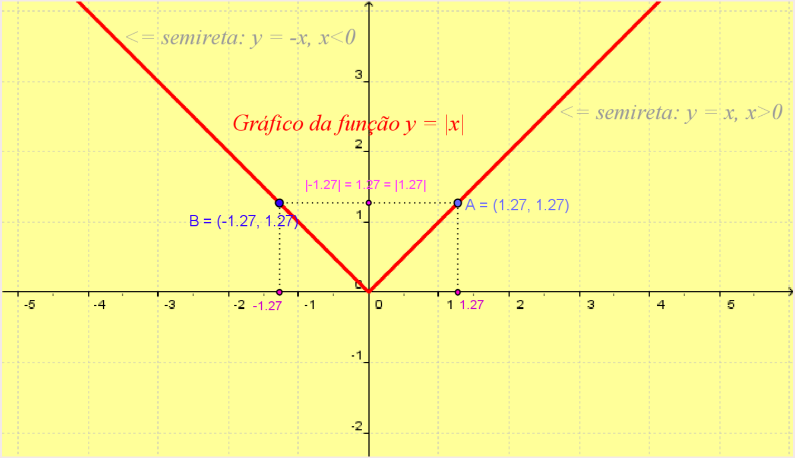

<= semireta: y =
Gráf

Gráfico da função $y = |x|$, clique sobre os retângulos para dar zoom



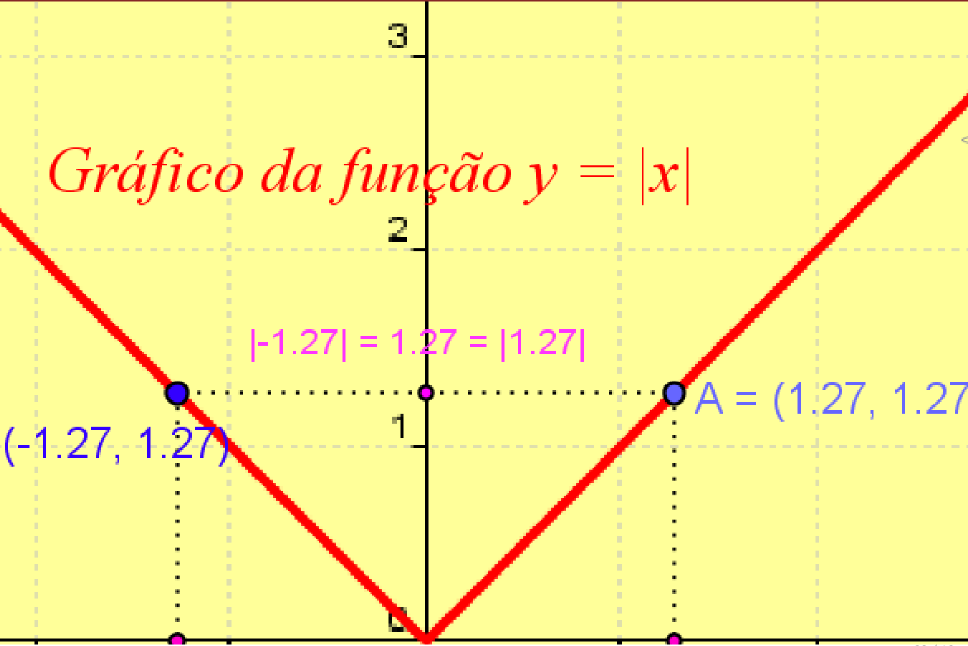


Gráfico da função $y = |x|$
3
2
1
0
|-1.27| = 1.27 = |1.27|
A = (1.27, 1.27
(-1.27, 1.27)

Função raiz quadrada

Função raiz quadrada

A função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, verifica as seguintes propriedades:

- $D(f) = [0, +\infty[= Im(f)$

Função raiz quadrada

A função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, verifica as seguintes propriedades:

- $D(f) = [0, +\infty[= Im(f)$
- $f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

Função raiz quadrada

A função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, verifica as seguintes propriedades:

- $D(f) = [0, +\infty[= Im(f)$
- $f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$
- Se $0 \leq a < b$, então $f(0) = 0 \leq f(a) = \sqrt{a} < \sqrt{b} = f(b)$.
  É dizer, f é uma função não negativa e crescente.

Função raiz quadrada

A função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, verifica as seguintes propriedades:

- $D(f) = [0, +\infty[= Im(f)$
- $f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$
- Se $0 \leq a < b$, então $f(0) = 0 \leq f(a) = \sqrt{a} < \sqrt{b} = f(b)$.
  É dizer, f é uma função não negativa e crescente.
- Quando x se aproxima de zero $\sqrt{x}$ se aproxima mais lentamente, ou seja,

$$\text{se } \; 0 \leq x < 1 \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt{x} < 1.$$

Função raiz quadrada

A função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, verifica as seguintes propriedades:

- $D(f) = [0, +\infty[= Im(f)$
- $f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$
- Se $0 \leq a < b$, então $f(0) = 0 \leq f(a) = \sqrt{a} < \sqrt{b} = f(b)$.
  É dizer, f é uma função não negativa e crescente.
- Quando x se aproxima de zero $\sqrt{x}$ se aproxima mais lentamente, ou seja,
  $$\text{se } \ 0 \leq x < 1 \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt{x} < 1.$$
- Quando x cresce $\sqrt{x}$ também cresce, sendo que o crescimento de $\sqrt{x}$ é mais lento que x, é dizer,
  $$\text{se } \ 1 \leq x \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt{x} < x.$$

Função de 1^o grau ou afim

Função de 1^o grau ou afim

Uma função de 1^o grau é da forma

$$f(x) = ax + b,$$

leva cada número real x no número real $ax + b$,
onde a, b são núneros reais fixos e $a \neq 0$.
O domínio de f é $D(f) = \mathbb{R}$
A imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$.
O gráfico de f é uma reta com coeficiente angular a que corta o eixo x ("eixo das abscissas") em $x = -\frac{b}{a}$ e passa pelo eixo y ("eixo das ordenadas") em $y = b$.
Ou seja,

$$\text{Se} \quad y = f(x) \quad \Rightarrow \quad Graf(f) = \{(x, y) \mid \underbrace{y = ax + b}_{\text{equação da reta}} \}$$

Função linear[7]

[7] se $a \neq 0$ f é um caso particular de função de 1^o grau com $b = 0$

Função linear[7]

A função identidade é da forma

$$f(x) = ax,$$

associa a cada $x \in \mathbb{R} = D(f)$ o número real ax.
Assim, a imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$.
Logo, a representação gráfica de f é uma reta com coeficiente angular a e passando pela origem do sistema de coordenadas formado pelos eixos x e y:

$$Graf(f) = \{(x, y) \mid \underbrace{y = ax}_{\text{equação da reta}}\}$$

[7] se $a \neq 0$ f é um caso particular de função de 1^o grau com $b = 0$

Função identidade[8]

[8] é um caso particular de função linear com $a = 1$

Função identidade[8]

A função identidade é da forma

$$f(x) = x,$$

associa a cada $x \in \mathbb{R} = D(f)$ o mesmo número real x.
Assim, a imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$.
Logo, a representação gráfica de f é uma reta bissetriz do ângulo formado pelos eixos x e y.
Ou seja,

$$Graf(f) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid \underbrace{y = x}_{\text{equação da reta}}\}$$

[8] é um caso particular de função linear com $a = 1$

Função constante

Função constante

Uma função constante é da forma

$$f(x) = b,$$

associa a cada $x \in D(f) = \mathbb{R}$ um mesmo número real b.
Assim, a imagem de f é $Im(f) = \{b\}$.
Logo, a representação gráfica de f é uma reta paralela ao eixo x, passando pelo eixo y em $y = b$.
Ou seja,

$$Graf(f) = \{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid \underbrace{y = b}_{\text{equação da reta}}\}$$

Função de 2^o grau ou função quadrática

Função de 2^o grau ou função quadrática

Uma função quadrática é da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número real $ax^2 + bx + c$,
onde a, b, c são números reais fixos e $a \neq 0$.
É facil ver que $D(f) = \mathbb{R}$. Mas não é obvio que:

- se $a > 0$, então $Im(f) = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty[$;

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante de uma eq. de 2^o grau.
O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simétria paralelo ao eixo y e passando pelo vértice da parábola que é dado por $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

Função de 2^o grau ou função quadrática

Uma função quadrática é da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número real $ax^2 + bx + c$,
onde a, b, c são números reais fixos e $a \neq 0$.
É facil ver que $D(f) = \mathbb{R}$. Mas não é obvio que:

- se $a > 0$, então $Im(f) = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty[$;
- se $a < 0$, então $Im(f) = [-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$,

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante de uma eq. de 2^o grau.
O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simétria paralelo ao eixo y e passando pelo vértice da parábola que é dado por $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

Função polinomial

Função polinomial

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais fixos e $a_n \neq 0$, chama-se função polinomial de grau n, $(n = 0, 1, 2, ...)$

Exemplos

1. $f_1(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ define uma função polinomial de grau 0;

Função polinomial

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais fixos e $a_n \neq 0$, chama-se função polinomial de grau n, $(n = 0, 1, 2, ...)$

Exemplos

1. $f_1(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ define uma função polinomial de grau 0;
2. $f_2(x) = -\frac{13}{99}x - \pi$ define uma função polinomial de grau 1;

Função polinomial

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais fixos e $a_n \neq 0$, chama-se função polinomial de grau n, $(n = 0, 1, 2, ...)$

Exemplos

1. $f_1(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ define uma função polinomial de grau 0;
2. $f_2(x) = -\frac{13}{99}x - \pi$ define uma função polinomial de grau 1;
3. $f_3(x) = x(-x+5)$ define uma função polinomial de grau 2;

Função polinomial

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais fixos e $a_n \neq 0$, chama-se função polinomial de grau n, $(n = 0, 1, 2, ...)$

Exemplos

1. $f_1(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ define uma função polinomial de grau 0;
2. $f_2(x) = -\frac{13}{99}x - \pi$ define uma função polinomial de grau 1;
3. $f_3(x) = x(-x+5)$ define uma função polinomial de grau 2;
4. $f_4(x) = 0,6x^3 - 2$ define uma função polinomial de grau 3;

Função polinomial

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais fixos e $a_n \neq 0$, chama-se função polinomial de grau n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Exemplos

1. $f_1(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ define uma função polinomial de grau 0;
2. $f_2(x) = -\frac{13}{99}x - \pi$ define uma função polinomial de grau 1;
3. $f_3(x) = x(-x+5)$ define uma função polinomial de grau 2;
4. $f_4(x) = 0,6x^3 - 2$ define uma função polinomial de grau 3;
5. $f_5(x) = 4x^7 - 2x$ define uma função polinomial de grau 7.

Função racional

Função racional

Uma função racional é dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$,
onde p, q são duas funções polinomiais.
O domínio de f é dado por $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Exemplos

Função racional

Uma função racional é dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$,
onde p, q são duas funções polinomiais.
O domínio de f é dado por $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Exemplos

1. Qualquer função polinomial é uma função racional.

Função racional

Uma função racional é dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$,
onde p, q são duas funções polinomiais.
O domínio de f é dado por $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Exemplos

1. Qualquer função polinomial é uma função racional.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ define uma função racional cujo gráfico é uma hipérbole equilátera e tem $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Função racional

Uma função racional é dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$,
onde p, q são duas funções polinomiais.
O domínio de f é dado por $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Exemplos

1. Qualquer função polinomial é uma função racional.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ define uma função racional cujo gráfico é uma hipérbole equilátera e tem $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
3. $g(x) = \dfrac{(x^2+2x)(x^2-1)}{(x^2-x)(x+2)}$ define uma função racional com $D(g) = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$.
O gráfico de g é a reta dada pela equação $y = x + 1$ menos os pontos $(-2, -1)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$.

Tópicos da Unidade 1

Sejam f e g duas funções tais que $D(f) \cap D(g) \neq \phi$. Definimos:

A função soma $f + g$ dada por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \; \forall x \in D(f+g) = D(f) \cap D(g).$$

A função diferência $f - g$ dada por

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \; \forall x \in D(f-g) = D(f) \cap D(g).$$

A função produto $f \cdot g$ dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \; \forall x \in D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g).$$

A função quociente $\frac{f}{g}$ dada por

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in D(f) \cap D(g) | g(x) \neq 0\}.$$

Exemplos

Exemplos

Sejam $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$. Então

1. $D(f) = [-2, +\infty[$ e $D(g) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
   Pois, f só é definida se $x + 2 \geq 0$ ou seja, $x \geq -2$.
   Analogamente, g é definida para os x tais que
   $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$,
   ou seja $(x \geq \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{2})$ ou $(x \leq \sqrt{2}$ e $x \leq -\sqrt{2})$,
   daquí, obtemos $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$.

Exemplos

Sejam $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-2}$. Então

1. $D(f) = [-2, +\infty[$ e $D(g) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
   Pois, f só é definida se $x + 2 \geq 0$ ou seja, $x \geq -2$.
   Analogamente, g é definida para os x tais que
   $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$,
   ou seja $(x \geq \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{2})$ ou $(x \leq \sqrt{2}$ e $x \leq -\sqrt{2})$,
   daquí, obtemos $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$.
2. $(f \pm g)(x) = \sqrt{x+2} \pm \sqrt{x+1}$.

Exemplos

Sejam $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-2}$. Então

1. $D(f) = [-2, +\infty[$ e $D(g) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
   Pois, f só é definida se $x + 2 \geq 0$ ou seja, $x \geq -2$.
   Analogamente, g é definida para os x tais que
   $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$,
   ou seja $(x \geq \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{2})$ ou $(x \leq \sqrt{2}$ e $x \leq -\sqrt{2})$,
   daquí, obtemos $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$.
2. $(f \pm g)(x) = \sqrt{x+2} \pm \sqrt{x+1}$.
3. $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2-2}$.

Exemplos

Sejam $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-2}$. Então

1. $D(f) = [-2, +\infty[$ e $D(g) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
   Pois, f só é definida se $x + 2 \geq 0$ ou seja, $x \geq -2$.
   Analogamente, g é definida para os x tais que
   $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$,
   ou seja $(x \geq \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{2})$ ou $(x \leq \sqrt{2}$ e $x \leq -\sqrt{2})$,
   daquí, obtemos $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$.
2. $(f \pm g)(x) = \sqrt{x+2} \pm \sqrt{x+1}$.
3. $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2-2}$.
4. $D(f \pm g) = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[= D(f \cdot g)$.

Exemplos

Sejam $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-2}$. Então

1. $D(f) = [-2, +\infty[$ e $D(g) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
   Pois, f só é definida se $x + 2 \geq 0$ ou seja, $x \geq -2$.
   Analogamente, g é definida para os x tais que
   $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$,
   ou seja $(x \geq \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{2})$ ou $(x \leq \sqrt{2}$ e $x \leq -\sqrt{2})$,
   daquí, obtemos $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$.
2. $(f \pm g)(x) = \sqrt{x+2} \pm \sqrt{x+1}$.
3. $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2-2}$.
4. $D(f \pm g) = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[= D(f \cdot g)$.
5. $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2}}$.

Exemplos

Sejam $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-2}$. Então

1. $D(f) = [-2, +\infty[$ e $D(g) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
   Pois, f só é definida se $x + 2 \geq 0$ ou seja, $x \geq -2$.
   Analogamente, g é definida para os x tais que
   $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$,
   ou seja $(x \geq \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{2})$ ou $(x \leq \sqrt{2}$ e $x \leq -\sqrt{2})$,
   daquí, obtemos $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$.
2. $(f \pm g)(x) = \sqrt{x+2} \pm \sqrt{x+1}$.
3. $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2-2}$.
4. $D(f \pm g) = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[= D(f \cdot g)$.
5. $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2}}$.
6. $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[- \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

Função composta $g \circ f$

Função composta $g \circ f$

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset D(g)$.
A função composta de g e f é a função que a cada número real $x \in D(f)$ associa um único número real $(g \circ f)(x)$ que é definido por $(g(f(x)) \in Im(g)$.
Ou seja,

$$\underbrace{x}_{\in D(f)} \mapsto \underbrace{f(x)}_{\in \underbrace{Im(f)}_{\subset D(g)}} \mapsto \underbrace{(g \circ f)(x)}_{\text{notação}} = \underbrace{g(f(x))}_{\in \mathbb{R}}$$

Observação

Função composta $g \circ f$

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset D(g)$.
A função composta de g e f é a função que a cada número real $x \in D(f)$ associa um único número real $(g \circ f)(x)$ que é definido por $(g(f(x)) \in Im(g)$.
Ou seja,

$$\underbrace{x}_{\in D(f)} \mapsto \underbrace{f(x)}_{\in \underbrace{Im(f)}_{\subset D(g)}} \mapsto \underbrace{(g \circ f)(x)}_{\text{notação}} = \underbrace{g(f(x))}_{\in \mathbb{R}}$$

Observação

1. $D(f) = D(g \circ f)$,

Função composta $g \circ f$

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset D(g)$.
A função composta de g e f é a função que a cada número real $x \in D(f)$ associa um único número real $(g \circ f)(x)$ que é definido por $(g(f(x)) \in Im(g)$.
Ou seja,

$$\underbrace{x}_{\in D(f)} \mapsto \underbrace{f(x)}_{\in \underbrace{Im(f)}_{\subset D(g)}} \mapsto \underbrace{(g \circ f)(x)}_{\text{notação}} = \underbrace{g(f(x))}_{\in \mathbb{R}}$$

Observação

1. $D(f) = D(g \circ f)$,
2. Em geral, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ se $x \in D(f) \cap D(g)$.

Exemplo

Exemplo

Determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.
Para $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$

- Determine os domínios:

$$D(f \circ g) = D(g) = \mathbb{R}$$
$$D(g \circ f) = D(f) = [0, +\infty[$$

Exemplo

Determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.
Para $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$

- Determine os domínios:

$$D(f \circ g) = D(g) = \mathbb{R}$$
$$D(g \circ f) = D(f) = [0, +\infty[$$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, com $x \in \mathbb{R}$

Exemplo

Determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.
Para $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$

- Determine os domínios:

$$D(f \circ g) = D(g) = \mathbb{R}$$
$$D(g \circ f) = D(f) = [0, +\infty[$$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, com $x \in \mathbb{R}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, com $x \geq 0$

Exemplo

Determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.
Para $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$

- Determine os domínios:

$$D(f \circ g) = D(g) = \mathbb{R}$$
$$D(g \circ f) = D(f) = [0, +\infty[$$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, com $x \in \mathbb{R}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, com $x \geq 0$
- Assim, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ se $x > 0$.
  Mas em geral, este tipo de comutatividade não vale, como veremos no seguinte exemplo.

Exemplo

Exemplo

Determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ para $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -2g(x)+1 = -2(x^2+3x)+1 = -2x^2-6x+1$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ para $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -2g(x)+1 = -2(x^2+3x)+1 = -2x^2-6x+1$, com $x \in \mathbb{R}$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 3f(x) = (-2x+1)^2 + 3(-2x+1) = 4x^2 - 10x + 4$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ para $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -2g(x) + 1 = -2(x^2 + 3x) + 1 = -2x^2 - 6x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 3f(x) = (-2x + 1)^2 + 3(-2x + 1) = 4x^2 - 10x + 4$, com $x \in \mathbb{R}$.
- $D(f \circ g) = D(g) = \mathbb{R} = D(f) = D(g \circ f)$.

Exemplo

Determinar as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ para $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -2g(x)+1 = -2(x^2+3x)+1 = -2x^2-6x+1$, com $x \in \mathbb{R}$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 3f(x) = (-2x+1)^2 + 3(-2x+1) = 4x^2 - 10x + 4$, com $x \in \mathbb{R}$.
- $D(f \circ g) = D(g) = \mathbb{R} = D(f) = D(g \circ f)$.
- Como os gráficos de ambas funções representam duas parábolas, mas uma é concava para acima e a outra é concava para baixo, por conta dos sinais dos coeficiente -2 e 4 que acompanham x^2. Portanto, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$.