6.5 Limites indeterminados e as regras de L'Hopital

As *regras de L'Hopital* são regras para calcular limites indeterminados, da forma $0/0$ ou ∞/∞, usando derivadas. São duas as chamadas regras de L'Hopital. Uma para formas indeteminadas $0/0$ e outra para formas indeterminadas ∞/∞. Ambas podem ser enunciadas conjuntamente como uma única regra.

Regra 15 (Regras de L'Hopital) *Se* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ *tem uma forma indeterminada* $0/0$ *ou* ∞/∞, *então*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

caso o limite $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ *exista (sendo finito ou infinito). A regra continua valendo se* $x \longrightarrow a^+$ *ou* a^-, *ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

No caso de limites indeterminados de quocientes de polinômios, não precisamos das regras de L'Hopital (podendo usá-las mesmo assim), mas às vezes as regras de L'Hopital são nosso único recurso para o cálculo de um limite:

Exemplo 6.1 *Mostre que*

$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$$

(ou seja, quando $x \longrightarrow +\infty$, *o decaimento exponencial de* e^{-x} *"mata" o crescimento polinomial de* x^3*).*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} && (= \infty/\infty,\ \text{aplicamos L'Hopital})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x} && (= \infty/\infty,\ \text{L'Hopital uma segunda vez})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x} && (= \infty/\infty,\ \text{L'Hopital uma terceira vez})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Podemos mostrar que para cada inteiro positivo n,

$$\lim_{x\to+\infty} x^ne^{-x} = 0$$

(ou seja, quando $x \longrightarrow +\infty$, o decaimento exponencial de e^{-x} "mata´´ o crescimento polinomial de x^n).

Para mostrar isto, aplicamos L'Hopital ao limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$ repetidas vezes, enquanto tivermos a indeterminação ∞/∞. Após n aplicações da regra de L'Hopital, concluiremos que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n!}{e^x} = \dfrac{n!}{+\infty} = 0$.

Exemplo 6.2 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

O limite é indeterminado, da forma $0/0$, e agora não podemos colocar em evidência nenhuma potência de x. Aplicando L'Hopital, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x^3)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} && (= 0/0, \text{ aplicamos L'Hopital}) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} && (= 0/0, \text{ aplicamos L'Hopital}) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Exemplo 6.3 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$.

Temos $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0 \cdot (-\infty)$. Recorde-se que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (veja texto da semana 4).

Neste caso, aplicando as regras de L'Hopital, fazemos

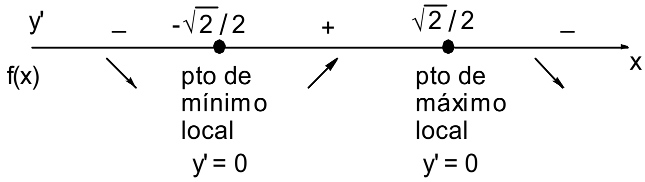
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \left(= \frac{-\infty}{+\infty}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0
\end{aligned}$$

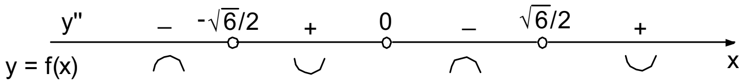
Exemplo 6.4 *Estudar a função* $f(x) = 2xe^{-x^2}$*, e esboçar seu gráfico.*

Solução. Temos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, e $f'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$. Os pontos críticos de f são $\pm\sqrt{2}/2$. Lembremo-nos de que, por derivação em cadeia, $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

A variação de sinais de f', com a correspondente análise dos intervalos de crescimento e descrescimento de f, é dada no diagrama abaixo.

$$f''(x) = -12xe^{-x^2} + 8x^3e^{-x^2} = 4e^{-x^2}(2x^3 - 3x) = 4e^{-x^2}x(2x^2 - 3).$$





$f''(x) = 0$ somente para $x = \pm\sqrt{6}/2$ ou $x = 0$.

A variação de sinais de f'', com a correspondente análise das concavidades do gráfico de f, é dada no diagrama abaixo.

São pontos de inflexão do gráfico os pontos $P_1 = (-\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}e^{-3/2})$, $P_2 = (0, 0)$ e $P_3 = (\sqrt{6}/2, \sqrt{6}e^{-3/2})$. Temos, $\sqrt{6}/2 \approx 1,3$, $f(-\sqrt{6}/2) = -\sqrt{6}e^{-3/2} \approx -2,5 \cdot 2,2 \approx -0,6$, $f(0) = 0$ e $f(\sqrt{6}/2) = \sqrt{6}e^{-3/2} \approx 0,6$.

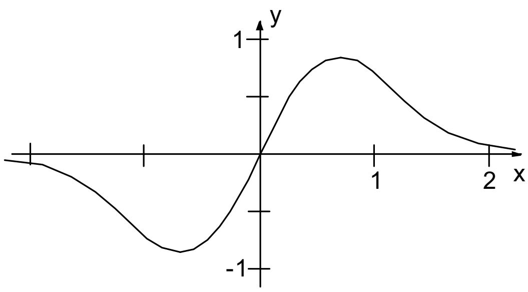


Figura 6.7.

Estudando o comportamento de f no infinito, temos

$\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \pm\infty \cdot e^{-\infty} = \pm\infty \cdot 0$. Para evitarmos a indeterminação, fazemos

$\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{e^{x^2}} \left(= \dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Aplicando regras de L'Hopital, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = \frac{2}{\pm\infty} = 0.$$

Assim, a reta $y = 0$ (eixo x) é assíntota horizontal do gráfico de f.

Com base nos dados coletados acima, o gráfico de f é esboçado na figura 6.7.

6.6 Problemas

1. Calcule os seguintes limites, aplicando regras de L'Hopital se necessário.

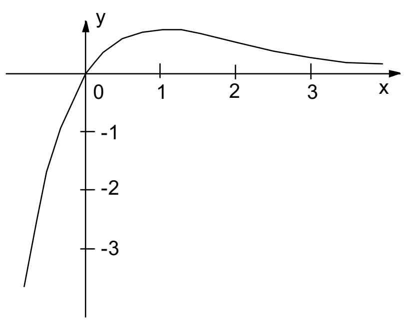
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 e^{-x}$ (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 e^{-x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

   Respostas. (a) $-1/3$. (b) 0. (c) 0. (d) $-\infty$. (e) 1.

2. Esboce o gráfico da função $y = 2xe^{-x}$.

   Resposta.
   Daremos como resposta as derivadas primeira e segunda, e o esboço do gráfico.
   $y' = 2(1-x)e^{-x}$
   $y'' = 2(x-2)e^{-x}$

   Dados numéricos para o gráfico:
   $2e^{-1} \approx 0{,}7$
   $4e^{-2} \approx 0{,}5$.