2.4 Derivadas de funções dadas implicitamente

Muitas vezes, duas variáveis x e y são tais que y depende de x, ou seja, y é uma função da variável x, mas em lugar de uma fórmula $y = f(x)$, temos uma equação $F(x, y) = c$, interrelacionando ambas as variáveis, tal como no exemplo

$$x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$$

Nem sempre é possível resolver a equação dada em y, ou seja, "isolar" y no primeiro membro da equação, expressando explicitamente y como função de x.

No entanto, é (quase sempre) possível obter a derivada $\frac{dy}{dx}$, para $x = x_0$ e $y = y_0$, se o ponto (x_0, y_0) pertencer à curva, isto é, se ele safisfaz a equação dada.

Para isto, derivamos ambos os membros da equação $F(x, y) = c$, considerando y como função de x, e usamos as regras de derivação, bem como a regra da cadeia quando necessário. Depois disto, isolamos y' no primeiro membro da equação.

Exemplo 2.6 Obter $\frac{dy}{dx}$, a partir da equação $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$, por derivação implícita.

$$\begin{aligned}
&x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y\\
&(x^3 + y^3)' = (x^2y^2 + x + y)'\\
&3x^2 + 3y^2y' = (x^2y^2)' + 1 + y'\\
&3x^2 + 3y^2y' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' + 1 + y'\\
&3x^2 + 3y^2y' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' + 1 + y'
\end{aligned}$$

Obtemos então y', deixando no primeiro membro somente os termos com y':

$$\begin{aligned}
&3y^2y' - 2x^2yy' - y' = 1 + 2xy^2 - 3x^2\\
&(3y^2 - 2x^2y - 1)y' = 1 + 2xy^2 - 3x^2\\
&y' = \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.7 Obter a reta tangente à curva $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$, no ponto $P = (1, 0)$ dessa curva.

Note que o problema só faz sentido porque o ponto $(1, 0)$ de fato pertence à curva: $1^3 + 0^3 = 1^2 \cdot 0^2 + 1 + 0$.

Primeiro obtemos $\frac{dy}{dx}$, por derivação implícita, a partir da equação da curva.

Isto já foi feito no exemplo anterior, em que calculamos $y' = \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}$.

O coeficiente angular da reta tangente procurada é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \left.\frac{1+2xy^2-3x^2}{3y^2-2x^2y-1}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \frac{1-3}{-1} = 2$$

Assim sendo, a reta procurada tem equação $y - 0 = 2(x-1)$, *ou seja,* $y = 2x - 2$.

Assim sendo, próximo ao ponto $P = (1, 0)$, *a curva* $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$ *pode ser aproximada pela reta* $y = 2x - 2$.

2.5 Problemas

1. Determine y' sendo y uma função de x dada implicitamente pela equação

   (a) $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

   (b) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

2. Verifique primeiramente que o ponto P pertence à curva dada (isto é, satisfaz a equação dada) e, usando derivação implícita, ache a equação da reta tangente à curva no ponto P.

   (a) $xy = -16$, $\quad P = (-2, 8)$;

   (b) $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0$, $\quad P = (2, -3)$.

Respostas

1. (a) $y' = \dfrac{-(6x^2 + 2xy)}{x^2 + 3y^2}$

   (b) $y' = -\dfrac{y^3}{x^3}$

2. (a) $4x - y + 16 = 0$

   (b) $y + 3 = -\frac{36}{23}(x - 2)$