4.5 Esboçando gráficos: um aprofundamento

Aprenderemos agora como esboçar gráficos de funções que tem uma (ou mais de uma) das seguintes peculiaridades:

(i) o denominador na fórmula de $f(x)$ se anula para um ou mais valores de x;

(ii) $f(x)$ é contínua, mas na fórmula de $f'(x)$, ou na fórmula de $f''(x)$, aparece um denominador que se anula para um ou mais valores de x;

(iii) quando $x \longrightarrow +\infty$ (ou quando $x \longrightarrow -\infty$), $f(x)$ aproxima-se de uma constante c, e assim a curva $y = f(x)$ aproxima-se indefinidamente da reta horizontal $y = c$ (chamada *reta assíntota horizontal da curva* $y = f(x)$).

Exemplo 4.3 *Esboçar o gráfico da função dada por* $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$*, ou seja, esboçar a curva de equação* $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Detectando retas assíntotas verticais

Repare que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. O denominador de $f(x)$ se anula quando $x = 2$.

Agora, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$, e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$

Esses limites laterais, sendo infinitos, detectam que a reta vertical de equação $x = 2$ é uma *assíntota vertical do gráfico de* f. Mais precisamente, esses limites laterais detectam que

quando $x \longrightarrow 2^+$*, os pontos correspondentes, no gráfico, "sobem" no plano* xy*, aproximando-se indefinidamente dessa reta. Quando* $x \longrightarrow 2^-$*, os pontos do gráfico "descem" no plano* xy*, também aproximando-se indefinidamente da reta assíntota* $x = 2$.

Crescimento e decrescimento

Temos

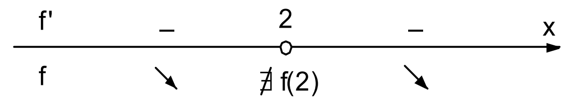
$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(x-2) - (x-2)'(2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2}$$

Portanto

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Assim sendo $f'(x) < 0$ para todo x em $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Assim, $f(x)$ é decrescente ($\searrow$) antes e depois de $x = 2$, e não pode ter máximos nem mínimos locais.

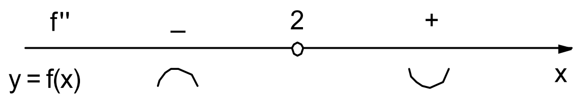
Para simplificar o estudo da função, fazemos um diagrama de sinais de f' e intervalos de crescimento e decrescimento de f. O símbolo $\nexists$ significa "não existe" ou "não se define".



Concavidades do gráfico Temos

$$f''(x) = \left[\frac{-5}{(x-2)^2}\right]' = [-5(x-2)^{-2}]' = 10(x-2)^{-3} = \frac{10}{(x-2)^3}$$

Temos o seguinte diagrama de sinais de f'' e direções de concavidades do gráfico de f:



Como $2 \notin \text{Dom}(f)$, o gráfico não tem ponto de inflexão.

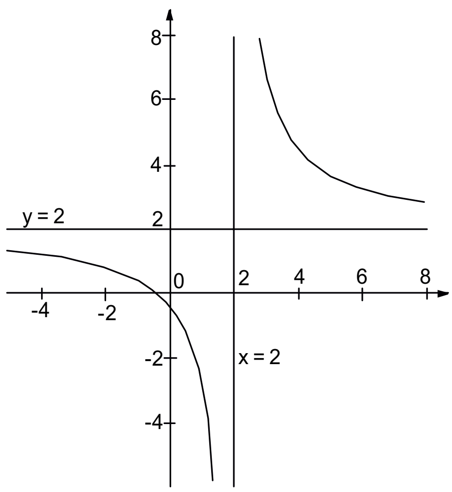


Figura 4.12.

Comportamento de $f(x)$, quando x tende ao infinito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$ Também $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

Assim, a reta $y = 2$ é uma *assíntota horizontal à direita e à esquerda do gráfico de f.*

Esboço do gráfico de f, com base nos aspectos estudados acima: figura 4.12

Exemplo 4.4 *Esboçar o gráfico de $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.*

Neste caso, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

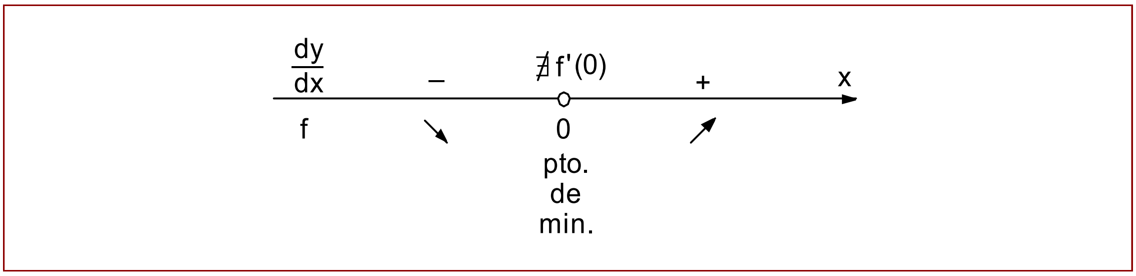
Crescimento e decrescimento Para analisar crescimento e decrescimento da função, calculamos

$$\frac{dy}{dx} = (\sqrt[3]{x^2} - 1)' = (x^{2/3} - 1)' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Teremos

$$\frac{dy}{dx} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

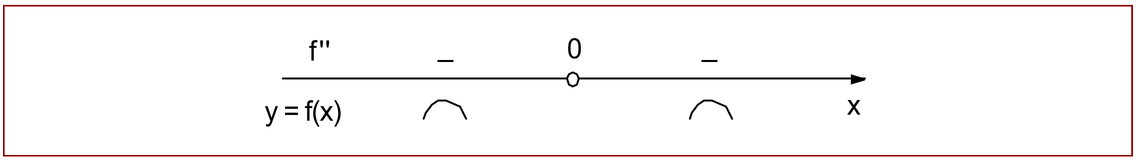
Temos então o seguinte diagrama de sinais de f' e intervalos de crescimento e decrescimento de f. O símbolo $\nexists$ significa “não existe” ou “não se define”.



Concavidades do gráfico Sendo $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)' = -\frac{2}{9}x^{-4/3} = -\frac{2}{9x^{4/3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

Temos o seguinte diagrama de sinais de f'' e direções de concavidades do gráfico de f:



Note que a função $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ é contínua, mas não temos $f'(x)$ quando $x = 0$.

É fácil ver que quando $x \to \pm\infty$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ vai para $+\infty$.

Com base no estudo feito, o esboço do gráfico da curva de equação $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$ é mostrado na figura 4.13.

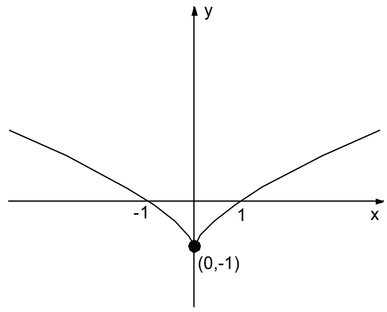


Figura 4.13.

4.6 Problemas

Para cada uma das funções dadas abaixo,

(a) Determine o domínio da função e, havendo zeros no denominador de $f(x)$, verifique se a curva $y = f(x)$ tem retas assíntotas verticais.

(b) Calcule $f'(x)$ e determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente;

(c) Determine os pontos de máximo locais e os pontos de mínimo locais de f, bem como os valores de $f(x)$ nesses pontos;

(d) Calcule $f''(x)$ e determine os intervalos em que a curva $y = f(x)$ é côncava para cima e aqueles em que ela é côncava para baixo;

(e) Determine os pontos de inflexão da curva $y = f(x)$;

(f) Estude o comportamento de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$;

(g) A partir dos dados coletados acima, faça um esboço bonito do gráfico de f.

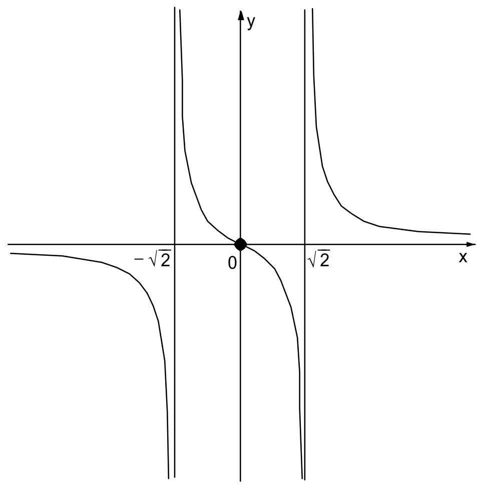
1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$ 2. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

Respostas e sugestões Daremos como resposta apenas as derivadas primeira e segunda e o esboço de cada gráfico.

1. $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 2}{(x^2 - 2)^2}$ $f''(x) = -\dfrac{2x^3 + 12x}{(x^2 - 2)^3}$

2. $f'(x) = \dfrac{2x + x^2}{(1 + x)^2}$ $f''(x) = \dfrac{2}{(1 + x)^3}$

1.



2.