Unidade 3

Limites (cálculo e significado)

Cálculos de limites são importantes ferramentas auxiliares no estudo de funções e seus gráficos. A definição formal de *limite* é matematicamente sofisticada. Faremos uma exploração intuitiva do conceito de limite e de suas propriedades, através de exemplos e interpretações gráficas.

3.1 Introdução intuitiva ao cálculo de limites

Nesta seção, estudaremos os primeiros exemplos de limites.

Exemplo 3.1 *Considere a função $f(x) = 2x + 3$. Quando x assume uma infinidade de valores aproximando-se mais e mais de 0, o número $2x + 3$ assume uma infinidade de valores, aproximando-se de $2 \cdot 0 + 3 = 3$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0, é igual a 3, e escrevemos*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(2x + 3) = 3$$

Exemplo 3.2 *Aqui temos uma lista de outros exemplos intuitivos.*

1. $\lim\limits_{x \to a} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

2. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$

3. *Sendo* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *(com os coeficientes* $a_n, \ldots, a_0$ *todos reais),*

   $$\lim_{x \to x_0} p(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0)$$

4. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - 3)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 1)} = \frac{8 - 3}{4 + 1} = 1$$

Definição 3.1 *Nos exemplos anteriores, de limites de $f(x)$, com x tendendo a x_0, tivemos sempre x_0 no domínio da função $f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
Quando isto ocorre, dizemos que a função $f(x)$ é contínua no ponto x_0.

No próximo exemplo, temos um limite em que $x \longrightarrow x_0$, mas x_0 não está no domínio de f.

Exemplo 3.3 *Calcular* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Solução. Note que, sendo $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, temos que $2 \not\in \text{Dom}(f)$. Quando x se aproxima de 2, x^3 se aproxima de 8. Um cálculo direto nos dá então

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Este resultado, $0/0$, é um *símbolo de indeterminação* ocorrendo em uma tentativa de cálculo de um limite. A ocorrência desta expressão significa que o limite ainda não foi calculado.

Para contornar o símbolo de indeterminação $0/0$, neste exemplo fazemos uso da fórmula de fatoração $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) \qquad\qquad (\text{pois } x-2 \neq 0) \\
&= 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4 (Cálculo de um limite com mudança de variável) *Calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$$

Um cálculo direto nos dá $0/0$, uma *indeterminação*.

Fazendo $y = \sqrt[3]{x+1}$, temos $y^3 = x+1$, e portanto $x = y^3 - 1$.

Quando x tende a 0, y tende a 1 (em símbolos: se $x \longrightarrow 0$, então $y \longrightarrow 1$). E aí temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} &= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3.2 Limites infinitos. Limites quando $x \to \infty$

Consideremos agora a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Temos que o domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de 0, isto é, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Tabela 3.1.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
± 1	1	1
$\pm 0,5$	$0,25$	4
$\pm 0,2$	$0,04$	25
$\pm 0,1$	$0,01$	100
$\pm 0,01$	$0,0001$	10000
$\pm 0,001$	$0,000001$	1000000

Observe a tabela 3.1. Na primeira coluna da tabela 3.1, temos valores de x cada vez mais próximos de 0. Na segunda coluna, notamos que os valores de x^2 estão ainda mais próximos de zero do que os valores de x. Assim temos $\boxed{\lim_{x\to 0} x^2 = 0}$. Na última coluna, vemos que os valores correspondentes de $f(x) = 1/x^2$ tornam-se cada vez maiores.

Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0 é "$+$ *infinito*", e escrevemos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ ou seja, } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}$$

A interpretação geométrica de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ pode ser visualizada na figura 3.1.

Agora observe a tabela 3.2. Notamos agora que, à medida que x cresce indefinidamente, assumindo valores positivos cada vez maiores, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ torna-se cada vez mais próximo de 0. Isto também é sugerido pela figura 3.1. Neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a "$+$ *infinito*", é igual a 0, e escrevemos $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0}$

Na segunda coluna da tabela 3.2 também ilustramos: $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty}$.

Também visualizamos os fatos: $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty}$ e $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0}$.

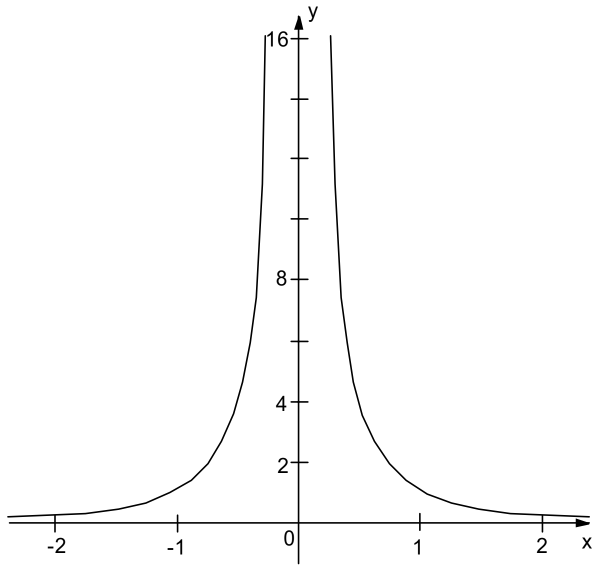

Figura 3.1. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}$, ou seja, à medida que x se aproxima de 0, $y = f(x)$ torna-se cada vez maior. Também $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$, ou seja, à medida em que x cresce, tomando valores cada vez maiores, $f(x)$ aproxima-se de 0. E ainda $\boxed{\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$

Tabela 3.2.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1	1
2	4	0,25
5	25	0,04
10	100	0,01
100	10000	0,0001
1000	1000000	0,000001

Com estes exemplos simples damos início à nossa *álgebra de limites*. Ao calcular limites podemos fazer uso da seguinte "tabuada":

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
$$(\pm\infty)^2 = +\infty \qquad (+\infty)(-\infty) = -\infty$$
$$(+\infty)^3 = +\infty \qquad (-\infty)^3 = -\infty$$
$$(-\infty)^{(\text{inteiro positivo par})} = +\infty \qquad (-\infty)^{(\text{inteiro positivo ímpar})} = -\infty$$
$$\frac{1}{\pm\infty} = 0$$
$$+\infty + c = +\infty \ (c \text{ constante}) \qquad -\infty + c = -\infty \ (c \text{ constante})$$

$$c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad c \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

$$\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad \frac{-\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

Mas atenção! Cautela com essa nova "aritmética"! Os "resultados"

$$\tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

são novos *símbolos de indeterminação*. Nada significam como valores de limites. Se chegarmos a algum deles no cálculo de um limite, temos que repensar o procedimento de cálculo.

Exemplo 3.5 *Calcular* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$

Solução. Uma substituição direta nos dá

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \frac{+\infty - (+\infty) - 1}{+\infty + 4}$$

Para evitarmos símbolos de indeterminação, quando $x \to \pm\infty$, colocamos em evidência as potências de x de maior grau, no numerador e no denominador.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^3(1 + \frac{4}{x^3})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{x(1 + \frac{4}{x^3})}$$
$$= \frac{3 - \frac{2}{+\infty} - \frac{1}{+\infty}}{+\infty(1 + \frac{4}{+\infty})} = \frac{3 - 0}{+\infty \cdot (1 + 0)} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Exemplo 3.6 *Calcular* $\lim_{x\to-\infty} (x^5 - x^3)$

Temos $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-x^3)=(-\infty)^5-(-\infty)^3=(-\infty)-(-\infty)=(-\infty)+(+\infty)$, portanto chegamos a um símbolo de indeterminação.

Podemos no entanto fazer

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5(1-\frac{1}{x^2})=+\infty\cdot(1-0)=+\infty.$

Nos limites da forma $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em x, prevalecem os termos de maior grau de ambos os polinômios, ou seja, se

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

então

$$\lim_{x\to\pm\infty}p(x)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Por exemplo, nos exemplos que acabamos de estudar, bastaríamos fazer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^5=(+\infty)^5=+\infty$$

Mas atenção. Isto só vale para limites envolvendo polinômios, em que $x\to\pm\infty$.

3.3 Problemas

1. Calcule os limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$ (c) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)(x-4)$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} 15$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$

2. Calcule os limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x-5}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)^3(2-3x)^2}{x^5+5}$

Respostas e sugestões

1. (a) 4 (b) $1/9$. *Sugestão:* $2x^2+5x-7=(2x+7)(x-1)$ (c) $3x^2$ (d) $5\sqrt{2}-20$ (e) 15 (f) $-3/8$. *Sugestão:* $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

2. (a) 2. *Sugestão:* $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ (b) 0. *Sugestão:* $\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}=\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x+1)^3}}$ (c) 0 (d) 72