4.2 Derivadas de ordem superior

Sendo f uma função, definimos f'' (lê-se "f duas linhas") como sendo a derivada da derivada de f, ou seja

$$\boxed{f''(x) = (f'(x))'}$$

Outras maneiras diferentes de escrever a segunda derivada de $y = f(x)$ são:

$$\boxed{f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

A notação $\frac{d^2y}{dx^2}$ é lida "de dois y de x dois".

Analogamente, define-se a terceira derivada de $f(x)$:

$$\boxed{f'''(x) = f^{(3)}(x) = (f''(x))' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

Para cada $n \geq 2$, a derivada de ordem n, de $f(x)$ é definida e escrita de diferentes formas:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

4.3 Concavidades do gráfico

Definição 4.3

1. *O gráfico de $y = f(x)$ é* côncavo para cima *(ou* tem concavidade voltada para cima*) no intervalo aberto I se, exceto pelos pontos de tangência, a curva $y = f(x)$ está, nesse intervalo, sempre no semi-plano acima de cada reta tangente a ela nesse intervalo (veja figura 4.7).*

2. *O gráfico de $y = f(x)$ é* côncavo para baixo *(ou* tem concavidade voltada para baixo*) no intervalo aberto I se, exceto pelos pontos de tangência, a curva $y = f(x)$ está, nesse intervalo, sempre no semi-plano abaixo de cada reta tangente a ela (veja figura 4.8).*

Teorema 4.2 *Sendo $f(x)$ derivável duas vezes nos pontos do intervalo aberto I,*

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, a curva $y = f(x)$ é côncava para cima no intervalo I.*

2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo no intervalo I.*

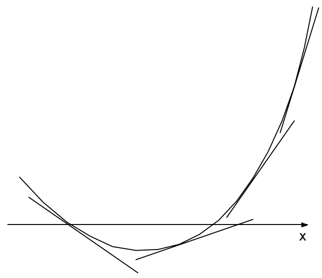


Figura 4.7. Neste gráfico a curva $y = f(x)$ é côncava para cima, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Neste caso, a derivada $f'(x)$ é crescente em I, e assim $(f'(x))' > 0$, ou seja, $f''(x) > 0$

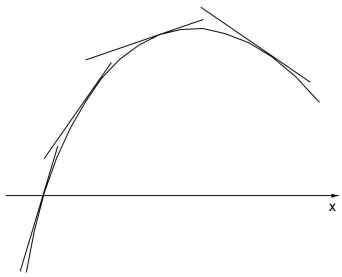


Figura 4.8. Neste gráfico a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Neste caso, a derivada $f'(x)$ é decrescente em I, e assim $(f'(x))' < 0$, ou seja, $f''(x) < 0$.

Definição 4.4 (Pontos de inflexão da curva $y = f(x)$)
O ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é um ponto de inflexão *da curva $y = f(x)$ se, ao menos em um pequeno intervalo, esta curva é côncava para cima antes de x_0, e é côncava para baixo depois de x_0, ou vice-versa. Além disso a curva deve ter reta tangente no ponto P.*
Isto quer dizer que o ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é um ponto de mudança do sentido de concavidade do gráfico de f. Veja figura 4.9.

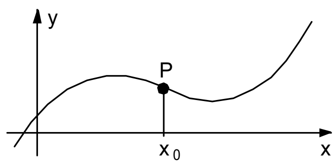


Figura 4.9. P é um ponto de inflexão do gráfico de f. Nesta ilustração, a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo antes de x_0, e côncava para cima depois de x_0.

Tendo em vista o resultado do teorema 4.2, se $f''(x)$ é contínua, os candidatos a pontos de inflexão são os pontos $(x, f(x))$ para os quais $f''(x) = 0$.

Exemplo 4.1 *Como primeiro exemplo, consideremos a função* $f(x) = x^2 - 3x$.

Temos $f'(x) = 2x - 3$ e $f''(x) = 2$. Assim, f e suas derivadas f' e f'' são todas contínuas em $\mathbb{R}$.

Analisando a variação de sinal de $f'(x)$, deduzimos:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3/2$$

Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $x \geq 3/2$ (ou seja, no intervalo $[3/2, +\infty[$).

Por outro lado, $f(x)$ é decrescente no intervalo $]-\infty, 3/2]$.

Desse modo, em $x_0 = 3/2$, temos um ponto mínimo local, que acontece ser o ponto de mínimo de $f(x)$. Note que $f'(3/2) = 0$, pois se x_0 é um ponto de máximo ou mínimo local, de uma função derivável, a reta tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$ deve ser horizontal.

Como $f''(x) = 2 > 0$ para todo x, o gráfico de f tem a concavidade sempre voltada para cima.

Com os elementos deduzidos acima, notando que $f(3/2) = -9/4$, e que 0 e 3 são as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), temos o esboço da curva $y = x^2 - 3x$ na figura 4.10.

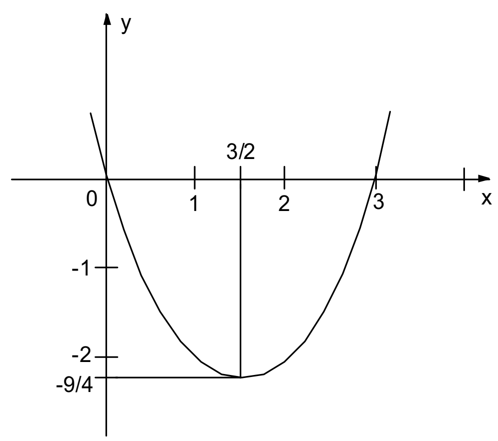


Figura 4.10.

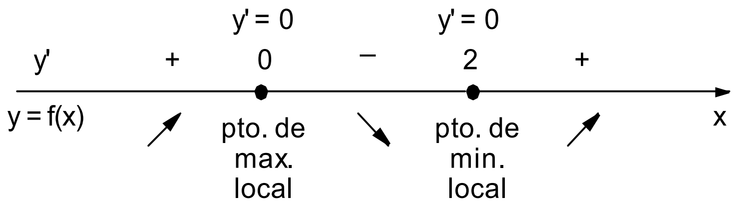
Exemplo 4.2 *Consideremos agora a função* $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Temos $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f''(x) = 6x - 6$. Assim, f e suas derivadas f' e f'' são todas contínuas em $\mathbb{R}$.

Analisando a variação de sinal de $f'(x)$, deduzimos:

$$f'(x) = 3x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 2$$

Faremos então um diagrama de sinais da derivada. Neste diagrama indicamos os intervalos em que a derivada de $f(x)$ é positiva $(+)$ ou negativa $(-)$ e, simultaneamente, indicamos os intervalos nos quais $f(x)$ é crescente $(\nearrow)$, e aqueles nos quais $f(x)$ é decrescente $(\searrow)$. Indicamos também pontos de mínimo locais e pontos de máximo locais de $f(x)$.



Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $]-\infty, 0]$ e também é crescente no intervalo $[2, +\infty[$, sendo decrescente no intervalo $[0, 2]$. Desse modo 0 é ponto de máximo local de f e 2 é ponto de mínimo local. Repare que 0 e 2 são raízes de $f'(x)$. Assim, nos pontos $(0, f(0)) = (0, 0)$ e $(2, f(2)) = (2, -4)$ as retas tangentes ao gráfico de f são horizontais.

Analisando a variação de sinal de $f''(x)$, temos

$$f''(x) = 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Assim, a curva $y = x^3 - 3x^2$, gráfico de f, tem concavidade voltada para cima quando $x > 1$, e para baixo quando $x < 1$. O ponto $P = (1, f(1)) = (1, -2)$ é ponto de inflexão do gráfico.

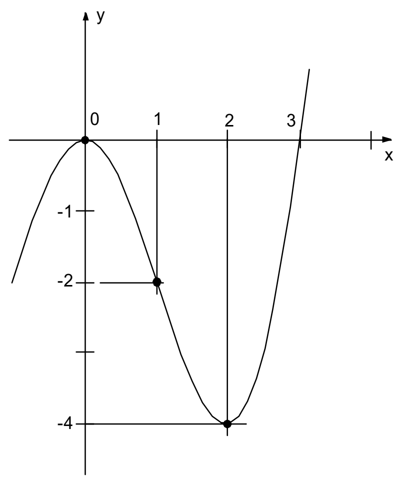


Figura 4.11.

Com os elementos deduzidos acima, notando que 0 e 3 são as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), temos o esboço da curva $y = x^3 - 3x^2$ na figura 4.11. Aqui levamos em conta também que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4.4 Problemas

Cada uma das funções $f(x)$ dadas abaixo tem como domínio todo o conjunto $\mathbb{R}$. Para cada uma delas,

(a) Calcule $f'(x)$ e, analisando em um eixo os sinais de $f'(x)$, determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente;

(b) Determine os pontos de máximo locais e os pontos de mínimo locais de f, bem como os valores de $f(x)$ nesses pontos;

(c) Calcule $f''(x)$ e, analisando em um eixo os sinais de $f''(x)$, determine os intervalos em que a curva $y = f(x)$ é côncava para cima e aqueles em que ela é côncava para baixo;

(d) Determine os pontos de inflexão da curva $y = f(x)$;

(e) Calcule os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(f) A partir dos dados coletados acima, faça um esboço bonito do gráfico de f.

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
3. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

Respostas e sugestões

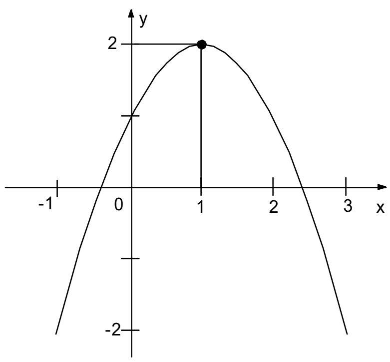
1. (a) $f'(x) = -2x + 2$. $f \nearrow$ (é crescente) em $]-\infty, 1]$, e $\searrow$ (é decrescente) em $[1, +\infty[$.
(b) 1 é ponto de máximo local de f. $f(1) = 2$.
(c) $f''(x) = -2$. A curva $y = f(x)$ é sempre côncava para baixo.
(d) A curva $y = f(x)$ não tem pontos de inflexão.
(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. $f \nearrow$ em $]-\infty, 1]$, $\searrow$ em $[1, 3]$, e $\nearrow$ novamente em $[3, +\infty[$.
(b) 1 é ponto de máximo local de f, 3 é ponto de mínimo local. $f(1) = 4$, $f(3) = 0$.
(c) $f''(x) = -6x - 12$. A curva $y = f(x)$ é $\frown$ (côncava para baixo) em $]-\infty, 2[$ e $\smile$ (côncava para cima) em $]2, +\infty[$.
(d) $P = (2, 2)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.
(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

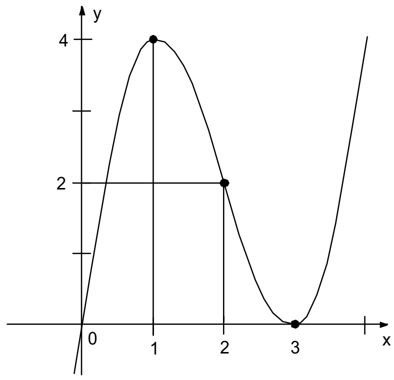
3. (a) $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
$f \searrow$ em $]-\infty, -1]$, $\nearrow$ em $[-1, 1]$, e $\searrow$ em $[1, +\infty[$.
(b) -1 é ponto de mínimo local de f, 1 é ponto de máximo local. $f(-1) = 2$, $f(1) = 2$.
(c) $f''(x) = \dfrac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.
A curva $y = f(x)$ é $\frown$ em $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $\smile$ em $]-\sqrt{3}, 0[$, $\frown$ em $]0, \sqrt{3}[$ e $\smile$ em $\sqrt{3}, +\infty[$.
(d) Os pontos de inflexão do gráfico são $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(0,0)$ e $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$
(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Esboços dos gráficos

1.



2.



3.