Unidade 1

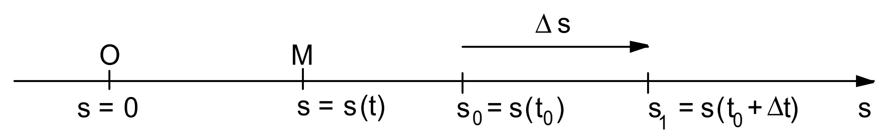
Funções e suas derivadas

Caro estudante, a leitura das seções 1.1 e 1.2 não é obrigatória. O propósito da seção 1.1 é rever um conceito de cinemática que deu origem ao conceito de derivada, a ser apresentado na seção 1.4. O propósito da seção 1.2 é recapitular os conceitos de função e domínio de uma função.

Você deverá porém, resolver os problemas propostos na seção 1.3.

1.1 Velocidade média e velocidade instantânea

Suponhamos que um ponto móvel M desloca-se ao longo de uma linha reta horizontal, a partir de um ponto O.



O deslocamento ou posição s, do ponto M, em relação ao ponto O, é a distância de M a O, quando M está à direita de O, e é o negativo dessa distância quando M está à esquerda de O. Assim, s é positivo ou negativo, conforme M se encontre, respectivamente, à direita ou à esquerda de O (e $s = 0$ no instante em que M está exatamente na posição do ponto O).

Com estas convenções, a reta passa a ser chamada *orientada*, e passa a ser chamada de *eixo*, sendo O sua origem.

A posição s do ponto móvel M depende do instante de tempo t, ou seja, s é uma função da variável t, e escrevemos então

$$s = s(t)$$

Suponhamos que em um determinado instante t_0, a posição de M é $s_0 = s(t_0)$, e que em um instante posterior t_1, a posição de M é $s_1 = s(t_1)$.

A *velocidade média* $\bar{v}$ (le-se "v *barra*") do ponto M, no intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_1$, é dada por

$$\bar{v} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Podemos também escrever $t_1 = t_0 + \Delta t$, sendo $\Delta t = t_1 - t_0$, e também escrevemos $\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ (Δ lê-se "delta", Δt é lido "delta t", e Δs é lido "delta s").

Teremos então

$$\bar{v} = \frac{\text{variação de deslocamento}}{\text{variação de tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A *velocidade instantânea* $v(t_0)$, do ponto M, no instante t_0, é o *limite* da sua velocidade média no intervalo de t_0 a $t_0 + \Delta t$, quando Δt *tende a zero* (esta foi uma idéia de Isaac Newton), e escrevemos

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Exemplo 1.1 (Velocidade média no cotidiano)

Por exemplo, imaginemos que a linha reta é a rodovia Washington Luís, e que o ponto O é o marco zero (que fica na cidade de São Paulo) (imaginando que a rodovia se estenda até São Paulo, o que não acontece).

Suponhamos que o ponto M é um fusca que se move ao longo da rodovia, partindo de São Carlos, no quilômetro 235 (esta é a sua posição s_0 inicial), e viaja até São José do Rio Preto, quilômetro 440 (esta é a posição final s_1).

Suponhamos que o fusca sai de São Carlos às 16:30 (16 horas e 30 minutos), ou seja, $t_0 = 16,5$ h e chega a Rio Preto no mesmo dia, às 19:00, ou seja, $t_1 = 19$ h.

Qual é a sua velocidade média $\bar{v}$? A resposta é dada por

$$\bar{v} = \frac{\text{variação de deslocamento}}{\text{variação de tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{440 - 235}{19 - 16,5} = \frac{205}{2,5} = 82\text{km/h}$$

A velocidade instantânea do fusca, em cada instante de sua viagem, é aquela que se lê no velocímetro do carro.

Exemplo 1.2 (Velocidade instantânea)

Para exemplificar como é calculadada matematicamente a velocidade instantânea, vamos estudar agora o deslocamento de uma pedra em queda livre no ar. Neste caso, o ponto móvel M é a pedra (ou seu centro de massa) o eixo de deslocamento (queda) é vertical.

Segundo leis da física, o deslocamento da pedra no tempo t é dado (aproximadamente) pela equação $s(t) = 5\,t^2$, para t medido em segundos, e s em metros.

Assim, no instante $t = 0$ a pedra está na posição $s(0) = 5 \cdot 0^2 = 0$ (no instante $t = 0$ a pedra começa a cair). No instante $t = 1$ seg a pedra terá percorrido $5 \cdot 1^2 = 5$ metros, no instante $t = 2$ seg a pedra terá percorrido $5 \cdot 2^2 = 20$ metros, e assim por diante. A equação funciona enquanto a pedra não encontrar obstáculo. Na verdade, estamos desconsiderando a resistência do ar, e uma aproximação melhor do deslocamento da pedra no vácuo seria $s = 4{,}9\,t^2$.

Qual é a velocidade instantânea da pedra em um determinado instante t_0? O procedimento para calcularmos isto é o seguinte.

A partir do instante t_0, considere uma variação de tempo Δt (Δ lê-se "delta", Δt lê-se "delta t"). Vamos chamar $t_1 = t_0 + \Delta t$. Teremos então

$$s(t_1) = s(t_0 + \Delta t) = 5(t_0 + \Delta t)^2 = 5(t_0^2 + 2t_0 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2)$$

A variação do deslocamento do ponto móvel, no intervalo de tempo de t_0 a t_1 será

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = 5t_0^2 + 10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2 - 5t_0^2$$

ou seja,

$$\Delta s = 10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2$$

A velocidade média da pedra, no intervalo de tempo de t_0 a t_1, será dada por

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t_0 + 5\Delta t$$

Já *velocidade instantânea* (uma novidade aqui) $v(t_0)$, do ponto M, no instante t_0, é o limite da velocidade média $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a 0, isto é, quando Δt se aproxima mais e mais da variação nula. Escrevemos então

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10t_0 + 5\Delta t) = 10t_0 + 5 \cdot 0 = 10t_0$$

Assim sendo, em cada instante t, a pedra em queda livre tem velocidade instantânea $v(t) = 10t$ m/seg.