Unidade 4

Desenhando gráficos de funções, através de limites e derivadas

As figuras são parte essencial desta unidade. Todas as definições e propriedades devem ser estudadas e confrontadas com as figuras que as interpretam.

4.1 Crescimento e decrescimento

Definição 4.1

1. *Dizemos que a função $f(x)$ é crescente no intervalo I se, nesse intervalo, quando x aumenta de valor, $f(x)$ também aumenta de valor.*

2. *Dizemos que a função $f(x)$ é decrescente no intervalo I se, nesse intervalo, quando x cresce em valor, $f(x)$ decresce.*

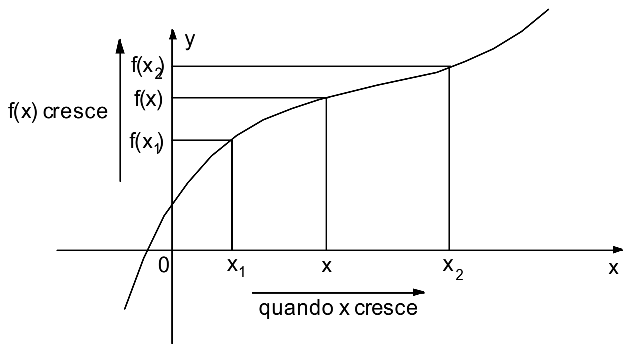

Figura 4.1. f é crescente em um certo intervalo I.

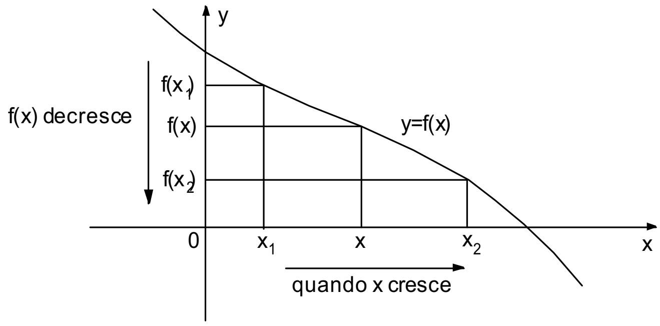

Figura 4.2. f é decrescente em um certo intervalo I.

Teorema 4.1 *Suponhamos que f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e tem derivada nos pontos do intervalo aberto $]a, b[$.*

1. *Se $f'(x) > 0$ nos pontos do intervalo aberto $]a, b[$, então f é crescente no intervalo fechado $[a, b]$.*
2. *Se $f'(x) < 0$ nos pontos do intervalo aberto $]a, b[$, então f é decrescente no intervalo fechado $[a, b]$.*

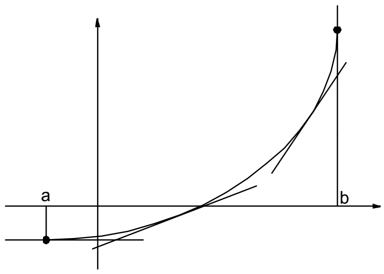

Figura 4.3. Se a derivada $f'(x)$ se mantém positiva quando $a < x < b$, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico são sempre positivos, e assim a função é crescente no intervalo $[a, b]$.

Note que as hipóteses do teorema 4.1 não requerem que a função $f(x)$ tenha derivada nos extremos a e b do intervalo $[a, b]$.

Definição 4.2 (Pontos de máximo e pontos de mínimo locais)

Um ponto x_0, no domínio da função f, é um ponto de mínimo local de f *se existe um intervalo $[a, b]$ contido no domínio de f, com $a < x_0 < b$, tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x em $[a, b]$.*

Assim, x_0 será um ponto de mínimo local de f caso existam intervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ contidos em Dom(f) tais que f é decrescente em $[a, x_0]$ e é crescente em $[x_0, b]$. Veja figura 4.5.

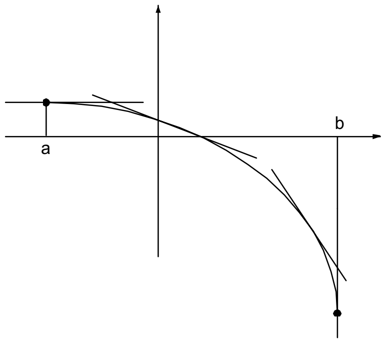

Figura 4.4. Se a derivada $f'(x)$ se mantém negativa quando $a < x < b$, as retas tangentes ao gráfico são inclinadas para a esquerda, e assim a função é decrescente quando $a \leq x \leq b$.

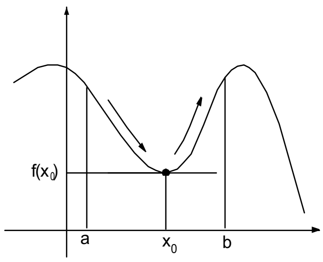

Figura 4.5. x_0 é um ponto de mínimo local. Se f tem derivada em x_0 então $f'(x_0) = 0$, pois a reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$ deve ser horizontal.

Se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo x em $[a, b]$, x_0 é um ponto de máximo local de f*. Assim sendo, x_0 será um ponto de máximo local de f caso existam intervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ contidos em Dom(f) tais que f é crescente em $[a, x_0]$ e decrescente em $[x_0, b]$. Veja figura 4.6.*

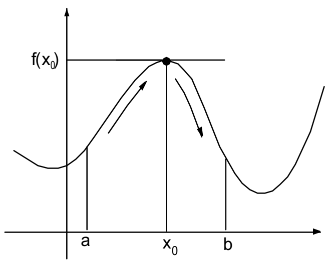

Figura 4.6. x_0 é um ponto de máximo local. Se f tem derivada em x_0 então $f'(x_0) = 0$ pois no ponto $(x_0, f(x_0))$ a reta tangente ao gráfico deve ser horizontal.