1.2 Curta revisão sobre intervalos da reta e funções

Uma função f (ou função $f(x)$) é uma lei que associa cada valor x de um certo conjunto A (chamado domínio de f), a um único valor $y = f(x)$ de um certo conjunto B (chamado contra-domínio de f). Escrevemos $y = f(x)$. Também escrevemos Dom$(f) = A$.

Os domínios de funções tratadas neste curso serão sempre intervalos de $\mathbb{R}$ ou reuniões de intervalos de $\mathbb{R}$.

Os intervalos da reta (eixo) $\mathbb{R}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$ de uma das formas:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalo *fechado* de extremos a e b);
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalo *aberto* de extremos a e b);
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (intervalo de extremos a e b, *semi-aberto* em b);
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (intervalo de extremos a e b, *semi-aberto* em a).

sendo a e b números reais, com $a < b$. Os intervalos acima são os *intervalos limitados*.

Os *intervalos ilimitados* são conjuntos de uma das formas (a e b são números reais, e o símbolo ∞ é lido "infinito"):

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (intervalo *fechado* de a a $+\infty$);
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (intervalo *aberto* de a a $+\infty$);
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (intervalo *fechado* de $-\infty$ a b);
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (intervalo *aberto* de $-\infty$ a b);
$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (intervalo *aberto* de $-\infty$ a $+\infty$);

Como exemplos de funções e seus domínios, temos:

1. $f(x) = \sqrt{x}$ (ou $f(x) = x^{1/2}$) é uma função que tem como domínio o conjunto dos valores reais de x para os quais $\sqrt{x}$ existe e é um número real, ou seja, $x \geq 0$. Assim, dizemos que o *domínio* ou *campo de definição* de f é o intervalo Dom$(f) = [0, +\infty[$. Esta função associa cada número real não negativo x ao único número real não negativo $\sqrt{x}$.

2. $f(x) = 1/x$ é uma função que está definida para os valores reais de x para os quais $1/x$ existe e é um número real, ou seja, para $x \neq 0$. Assim, o *domínio* de f é o conjunto Dom$(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, ou seja, Dom$(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

3. $f(x) = \sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ está definida para os valores reais de x para os quais $\sqrt{2-x}$ e $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ existem e são números reais, ou seja, para $x \leq 2$ $(2 - x \geq 0)$ e $x > 1$ $(x - 1 > 0)$. Assim, Dom$(f) =]1, 2]$.

4. $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (n inteiro positivo), ou $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$.
   Neste caso, Dom$(f) = \{x \mid x \geq 0\}$, se n é par, e Dom$(f) = \mathbb{R}$ se n é ímpar.

1.3 Problemas

1. Determine o *domínio* de cada uma das seguintes funções. Dê a resposta como um intervalo ou uma reunião de intervalos de $\mathbb{R}$. No nosso contexto, o domínio de uma função f é o conjunto de todos os números reais x para os quais $f(x)$ é um número real.

   (a) $f(x) = x^3 - 5x + 3$

   (b) $f(x) = -\sqrt{4 - x}$

   (c) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

Respostas e sugestões

1. (a) $\mathbb{R}$

   (b) $]-\infty, 4]$

   (c) $[-2, 2]$

   Sugestão: Usando a fórmula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ temos que $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$.

   Lembre-se agora a regra de sinais: o produto $(2 - x)(2 + x)$ é ≥ 0 somente quando $2 - x \geq 0$ e $2 + x \geq 0$, ou quando $2 - x \leq 0$ e $2 + x \leq 0$.

   (d) $]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$.

   Sugestão: Fatore $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$ e use a sugestão do item anterior.

   (e) $]0, 2[$. *Sugestão:* Fatore $x^2 - 2x = x(x - 2)$ e use a sugestão do item anterior. Lembre-se que o denominador de uma fração não pode ser zero.