5.6 Derivando funções exponenciais e logarítmicas

Nesta seção estaremos apresentando as derivadas das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$.

O que faz do número e uma constante tão especial? A resposta está na seguinte nova regra de derivação

Regra 10

1. *Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$. Ou seja, a derivada da função exponencial de base e coincide com a própria função.*
2. *Se $f(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, então $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.*
3. *De um modo geral, pela regra da cadeia, $(e^u)' = e^u \cdot u'$, e $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.*

Para funções logarítmicas, temos as regras de derivação a seguir

Regra 11 *Derivando em relação a x, temos*

1. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
2. $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
4. $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

De um modo geral,

5. $(\ln |u|)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
6. $(\log_a |u|)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$

Uma consequência do resultado acima é a regra de derivação mais forte

Regra 12 *Sendo α uma constante real, racional ou irracional, e $u > 0$,*

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$$

Exemplo 5.1 (Uma função exponencial de base e expoente variáveis) *Calcular a derivada de*

$$f(x) = x^x$$

Solução. Sendo $y = x^x$, aplicando a função $\ln$ em ambos os membros da igualdade, temos

$$\ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x$$

Derivando ambos os membros em relação a x, por derivação implícita, temos

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$y' = y\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(1 + \ln x).$$

Portanto $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$.

5.7 Problemas

1. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $y = e^{-3x}$ (b) $y = e^{4x+5}$ (c) $y = 3^{x^2+2x}$
   (d) $y = e^x(1 - x^2)$ (e) $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ (f) $y = x^{1/x}$

   Respostas.
   (a) $-3e^{-3x}$ (b) $4e^{4x+5}$ (c) $2(x+1)3^{x^2+2x}\ln 7$ (d) $e^x(1-2x-x^2)$
   (e) $\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ (f) $x^{1/x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$. *Sugestão.* Primeiro aplique a função $\ln$ nos dois membros da igualdade, e então derive implicitamente, em relação a x.

2. Calcule as derivadas das seguintes funções. Lembre-se: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

   (a) $y = \ln|ax + b|$ (b) $y = \log_a(x^2 + 1)$ (c) $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$
   (d) $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$ (e) $y = \ln|x^2 + 2x|$ (f) $y = (\ln x)^3$

   Respostas. (a) $\frac{a}{ax+b}$ (b) $\frac{2x}{(x^2+1)\ln a}$ (c) $\frac{1}{1+e^x}$ (d) $\frac{4x}{1-x^4}$ (e) $\frac{2x+1}{x^2+x}$
   (f) $\frac{3(\ln x)^2}{x}$

3. Calcule dy/dx, se $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação

   (a) $3y - x^2 + \ln(xy) = 2$ (b) $x\ln y - y\ln x = 1$

   Respostas. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2-1)y}{x(3y+1)}$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$

4. Determine a equação da reta tangente à curva $y = x^2 + \ln(2x - 5)$ no ponto dessa curva de abcissa $x_0 = 3$. *Resposta.* $y = 8x - 15$

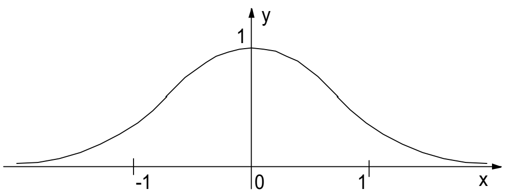
5. A posição s de um ponto móvel P sobre um eixo horizontal s é dada por $s(t) = t^2 - 4\ln(1+t)$, $t \geq 0$, sendo s dado em centímetros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto P em um instante t qualquer.

   Resposta. $v(t) = \frac{2(t^2+t-2)}{t+1}$, $a(t) = 2 + \frac{4}{(t+1)^2}$.

6. Esboce o gráfico de $y = e^{-x^2}$, analisando a função f através de derivadas e cálculos de limites apropriados.

   Resposta. Daremos como resposta apenas as duas primeiras derivadas e o gráfico.

   $y' = -2xe^{-x^2}$,
   $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.

   Dados numéricos. $e^{-1/2} \approx 0{,}6$.