## 7.7 O método de integração por partes

Há essencialmente dois métodos empregados no cálculo de integrais indefinidas (primitivas) de funções elementares. Um deles é a integração por substituição, explorada anteriormente. O outro método é chamado de *integração por partes*, que exploraremos nesta seção.

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são duas funções deriváveis em um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, para cada $x$ em $I$, temos

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Assim sendo,

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, dx = u(x)v(x) + C$$

ou seja,

$$\int v(x)u'(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) + C$$

Podemos escrever ainda

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx} \tag{7.3}$$

aqui considerando que a constante genérica $C$ já está implícita na última integral.

Sendo $u = u(x)$ e $v = v(x)$, temos

$du = u'(x)\, dx$ e $dv = v'(x)\, dx$, e passamos a fórmula 7.3 à forma abreviada

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du} \tag{7.4}$$

As fórmulas 7.3 e 7.4 são chamadas fórmulas de integração por partes.

**Exemplo 7.4** *Calcular* $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

*Solução.* Tomaremos $u = x$, e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

Teremos $du = 1\, dx = dx$, e $v = \int \operatorname{sen} x\, dx$.

Para os propósitos da integração por partes, basta tomar $v = -\cos x$, menosprezando a constante arbitrária da integral $v = \int \operatorname{sen} x\, dx$, pois uma tal escolha da função $v$ é suficiente para validar a fórmula 7.4.

Temos então

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\, dx &= \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

**Exemplo 7.5** *Calcular* $\int x \ln x\, dx$.

*Solução.* Tomamos $u = \ln x$, e $dv = x\, dx$.

Teremos $du = \dfrac{1}{x}\, dx$, e $v = \int x\, dx$. Tomamos $v = \dfrac{x^2}{2}$.

Temos então

$$\begin{aligned}\int x \ln x\, dx &= \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

## 7.8 Um estratégia para integrar por partes

Ao integrar por partes, uma integral da forma $\int f(x)g(x)\, dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)g(x)\, dx$, uma delas como sendo o fator $u$ e a outra como parte de uma diferencial $dv$.

Em outras palavras, podemos fazer $u = f(x)$ e $dv = g(x)\, dx$, ou $u = g(x)$ e $dv = f(x)\, dx$ (ou ainda $u = f(x)g(x)$ e $dv = 1\, dx$!). Mas esta escolha não pode ser feita de modo aleatório.

Uma sugestão que funciona bem na grande maioria das vezes é escolher as funções $u$ e $v$ segundo o critério que descreveremos abaixo.

Considere o seguinte esquema de funções elementares:

| L | I | A | T | E |
|---|---|---|---|---|
| **L**ogarítmicas | **I**nversas de trigonométricas | **A**lgébricas | **T**rigonométricas | **E**xponenciais |

No esquema acima, as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções. Uma estratégia que funciona bem é: ao realizar uma integração por partes, escolher, dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral,

- como função $u$: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- como formando a diferencial $dv$: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Sumarizando, $u$ deve caracterizar-se pela letra mais próxima de L, e $dv$ pela letra mais próxima de E. Esta estratégia já foi adotada nos exemplos desenvolvidos anteriormente!

1. Na integral $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, exemplo 7.4, fizemos
   $u = x$ (Algébrica) e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ (Trigonométrica).
   No anagrama LIATE, A precede T.
2. Na integral $\int x \ln x\, dx$, exemplo 7.5, fizemos
   $u = \ln x$ (Logarítmica) e $dv = x\, dx$ (Algébrica).
   No anagrama LIATE, L precede precede A.

## 7.9 Problemas

Calcule as seguintes integrais, aplicando integração por partes.

1. $\int xe^x\, dx$. *Resposta.* $e^x(x-1) + C$
2. $\int \ln x\, dx$. *Resposta.* $x(\ln x - 1) + C$
3. $\int x^n \ln x\, dx$ $(n \neq -1)$. *Resposta.* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$
4. $\int x \cos^2 x\, dx$.
   *Resposta.* $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$
   *Sugestão.* $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
5. $\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\, dx$.
   *Resposta.* $(x^2 + 7x - 5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + (2x + 7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$