Unidade 2

Retas tangentes
Derivação em cadeia
Derivadas de funções implícitas

2.1 A derivada mede inclinações de retas tangentes ao gráfico

Veremos agora uma importante interpretação geométrica da derivada, em relação ao gráfico da função $y = f(x)$.

Fixado um valor x_0, sendo definido $f(x_0)$, seja $\Delta x \neq 0$ um acréscimo (ou decréscimo) dado a x_0. Sendo $x_1 = x_0 + \Delta x$, temos que a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

é o *coeficiente angular* (ou *inclinação*, ou *declividade*) da reta r, secante ao gráfico da curva $y = f(x)$, passando pelos pontos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x_1, f(x_1))$.

Observando os elementos geométricos da figura 2.1, temos que quando Δx tende a 0, o ponto P tem como posição limite o ponto P_0, e a reta secante P_0P terá como posição limite a reta t, que tangencia o gráfico de f no ponto P_0. Assim, quando Δx tende a 0, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tem como limite a declividade da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto P_0.

Assim, com este argumento geométrico e intuitivo, interpretamos $f'(x_0)$ como sendo o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Da geometria analítica, temos que a equação de uma reta, de coeficiente angular m, passando por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

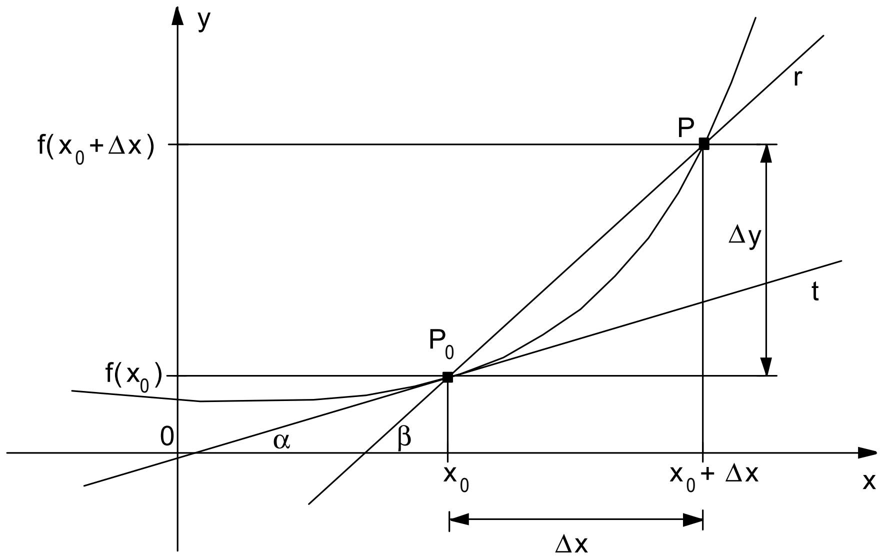

Figura 2.1.

Assim sendo, temos que a equação da reta t, tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{ou} \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Assim sendo, a função linear afim $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ é uma aproximação da função $y = f(x)$ quando x está suficientemente próximo de x_0.

Exemplo 2.1 *Qual é a equação da reta t, que tangencia a parábola $y = x^2$, no ponto $P = (-1, 1)$?*

Solução. *Sendo $y = x^2$, pela regra de derivação 1, temos $\dfrac{dy}{dx} = 2x$. Em P, temos $x = -1$. O coeficiente angular da reta t é dado por*

$$m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2$$

Assim, a reta t, tangente à curva $y = x^2$ no ponto P, tem equação

$$y - 1 = (-2)(x - (-1))$$

ou seja, $y = -2x - 1$.

Exemplo 2.2 *Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da parábola $y = f(x) = 3 - 4x - x^2$, no ponto de abscissa (primeira coordenada) 3. Determine a equação dessa reta. Em qual ponto do gráfico a reta tangente ao gráfico é horizontal?*

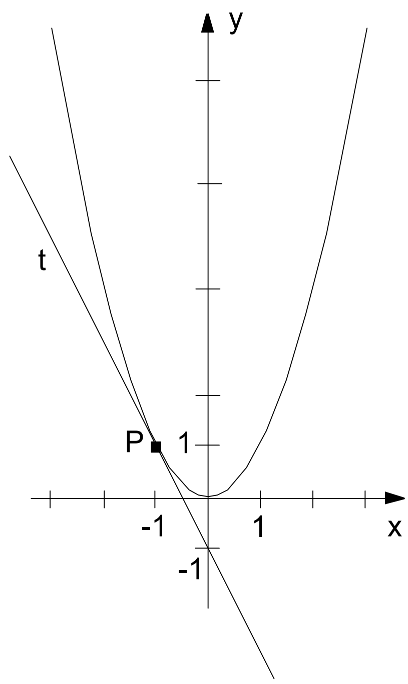

Figura 2.2. Representação gráfica da curva $y = x^2$ e da reta t, tangente à curva no ponto $P = (-1, 1)$.

Solução. *O coeficiente angular da reta tangente à curva (parábola)* $y = 3 - 4x - x^2$*, no ponto de abscissa* 3*, é* $m = f'(3)$*. Como* $f'(x) = -4 - 2x$*, temos* $m = -4 - 2 \cdot 3 = -10$.

O ponto do gráfico, com abscissa 3*, é o ponto* $P = (3, f(3)) = (3, -18)$*. A equação da reta pedida é* $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$*, ou seja,* $y + 18 = -10(x - 3)$*. Simplificando esta equação, ela fica* $y = -10x + 12$.

No ponto $(x, f(x))$ *em que a reta tangente é horizontal, temos* $m = 0$*, ou seja,* $f'(x) = 0$*. Logo,* $x = -2$*. Assim, o ponto procurado é* $(-2, f(-2)) = (-2, 7)$.