2.2 Derivação em cadeia

A *regra da cadeia* é uma regra de derivação que nos permite calcular a derivada de uma *composição* (ou um *encadeamento*) de funções, tais como $f(g(x))$ ou $f(g(h(x)))$, conhecendo-se as derivadas $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$.

Regra 8 (Regra da derivação em cadeia, ou regra da cadeia)
Se $y = f(g(x))$, fazemos $y = f(u)$ e $u = g(x)$, e então

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Outra forma da regra da cadeia é a seguinte:
Sendo $y = f(u)$, então $y' = f'(u) \cdot u'$, ou ainda

$$y' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Observação 2.1 (As diferentes formas da regra da cadeia são equivalentes)
Quando $y = f(u)$ e $u = g(x)$ a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot u' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exemplo 2.3 *Calcular a derivada de $y = (x^3 + x - 1)^{10}$. Para aplicar a regra da cadeia, primeiramente escrevemos*

$$y = u^{10}, \qquad u = x^3 + x - 1.$$

Aplicando derivação em cadeia, teremos então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 10u^9 \cdot (3x^2 + 1) \\ &= 10(x^3 + x - 1)^9(3x^2 + 1) \end{aligned}$$

Regra 9 (Importante consequência da derivação em cadeia)
Se $y = [f(x)]^n$, então $y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$, ou ainda
Se $y = u^n$, sendo u uma função de x, então $y' = nu^{n-1} \cdot u'$
Esta regra é verdadeira se n é inteiro ou fracionário (número racional), positivo ou negativo.

Justificativa: Sendo $y = [f(x)]^n$, podemos escrever $y = u^n$, sendo $u = f(x)$. Pela regra da cadeia temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \cdot u'$$

ou seja, $([f(x)]^n)' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$.

Exemplo 2.4 *Calcular* $\dfrac{dy}{dx}$, *sendo* $y = [(x^2+1)^{10}+1]^8$.

Solução. *Aplicando a regra de derivação 9 várias vezes, temos a solução.*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= ([(x^2+1)^{10}+1]^8)' \\
&= 8[(x^2+1)^{10}+1]^{8-1} \cdot [(x^2+1)^{10}+1]' \\
&= 8[(x^2+1)^{10}+1]^7 \cdot [(x^2+1)^{10}]' \\
&= 8[(x^2+1)^{10}+1]^7 \cdot 10(x^2+1)^9 \cdot (x^2+1)' \\
&= 80[(x^2+1)^{10}+1]^7(x^2+1)^9 \cdot 2x \\
&= 160x[(x^2+1)^{10}+1]^7(x^2+1)^9
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5 *Calcular a derivada de* $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+3x+5}$

Solução. *Temos* $f(x) = (3x^2+3x+5)^{\frac{1}{3}}$.

Aplicando a regra 9, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [(3x^2+3x+5)^{\frac{1}{3}}]' \\
&= \frac{1}{3}(3x^2+3x+5)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+3x+5)' \\
&= \frac{1}{3}(3x^2+3x+5)^{-\frac{2}{3}}(6x+3) \\
&= (3x^2+3x+5)^{-\frac{2}{3}}(2x+1) \\
&= \frac{2x+1}{(3x^2+3x+5)^{2/3}} = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{(3x^2+3x+5)^2}}
\end{aligned}$$

2.3 Problemas

1. Escreva a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ no ponto de abcissa $x = 3$.

2. Aplicando derivação em cadeia (quando necessário), calcule $\dfrac{dy}{dx}$ nos seguintes casos:

   (a) $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + 1\right)^5 + \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)^4$

   (b) $y = (x^2 - 3x + 8)^3$

   (c) $y = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^4}$

3. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$

   (b) $f(t) = \dfrac{4}{(9t^2 + 16)^{2/3}}$

4. Em cada item, determine (i) a equação da reta tangente à curva dada no ponto P indicado, e (ii) os pontos da curva em que reta tangente a ela é horizontal.

   (a) $y = (4x^2 - 8x + 3)^4$, $P = (2, 81)$.

   (b) $y = (2x - 1)^{10}$, $P = (1, 1)$.

Respostas e sugestões

1. $y - 2 = 8(x - 3)$, ou $y = 8x - 22$.

2. (a) $\dfrac{dy}{dx} = 5x^2\left(\dfrac{x^3}{3} + 1\right)^4 + 4x\left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)^3$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10x^9}{(x+1)^{11}}$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(7x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^5}$

3. (a) $f'(x) = 8x^2(8x^3 + 27)^{-2/3} = \dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{(8x^3 + 27)^2}}$

   (b) $f'(t) = \dfrac{-48t}{\sqrt[3]{(9t^2 + 16)^5}}$

   Sugestão: Primeiramente, faça $f(t) = \dfrac{4}{(9t^2 + 16)^{2/3}} = 4(9t^2 + 16)^{-2/3}$

4. (a) (i) $y - 81 = 864(x - 2)$, (ii) $(1, 1)$, $(1/2, 0)$ e $(3/2, 0)$.

   (b) (i) $y - 1 = 20(x - 1)$, (ii) $(1/2, 0)$.