1.4 A derivada de uma função

O conceito de derivada é uma generalização do conceito de velocidade instantânea, definida na seção 1.1, trocando-se a função deslocamento $s(t)$ por uma função $f(x)$ qualquer.

Dada uma função $y = f(x)$, consideramos, para cada x, uma variação $\Delta x \neq 0$, e a variação correspondente de $y = f(x)$,

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

A derivada de $f(x)$, denotada por $f'(x)$ (leia-se *"f linha de x"*) é a função definida como sendo o valor limite da razão

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

quando Δx se aproxima indefinidamente de 0. Ou seja,

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

O cálculo prático de derivadas é feito através de várias regras de derivação, que nos poupam do cálculo de limites. Faremos a partir de agora um catálogo dessas regras. Também escrevemos $\frac{dy}{dx}$ (leia-se "de y de x") para indicar a derivada de uma função $y = f(x)$.

Como primeira e importante regra para o cálculo de derivadas, temos a seguinte.

Regra 1 *Se $f(x) = x^n$, sendo n inteiro positivo, então $f'(x) = nx^{n-1}$.*
De maneira simplificada, escrevemos $(x^n)' = nx^{n-1}$.
Esta regra vale se o expoente n é inteiro ou fracionário, negativo ou positivo.

Exemplo 1.3 *De acordo com a regra 1, temos*

$(x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$, *ou seja* $(x)' = 1$.

$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$, *ou seja, se* $y = x^2$, *então* $\frac{dy}{dx} = 2x$.

$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$, *ou seja, se* $y = x^3$, *então* $\frac{dy}{dx} = 3x^2$.

$(x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt[3]{x^2})' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

É importante lembrar que $\boxed{x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}}$ *quando p e q são inteiros, e $q > 0$.*

1.5 Primeiras regras para calcular derivadas

Regra 2 *A derivada de uma função constante é* 0, *isto é, se* $f(x) = c = constante$, *então* $f'(x) = (c)' = 0$.

Regra 3 *Se* $f(x)$ *é uma função e* c *é uma constante, então*

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Ou seja, a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função.

Regra 4 *Sendo* $f(x)$ *e* $g(x)$ *duas funções,*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Ou seja, a derivada de uma soma (ou diferença) de duas funções é a soma (ou respectivamente diferença) das respectivas derivadas.

Exemplo 1.4 *Calcular a derivada de* $f(x) = 2x^3 - 3x^5$, *em relação a* x. *Para tal, aplicamos as regras previamente estabelecidas:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 - 3x^5)' & \\ &= (2x^3)' - (3x^5)' & \qquad ((f-g)' = f' - g') \\ &= 2(x^3)' - 3(x^5)' & \qquad ((cf)' = cf') \\ &= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 5x^4 & \qquad ((x^n)' = nx^{n-1}) \\ &= 6x^2 - 15x^4 & \end{aligned}$$

Exemplo 1.5 *Sendo* $y = -3t^6 + 21t^2 - 98$, *calcular a derivada* $\dfrac{dy}{dt}$.

Aplicando as regras acima estabelecidas, temos

$$\frac{dy}{dt} = (-3t^6 + 21t^2 - 98)' = -18t^5 + 42t$$

1.6 Problemas

1. Se um objeto é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial 110 m/seg, sua altura $h(t)$, acima do chão ($h = 0$), após t segundos, é dada (aproximadamente) por $h(t) = 110t - 5t^2$ metros. Quais são as velocidades do objeto nos instantes $t = 3$ seg e $t = 4$ seg? Em que instante o objeto atinge sua altura máxima?

2. Usando as regras de derivação estabelecidas até agora, calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(t) = -6t^3 + 12t^2 - 4t + 7$

   (b) $f(t) = (3t + 5)^2$

   Sugestão: Primeiro desenvolva o quadrado, usando a fórmula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   Se quiser deduzir esta fórmula, faça $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ e desenvolva o produto.

   (c) $f(x) = (-2x^2 + 1)^3$

   Sugestão: Primeiro desenvolva o cubo. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Esta fórmula pode ser deduzida escrevendo-se $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$ e empregando-se a fórmula para $(a + b)^2$ do item anterior.

   (d) $f(x) = (3x^2 - 7x + 1)(x^2 + x - 1)$

   Sugestão: Primeiro desenvolva o produto.

   (e) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$

Respostas e novas sugestões

1. (A velocidade instantânea do objeto, no instante t, é a derivada $\frac{dh}{dt}$)

   80 cm/seg e 70 cm/seg.

   Em $t = 11$ seg. *Sugestão:* No instante em que o objeto atinge sua altura máxima, sua velocidade é igual a zero (ele para instantaneamente).

2. (a) $f'(t) = -18t^2 + 24t - 4$

   (b) $f'(t) = 18t + 30$

   (c) $f'(x) = -48x^5 + 48x^3 - 12x$

   (d) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 18x + 8$

   (e) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{5}$