Unidade 5

Funções exponenciais e logarítmicas
O número e

Nesta unidade faremos uma pequena revisão das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Faremos ainda uma apresentação do número e, uma constante importante na matemática universitária.

5.1 Pequena revisão de potências

Sabemos que, sendo a um número real positivo,

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad \text{e} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

se $m, n \in \mathbb{Z}$, e $n > 0$. Assim define-se a *potência de base a e expoente p*, a^p (lê-se "*a elevado a p*"), para todo $p \in \mathbb{Q}$.

Sendo $a \in R$, $a > 0$, e sendo β um número irracional, e $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ uma seqüência de racionais que se aproxima indefinidamente de β (isto é, com limite β), a^β é definido como o limite da seqüência

$$a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, a^{\beta_3}, a^{\beta_4}, \ldots$$

Por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ é o limite da seqüência

$$2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \ldots$$

Uma calculadora nos fornece as aproximações:

$$\begin{aligned}
2^1 &= 2 \\
2^{1,4} &\approx 2,6390 \\
2^{1,41} &\approx 2,6574 \\
2^{1,414} &\approx 2,6647 \\
2^{1,4142} &\approx 2,6651
\end{aligned}$$

No que diz respeito a potências de base real positiva e expoente real, temos as seguintes boas propriedades, que aceitaremos sem demonstração:

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^0 = 1 \\ a^x \cdot b^x &= (ab)^x, \quad \text{se também } b > 0 \end{aligned}$$

5.2 A função exponencial

Sendo a um número real, positivo, $a \neq 1$, define-se a função exponencial de base a por

$$f(x) = a^x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Tomamos $a \neq 1$ pela simples razão de que $1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (e funções constantes não são classificadas como funções exponenciais).

Além disso, tomamos $a > 0$ porque, se $a < 0$, a^x não se define para uma infinidade de valores reais de x. Por exemplo, se $a = -4$ então, $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ não é um número real.

Assumiremos que a função exponencial, $f(x) = a^x$, $(0 < a \neq 1)$ é contínua em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}}$$

Assumiremos também que

se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente, com $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, e se $0 < a < 1$ a função é decrescente, com $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0^+ (= 0)$

Na figura 5.1 temos esboços dos gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Temos agora as seguintes novidades na *álgebra de limites*:

Se $a > 1$, $a^{+\infty} = +\infty$, $\quad a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+ \, (= 0)$

Se $0 < a < 1$, $a^{+\infty} = 0^+ \, (= 0)$, $\quad a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{+\infty}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

Por exemplo,

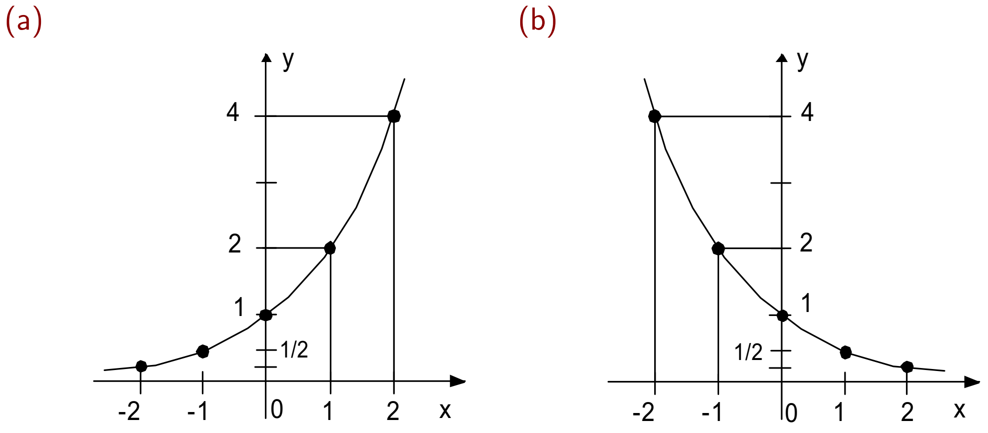

Figura 5.1. Gráficos de (a) $y = 2^x$, (b) $y = (1/2)^x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = 2^{+\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$.

5.3 Logaritmos e funções logarítmicas

Se $a > 0$, $a \neq 1$, e $x > 0$, o *logaritmo de x na base a*, denotado por $\log_a x$, é o expoente ao qual devemos elevar a para obtermos x, ou seja

$$\boxed{\log_a x = y \quad \text{se e somente se} \quad a^y = x}$$

Assim sendo,

$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

Por exemplo,

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$;

$\log_9 27 = \frac{3}{2}$, pois $9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$;

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = 1/4$;

$\log_2 5 \approx 2,3219$, pois $2^{2,3219} \approx 4,9999$.

Listamos aqui, sem dedução, algumas propriedades elementares dos logaritmos:

Sendo x e y reais positivos, z real, e $a > 0, a \neq 1$,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^z = z \cdot \log_a x$$
$$\log_a x^{1/z} = \frac{\log_a x}{z} \quad (\text{se } z \neq 0)$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad (\text{se } b > 0, b \neq 1) \qquad (\text{mudança de base})$$

Assim, por exemplo, a passagem dos logaritmos decimais (base 10) para os logaritmos de base 2 é dada por

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2} = \frac{\log x}{\log 2}$$

Sendo a função $f(x) = a^x$ contínua e crescente quando $a > 0$, e decrescente quando $0 < a < 1$, temos que $\log_a x$ é definida para todo $x > 0$.

Além disso, se $a > 0$, $\log_a$ é crescente, e se $0 < a < 1$, $\log_a$ é decrescente.

Na figura 5.2, temos esboços dos gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

Admitiremos que $f(x) = \log_a x$ é contínua no seu domínio $]0, +\infty[$, ou seja,

$$\boxed{\text{se } x_0 > 0 \text{ então } \lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0}$$

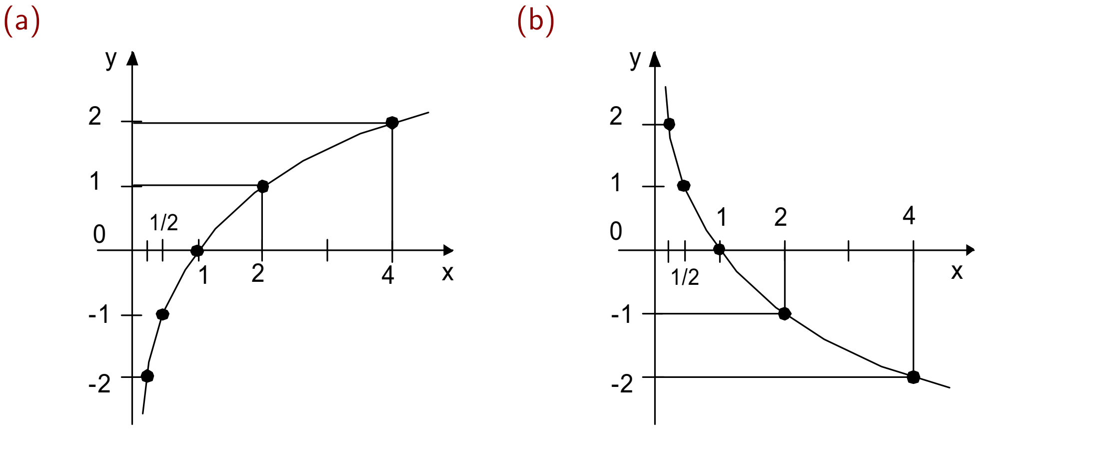

Figura 5.2. Gráficos de (a) $y = \log_2 x$, (b) $y = \log_{1/2} x$.

Além disso, temos ainda (confira isto observando os gráficos da figura 5.2).

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \log_a(0^+) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

bem como também (confira observando os gráficos da figura 5.2)

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

5.4 O número e

Na matemática universitária, há duas constantes numéricas muito importantes. São elas o número *pi*, $\boxed{\pi \approx 3,14159}$, e o número $\boxed{e \approx 2,71828}$.

O número e é definido como sendo o limite

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Pode ser demonstrado que o número e é irracional.

Observe a tabela de valores (aproximados) de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para $n = 1$, 10, 100, 1000, 10000, 100000, dada abaixo.

Tabela 5.1.

n	$1/n$	$1 + \frac{1}{n}$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	$2^1 = 2$
10	$0,1$	$1,1$	$(1,1)^{10} \approx 2,59374$
100	$0,01$	$1,01$	$(1,01)^{100} \approx 2,70481$
1000	$0,001$	$1,001$	$(1,001)^{1000} \approx 2,71692$
10000	$0,0001$	$1,0001$	$(1,0001)^{10000} \approx 2,71815$
100000	$0,00001$	$1,00001$	$(1,00001)^{100000} \approx 2,71828$

Note que $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$.

Assim, podemos enganosamente intuir que, quando n é muito grande, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 1^n = 1$ (mesmo calculadoras de boa qualidade podem nos induzir a este erro). Neste caso, nossa intuição é falha, pois pode ser demonstrado que quando n é muito grande,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828$$

Assim sendo, temos $\boxed{\text{um novo símbolo de indeterminação: } 1^{\pm\infty}}$.

Vamos admitir, sem demonstração, os seguintes limites envolvendo o número e.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \qquad \boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1}$$

Se $x > 0$, chama-se *logaritmo natural* ou *logaritmo neperiano* de x ao logaritmo

$$\ln x = \log_e x$$

Como $e \approx 2,71828 > 1$, a função $f(x) = \ln x$ é crescente e seu gráfico tem, qualitativamente, a forma do gráfico de $g(x) = \log_2 x$, figura 5.2 a.

A passagem dos logaritmos naturais para os logaritmos decimais (base 10) é dada por

$$\boxed{\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}}$$

5.5 Problemas

1. Calcule os seguintes limites. Lembre-se que $1^{\pm\infty}$ é um símbolo de indeterminação.

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x$

2. Sendo $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, calcule os limites laterais $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Respostas e sugestões.

1. (a) e^2. *Sugestão.* Para contornar a indeterminação $1^{+\infty}$, faça $1+\frac{2}{x} = 1+\frac{1}{y}$.

   (b) $1/e$. *Sugestão.* Para contornar a indeterminação $1^{+\infty}$, faça $\frac{x}{1+x} = 1+\frac{1}{y}$.

   (c) $(3/2)^{+\infty} = +\infty$

2. $+\infty$ e 0, respectivamente.