3.4 Algumas interpretações geométricas de limites

Na figura 3.2 temos o esboço de um gráfico de uma função definida no conjunto $\mathbb{R} - \{x_0\}$, para a qual $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ e $\lim_{x \to x_1} f(x) = b = f(x_1)$.

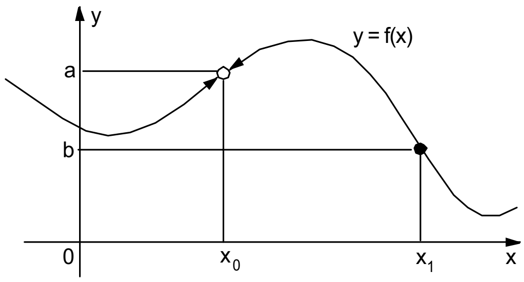

Figura 3.2.

Na figura 3.3 temos o esboço de um gráfico de uma função definida em todo o conjunto $\mathbb{R}$, para a qual $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

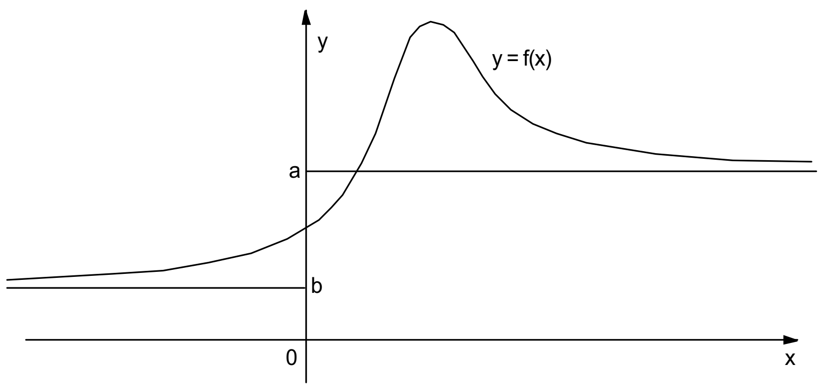

Figura 3.3.

Na figura 3.4 temos o esboco de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

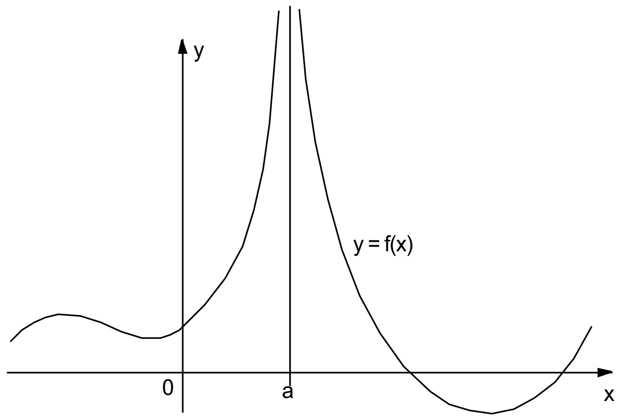

Figura 3.4.

Na figura 3.5 ilustramos o esboco de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

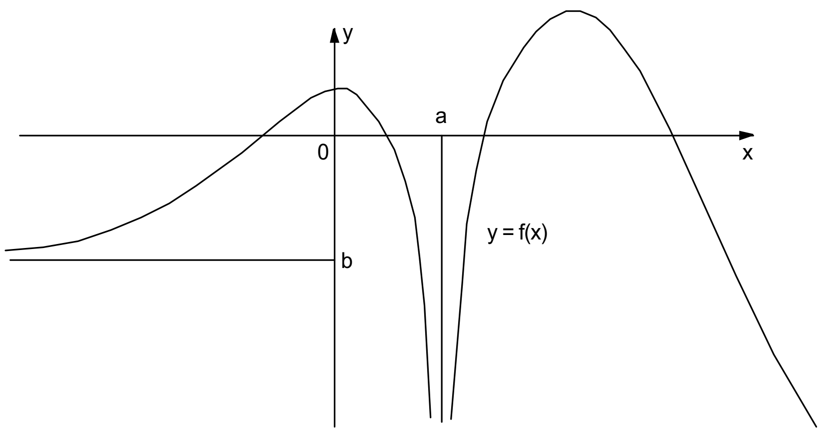

Figura 3.5.

3.5 Limites laterais

Para cada número real x define-se o *módulo* ou *valor absoluto* de x como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|+3| = +3$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$.

Para apresentar o conceito de limites laterais, consideraremos a função

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|}$$

O domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

Se $x > 0$, $|x| = x$ e portanto $f(x) = x + 1$. Se $x < 0$, $|x| = -x$ e portanto $f(x) = x - 1$. O gráfico de f é esboçado na figura 3.6.

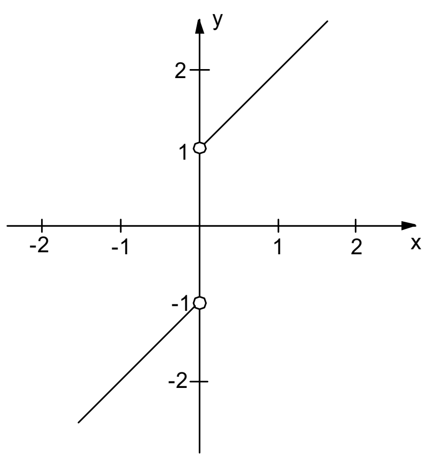

Figura 3.6. Esboço do gráfico de $y = x + \dfrac{x}{|x|}$

Se x tende a 0, mantendo-se > 0, $f(x)$ tende a 1. Se tende a 0, mantendo-se < 0, $f(x)$ tende a -1.

Dizemos então que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela direita*, é igual a 1, e denotamos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Dizemos também que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela esquerda*, é igual a -1, e denotamos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

De um modo geral, se x_0 está no interior ou é extremo inferior de um intervalo contido em Dom(f),

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ significa } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ significa } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$$

Exemplo 3.7 (Limites laterais com valores infinitos)

Consideremos agora a função $f(x) = 1/x$.

Temos Dom$(f) = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

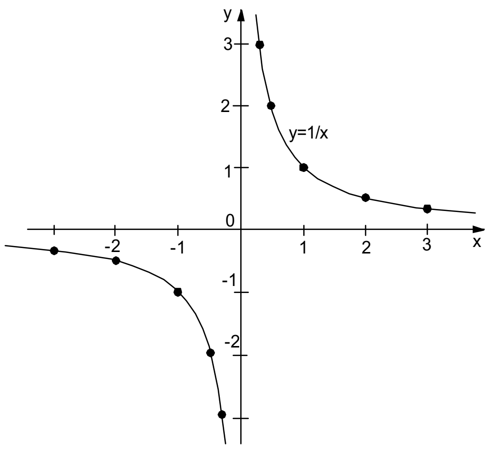

Figura 3.7. Gráfico de $y = 1/x$

No esboço do gráfico de f, figura 3.7, ilustramos a ocorrência dos limites laterais

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

(Também ilustramos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.)

Neste caso, é conveniente denotar, introduzindo novos símbolos em nossa álgebra de limites,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Observação 3.1 *Em geral, dizemos que*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ *se*

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, *e*

(ii) $f(x) > 0$ *quando* x *está suficientemente próximo de* x_0.

Dizemos que

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ *se*
(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, *e*
(ii) $f(x) < 0$ *quando* x *está suficientemente próximo de* x_0.

Nossa álgebra de limites passa a contar agora com os seguintes novos resultados:

$$\frac{c}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad \frac{c}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Também é fácil intuir que

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

Exemplo 3.8

$\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$, *portanto* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x-3}{x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x-3} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$$

Exemplo 3.9 *Calcular* $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+2}{|x+2|}$ *e* $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x+2}{|x+2|}$

Solução. Observe que $x + 2 > 0$ se e somente se $x > -2$.

Assim sendo, se $x > -2$, temos $x + 2 > 0$ e então $|x + 2| = x + 2$.

Por outro lado, se $x < -2$, temos $x + 2 < 0$ e então $|x + 2| = -(x + 2)$.

Assim sendo, temos

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \to -2} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \to -2} -1 = -1$$

Observação 3.2 *A afirmação*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

é equivalente à afirmação, simultânea, de que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$$

3.6 Continuidade, diferenciabilidade, e gráficos

Observação 3.3 (O gráfico de uma função contínua em $[a, b]$)

Vimos acima que a função $f(x) = x + x/|x|$ tem limites laterais diferentes no ponto $x_0 = 0$, sendo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$. Assim, conforme podemos vizualizar na figura 3.6, o gráfico de f apresenta um salto no ponto 0.

Também a função $f(x) = 1/x$ tem um salto no ponto 0. Agora porém o salto é infinito, sendo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

Quando uma função $f(x)$ é contínua nos pontos de um intervalo $[a, b]$, a curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gráfico de f no intervalo $[a, b]$, não apresenta quebras ou saltos.

Intuitivamente falando, quando $f(x)$ é contínua nos pontos de um intervalo $[a, b]$, podemos desenhar o gráfico ligando o ponto inicial $A = (a, f(a))$ ao ponto final $B = (b, f(b))$ sem tirar o lápis do papel, tal como na figura 3.8.

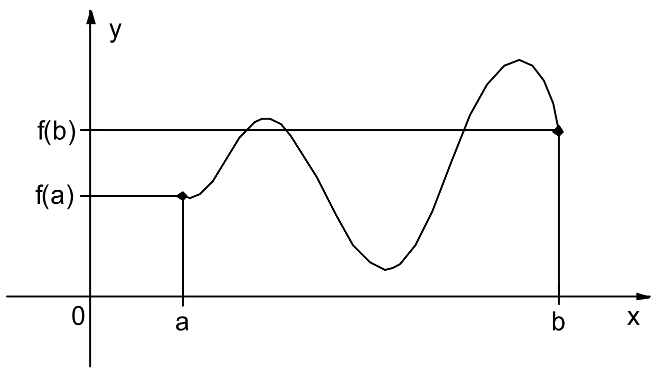

Figura 3.8. f é contínua e diferenciável (derivável) no intervalo $[a, b]$.

Observação 3.4 (Uma função contínua pode não ter derivada sempre)
Na figura 3.9 temos uma ilustração de uma função contínua no intervalo $[a, b]$ *que, no entanto, não tem derivada em dois pontos desse intervalo. Nos pontos correspondentes a* c *e* d*, os gráficos formam "bicos" e não se definem retas tangentes ao gráfico de* f.

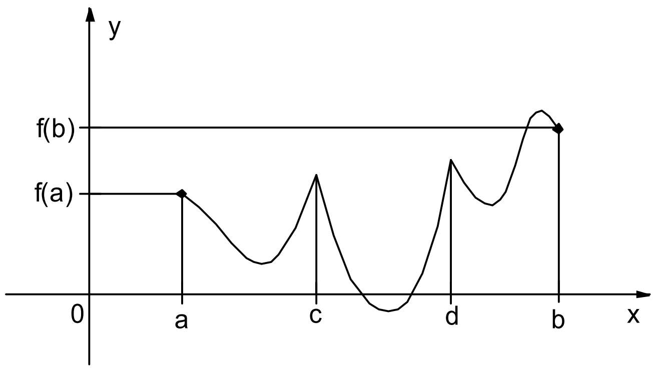

Figura 3.9. f é contínua no intervalo $[a, b]$, mas não tem derivadas nos pontos c e d.

3.7 Problemas

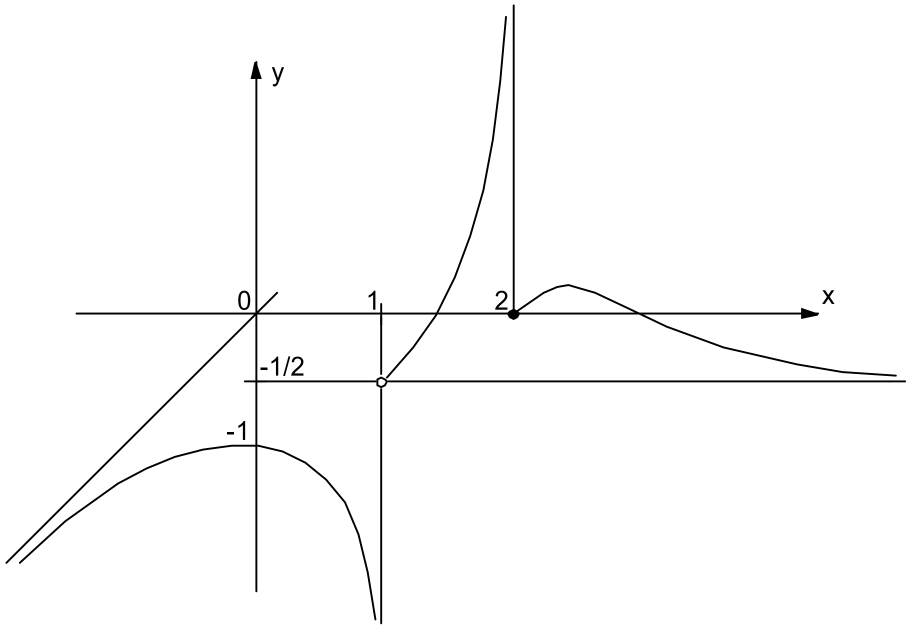

Figura 3.10.

1. Na figura 3.10 está esboçado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Complete as igualdades:

   (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ (c) $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$
   (d) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ (e) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ (f) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$
   (g) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$ (h) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

2. Em que pontos a função f do problema anterior é definida? Em quais pontos é contínua?

3. Calcule os limites laterais

   (a) $\lim_{x\to \pi^-} \dfrac{|\pi - x|}{x - \pi}$ (b) $\lim_{x\to \pi^+} \dfrac{|\pi - x|}{x - \pi}$ (c) $\lim_{x\to 8^-} \dfrac{1}{x - 8}$
   (d) $\lim_{x\to 8^+} \dfrac{1}{x - 8}$ (e) $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x - 2}$

4. Para as funções $f(x)$ abaixo, calcule os limites $\lim_{x\to -3^+} f(x)$, $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ e diga se existe o limite $\lim_{x\to -3} f(x)$. Diga também se f é contínua no ponto -3.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-3x} & \text{se } x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{x^2} & \text{se } x \leq -3 \\ \sqrt[3]{4+x} & \text{se } x > -3 \end{cases}$

Respostas e sugestões

1. (a) $-\infty$ (b) $-1/2$ (c) $+\infty$ (d) 0 (e) -1 (f) -1 (g) $-1/2$ (h) $-\infty$

2. A função f é definida em $\mathbb{R} - \{1\}$. É contínua em $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

3. (a) -1 (b) 1 (c) $-\infty$ (d) $+\infty$ (e) 0

4.

   (a) $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt[3]{x+2} = -1$,
   $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{2-3x} = 1/11$.
   Não se define (não existe) o limite $\lim_{x \to -3} f(x)$. Temos $f(-3) = -1$, mas como não existe $\lim_{x \to -3} f(x)$, f não é contínua no ponto -3.

   (b) $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -3} f(x) = 1$.
   Logo, f é contínua no ponto -3 pois $\lim_{x \to -3} f(x) = f(-3)$.