Unidade 7

Integrais indefinidas

7.1 Antiderivadas ou integrais indefinidas

Sendo $f(x)$ e $F(x)$ definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que

F é uma *antiderivada* ou uma *primitiva* de f, se $F'(x) = f(x)$

para todo $x \in I$.

Ou seja, F é antiderivada ou primitiva de f se F é uma função cuja derivada é f.

Como primeiros exemplos, temos

$f(x)$	primitiva de $f(x)$
$3x^2$	x^3
2	$2x$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$

Observação 7.1 *Se F é antiderivada de f em I, e c é uma constante, então $F + c$ também é uma antiderivada de f em I.*

De fato, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então

$[F(x)+c]' = F'(x) = f(x)$, e portanto $F(x)+c$ também é uma antiderivada de $f(x)$ em I.

Assim, por exemplo x^3, $x^3 + 5$ e $x^3 - \sqrt{2}$ são primitivas de $3x^2$.

Proposição 7.1 *Se F_1 e F_2 são antiderivadas de f, em $I \subset \mathbb{R}$ (I um intervalo), então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) = F_2(x) + c$, para todo $x \in I$.*

Definição 7.1 (Integral indefinida) *Sendo F uma primitiva de f no intervalo I, chama-se* integral indefinida de f, *no intervalo I, à primitiva genérica de f em I, $F(x) + C$, sendo C uma constante real genérica. Denotamos tal fato por*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Nesta notação, omite-se o intervalo I. Sumarizando,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

7.2 Integrais indefinidas imediatas

Coletaremos as primeiras integrais indefinidas cujo cálculo é imediato.

Proposição 7.2

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, se $\alpha \neq -1$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.
3. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.
5. $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$.
6. $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$.
7. $\int \sec^{2} x\,dx = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \operatorname{cosec}^{2} x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$.
9. $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$.
10. $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$.
11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^{2}}dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$.
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$.

Para verificar a validade das integrais acima, basta verificar que a derivada (em relação a x) do segundo membro, em cada igualdade, é a função que se encontra sob o sinal de integração. Como exemplos,

se $\alpha \neq -1$, $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)\cdot\dfrac{x^{\alpha+1-1}}{\alpha+1} = x^\alpha$.

$(\ln|x|)' = 1/x$:
se $x > 0$, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$;
se $x < 0$, $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = 1/x$.

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, logo $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = \dfrac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x$.

7.3 Manipulações elementares de integrais

Proposição 7.3 *Se* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *e* $\int g(x)\,dx = G(x) + C$, *então, sendo* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2. $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$
3. $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$
4. $\int f(x-b)\,dx = F(x-b) + C$
5. $\int f(b-x)\,dx = -F(b-x) + C$
6. $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
7. $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

7.4 Exemplos elementares

1. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$. Logo,
   (a) $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$
   (b) $\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + C$
2. $\int e^x\,dx = e^x + C$. Logo,
   (a) $\int e^{x-5}\,dx = e^{x-5} + C$

(b) $\int e^{2-x}\,dx = -e^{2-x} + C$

(c) $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$

3. Calcular $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

   $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$.

   Temos $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, logo $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

   Logo,

   $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \sec^2 x - \int 1\,dx = \operatorname{tg} x - x + C$

4. Calcular $\int(5\cos x + \cos 5x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int(5\cos x + \cos 5x)\,dx &= 5\int \cos x\,dx + \int \cos 5x\,dx\\ &= 5\operatorname{sen} x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + C\end{aligned}$$

5. Calcular $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$.

   Temos $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$, logo $\operatorname{sen} x\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Daí

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x) + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

6. Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx &= \int\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{1}{x}dx\\ &= \int x^{-1/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln|x| + C = 2\sqrt{x} + \ln|x| + C\end{aligned}$$

7.5 Integração por mudança de variável ou integração por substituição

Suponhamos que

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \tag{7.1}$$

Podemos substituir $u = \varphi(x)$ na expressão 7.1, fazendo $du = \varphi'(x)\,dx$, ou seja, de 7.1 obtemos

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C \tag{7.2}$$

Sumariando o que dissemos acima,

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \implies \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C$$

pela mudança de variável $u = \varphi(x)$, tomando-se $du = \varphi'(x)\,dx$.

Na prática, quando calculamos $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, tendo-se as considerações acima, fazemos $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)\,dx$, e passamos pela seqüência de igualdades:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C}$$

Exemplo 7.1 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx$.

Solução. Começamos fazendo a substituição $u = 3 - 2x$.

Então $du = \dfrac{du}{dx} \cdot dx = (3-2x)'\,dx = -2dx$.

Portanto $dx = -\frac{1}{2}du$.

Assim, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= -u^{1/2} + C = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{3-2x} + C$$

Exemplo 7.2 *Calcular* $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Solução. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx$.

Como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, tomamos $u = \cos x$, e teremos

$du = (\cos x)'dx = -\operatorname{sen} x\,dx$.

Assim,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = \int \frac{-1}{u}du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Exemplo 7.3 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$.

Solução. Note que $(x^2+5)' = 2x$. Isto sugere fazermos

$u = x^2 + 5$, de onde $du = 2x\,dx$, ou seja, $x\,dx = \frac{1}{2}du$.

Temos então

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = u^{1/2} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

7.5.1 Uma tabela mais completa de integrais imediatas

Tabela 7.1. Tabela de integrais indefinidas (nas últimas linhas, $a > 0$, e $\lambda \neq 0$).

$\int u^\alpha\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$	$\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln\|u\| + C$
$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$	$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
$\int e^u\,du = e^u + C$	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$
$\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$	$\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$
$\int \sec u\cdot\operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$	$\int \operatorname{cosec} u\cdot\operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$
$\int \sec u\,du = \ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\| + C$	$\int \operatorname{cosec} u\,du = -\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\| + C$
$\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln\|\cos u\| + C$	$\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln\|\operatorname{sen} u\| + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}du = \operatorname{arc\,tg} u + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \operatorname{arc\,sen} u + C$
$\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C$	$\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+u}{a-u}\right\| + C.$
$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$	$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\lambda}} = \ln\|u + \sqrt{u^2+\lambda}\| + C$

7.6 Problemas

Calcule as seguintes integrais indefinidas, utilizando, quando necessário, mudança de variáveis. Faça uso da tabela de integrais indefinidas da tabela 7.1.

1. $\int (x + \sqrt{x})\, dx$. *Resposta.* $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$
2. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. *Resposta.* $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$
3. $\int \operatorname{sen} ax\, dx$. *Resposta.* $-\frac{\cos ax}{a} + C$
4. $\int \frac{\ln x}{x} dx$. *Resposta.* $\frac{\ln^2 x}{2} + C$. *Sugestão.* Faça $u = \ln x$
5. $\int \frac{dx}{3x-7}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C$
6. $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$
7. $\int \operatorname{cotg} \frac{x}{3}\, dx$. *Resposta.* $3\ln|\operatorname{sen}\frac{x}{3}| + C$
8. $\int \operatorname{tg}\varphi \sec^2\varphi\, d\varphi$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + C$. *Sugestão.* Faça $u = \operatorname{tg}\varphi$
9. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$. *Sugestão.* Faça $u = \operatorname{sen} x$
10. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$. *Resposta.* $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$
11. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$. *Sugestão.* Faça $u = 2x^2 + 3$
12. $\int 2x(x^2+1)^4\, dx$. *Resposta.* $\frac{(x^2+1)^5}{5} + C$. *Sugestão.* Faça $u = x^2 + 1$
13. $\int e^{2x} dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}e^{2x} + C$
14. $\int xe^{-x^2} dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$. *Sugestão.* $u = -x^2$
15. $\int \frac{e^x}{3+4e^x} dx$. *Resposta.* $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x) + C$. *Sugestão.* $u = 3 + 4e^x$
16. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$.
    Resposta. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x) + C$. *Sugestão.* $2x^2 = (\sqrt{2}x)^2$, $u = \sqrt{2}x$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Resposta.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{3}x) + C$