# Fundamentos de Lógica Matemática

## Webconferência 6 - 29/03/2012
## Introdução à Lógica de Predicados

Prof. Alexandre L. M. Levada
http://www.dc.ufscar.br/~alexandre

Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

2012/1

# Introdução

- Apesar de poderosa, a lógica proposicional não é suficiente para representar toda a base de conhecimento a respeito de problemas e suas soluções.
- Pergunta
  - É possível generalizar a lógica proposicional?
- Lógica de Predicados (ou Lógica de primeira ordem)
  - Permite a representação de uma quantidade bem maior de conhecimento através da incorporação de:
    - Quantificadores
    - Funções
    - Predicados
  - Isso permite a representação de um número muito maior de sentenças da linguagem natural

# Objetivos

- O objetivo primário do estudo da lógica de predicados é generalizar a lógica proposicional para obter um sistema lógico mais amplo, capaz de expressar sentenças muito mais complexas.
- Em outras palavras, a estrutura da lógica proposicional está imersa na estrutura da lógica de predicados, o que reforça a importância de todo conteúdo visto anteriormente.

Vamos considerar, por exemplo, o enunciado: **todo S é P**. O que essa expressão quer de fato dizer é **qualquer que seja** $x$**, se** $x$ **é S, então,** $x$ **é P**. Esse é um tipo de sentença que jamais poderia ser representada na lógica proposicional. Outros exemplos de sentença que podem ser representadas na lógica de predicados são:

- todos os homens são mortais.
- existem pessoas bondosas, no entanto nem todas são bondosas.
- alguns alunos estudam, mas nem todos os alunos são aprovados.
- nem todas as pessoas sabem dirigir.

# A linguagem da lógica de predicados

O alfabeto da lógica de predicados é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

**Símbolos lógicos**

- operadores lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$
- quantificadores: $\forall$ e $\exists$
- símbolos de pontuação: ( e )

**Símbolos não lógicos**

- constantes: representadas por letras minúsculas, em geral de $a$ a $t$
- variáveis: representadas usualmente pelas letras minúsculas $u$, $v$, $w$, $x$, $y$
- letras predicativas (ou predicados): representadas por letras maiúsculas

# Definições básicas

**Definição 8.1**: um predicado $P$ é dito n-ário se ele possui $n$ argumentos, ou seja, se pode ser escrito como $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, no qual $a_i$ é uma constante.

**Definição 8.2**: se $P$ é um predicado n-ário, então, ele é uma fórmula atômica.

É interessante notar a analogia com a lógica proposicional. Enquanto lá os átomos eram proposições simples, aqui são **predicados**. Esse é um dos motivos pelos quais podemos caracterizar a **lógica proposicional como um subconjunto da lógica de predicados**.

# Fórmulas bem-formadas

O conceito de fórmula bem-formada (ou *WFF*) da lógica de predicados é definido pelas seguintes regras de formação (NOLT & ROHATYN, 1991):

- toda fórmula atômica é uma *WFF*
- se $\phi$ é uma *WFF*, então $\neg\phi$ é uma *WFF*
- se $\phi$ e $\psi$ são *WFFs*, então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ são *WFFs*
- se $\phi$ é uma *WFF* contendo uma constante $a$, então, qualquer fórmula da forma $\forall x \phi^x/a$ ou $\exists x \phi^x/a$, onde $\phi^x/a$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de $a$ na fórmula $\phi$ por uma variável $x$ que não ocorre na fórmula. Dizemos, neste caso, que a fórmula é uma sentença quantificada.

**Exemplo 1**: formalizar os enunciados abaixo considerando a seguinte interpretação de símbolos: as constantes $b$ e $c$ representam respectivamente os nomes próprios Bernardo e Carol; as letras predicativas $M$, $E$ e $A$ são os predicados unários 'é mecânico', 'é enfermeira' e 'é anel'; as letras predicativas $L$ e $T$ são os predicados binários '... ama ...' e '... é mais alto que ...'; a letra predicativa $D$ é o predicado ternário '... dá ... para ...'.

a) Carol e Bernardo são mecânicos.
b) Carol é mecânica ou enfermeira.
c) Se Carol é mecânica, então, ela não é enfermeira.
d) Bernardo ama Carol.
e) Bernardo ama qualquer pessoa.
f) Qualquer um ama a Carol.
g) Qualquer pessoa ama a si mesma.
h) Existe alguém que ama tanto Bernardo como Carol.
i) Existe alguém que Bernardo ama e alguém que Carol ama.
j) Carol deu alguma coisa para Bernardo.
k) Bernardo deu um anel para Carol.
l) Existe alguém que ama todo mundo.
m) Se Bernardo não ama a si próprio, então, ele ama ninguém.
n) Para quaisquer três objetos, se o primeiro é mais alto que o segundo e o segundo é mais alto que o terceiro, então, o primeiro é mais alto que o terceiro.

Solução:

a) $M(c) \wedge M(b)$

b) $M(c) \vee E(c)$

c) $M(c) \rightarrow \neg E(c)$

d) $L(b, c)$

e) $\forall x(L(b, x))$

f) $\forall x(L(x, c))$

g) $\forall x(L(x, x))$

h) $\exists x(L(b, x) \wedge (L(c, x)))$

i) $\exists x(L(b, x)) \wedge \exists y(L(c, y))$

j) $\exists x(D(c, x, b))$

k) $\exists x(A(x) \wedge D(b, x, c))$

l) $\exists x(\forall y(L(x, y)))$

m) $\neg L(b, b) \rightarrow \forall x(\neg L(b, x))$

n) $\forall x \forall y \forall z((T(x, y) \wedge T(y, z)) \rightarrow T(x, z))$

- Quando uma sentença quantificada é verdadeira?
  - Precisamos especificar o domínio (ou conjunto universo $U$) da variável ou variáveis envolvidas, que nada mais é que o conjunto de todos os possíveis valores que ela(s) pode(m) assumir.

**Definição 8.4**: a sentença $\forall x(P(x))$ é verdadeira se e somente se o conjunto verdade de $P(x)$ e o conjunto universo forem iguais, ou seja, $U = V$, sendo falsa quando $U \neq V$. A tabela abaixo ilustra alguns exemplos:

| $\forall x(P(x))$ | $U$ | $V$ | valor lógico |
|---|---|---|---|
| $\forall x(x = 0)$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ | $V$ |
| $\forall x(x = 0)$ | $\{0, 1\}$ | $\{0\}$ | $F$ |
| $\forall x(2x - 1 = 5)$ | $\{3\}$ | $\{3\}$ | $V$ |
| $\forall x(2x - 1 = 5)$ | $\{x : x \in N\}$ | $\{3\}$ | $F$ |

# Valores lógicos de sentenças quantificadas

| $\exists x(P(x))$ | $U$ | $V$ | Valor Lógico |
|---|---|---|---|
| $\exists x(x = 0)$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ | $V$ |
| $\exists x(x = 0)$ | $\{0, 1\}$ | $\{0\}$ | $V$ |
| $\exists x(2x - 1 = 5)$ | $\{3\}$ | $\{3\}$ | $V$ |
| $\exists x(2x - 1 = 5)$ | $\{x : x \in N\}$ | $\{3\}$ | $V$ |
| $\exists x(2x - 1 = 5)$ | $\{0, 1, 2\}$ | $\{3\}$ | $F$ |

# Inferência na lógica de predicados

Inferência em lógica de predicados pode ser realizada utilizando os mesmos princípios vistos na lógica proposicional, porém algumas adaptações e definições se fazem necessárias

- Técnicas Dedutivas
  - Regras para o quantificador universal (eliminação universal e introdução universal)
  - Regras para o quantificador existencial (eliminação existencial e introdução existencial)
  - Regras para introdução e eliminação da identidade
  - Regras para intercâmbio de quantificadores
- Resolução
  - Substituição
  - Unificação
  - Skolemização (eliminação de quantificadores existenciais)

**Exemplo 3**: prove o argumento
$\neg F(a) \vee \exists x(F(x)), \exists x(F(x)) \rightarrow P \vdash F(a) \rightarrow P$.
Solução:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg F(a) \vee \exists x(F(x))$ | premissa | |
| (2) | $\exists x(F(x)) \rightarrow P$ | premissa | |
| (3) | $F(a)$ | hipótese (prova condicional) | |
| (4) | $\neg(\neg F(a))$ | dupla negação | 3 |
| (5) | $\exists x(F(x))$ | silogismo disjuntivo | 1, 4 |
| (6) | $P$ | *modus ponens* | 2, 5 |
| (7) | $F(a) \rightarrow P$ | eliminação da hipótese | 3, 7 |

# Regras de inferência para o quantificador universal

**Eliminação universal (EU)**: de uma *WFF* quantificada universalmente, isto é, $\forall x(P(x))$, podemos inferir uma *wff* da forma $P(a)$, substituindo cada ocorrência da variável $x$ pela constante $a$.

**Exemplo 4**: prove a validade do argumento seguinte.
Todos os homens são mortais.
Sócrates é um homem.
Portanto, Sócrates é mortal.
Solução:
Escrevendo o argumento na linguagem da lógica de predicados, temos:

$$\forall x(H(x) \to M(x)), H(s) \vdash M(s) \tag{1}$$

A validade desse argumento é demonstrada de acordo com a seguinte prova:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\forall x(H(x) \to M(x))$ | premissa | |
| (2) | $H(s)$ | premissa | |
| (3) | $H(s) \to M(s)$ | eliminação universal | 1 |
| (4) | $M(s)$ | *modus ponens* | 2, 3 |

# Regras de inferência para o quantificador universal

**Introdução existencial (IE)**: dada uma *WFF* contendo uma constante $a$, por exemplo, $P(a)$, podemos inferir uma *wff* da forma $\exists x(P(x))$, substituindo as ocorrências de $a$, por uma variável $x$ que não ocorra na fórmula.

**Exemplo 6**: demonstre a validade do argumento seguinte.

$$\forall x(F(x) \vee G(x)) \vdash \exists x(F(x) \vee G(x)) \tag{2}$$

Solução: A validade desse argumento é demonstrada de acordo com a seguinte prova.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\forall x(F(x) \vee G(x))$ | premissa | |
| (2) | $F(a) \vee G(a)$ | eliminação universal | 1 |
| (3) | $\exists x(F(x) \vee G(x))$ | introdução existencial | 2 |

# Negação de sentenças quantificadas

Considere uma sentença aberta ou predicado $P(x)$ e o conjunto universo da variável $x$ definido por $U = \{a, b, c, d, \ldots\}$. Então, se $P(x)$ é verdadeira, significa que é válida a seguinte equivalência:

$$\forall x(P(x)) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge P(d) \wedge \ldots \tag{3}$$

Assim, sua negação é dada por:

$$\neg(\forall x(P(x))) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge P(d) \wedge \ldots) \tag{4}$$

Mas, pela Lei de De Morgan temos que:

$$\neg(\forall x(P(x))) \equiv (\neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c) \vee \neg P(d) \vee \ldots) \tag{5}$$

Isso resulta em:

$$(\neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c) \vee \neg P(d) \vee \ldots) \equiv \exists x(\neg P(x)) \tag{6}$$

Dessa forma, temos a seguinte regra:

$$\neg(\forall x(P(x))) \equiv \exists x(\neg P(x)) \tag{7}$$

# Negação de sentenças quantificadas

Vejamos agora o que acontece no caso inverso. Supondo que $P(x)$ é verdade, então, também é válida a seguinte equivalência:

$$\exists x(P(x)) \equiv P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee P(d) \vee \ldots \tag{8}$$

Sua negação é dada por:

$$\neg(\exists x(P(x))) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee P(d) \vee \ldots) \tag{9}$$

Mas novamente pela Lei de De Morgan, temos que:

$$\neg(\exists x(P(x))) \equiv (\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c) \wedge \neg P(d) \wedge \ldots) \tag{10}$$

Isso resulta em:

$$(\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c) \wedge \neg P(d) \wedge \ldots) \equiv \forall x(\neg P(x)) \tag{11}$$

Sendo assim, temos uma segunda regra:

$$\neg(\exists x(P(x))) \equiv \forall x(\neg P(x)) \tag{12}$$

**Exemplo 7**: negar a senteça *existem pessoas que não gostam de estudar*.
Solução:
Escrevendo na linguagem da lógica de predicados, temos:
$\exists$: existem
$x$: pessoas
$P(x)$: gostam de estudar

Portanto, a sentença que queremos negar é $\exists x(\neg P(x))$. Utilizando as regras da negação teremos que $\neg\exists x(\neg P(x)) \equiv \forall x(P(x))$, o que corresponde à *todas as pessoas gostam de estudar*, que é equivalente à sentença *não há quem não goste de estudar*.

**Exemplo 8**: negar a senteça *todos os pescadores são mentirosos*.

Solução:
$\forall$: todos
$x$: pescadores (nosso domínio são os pescadores)
$P(x)$: pescadores são mentirosos
Utilizando as regras da negação teremos que
$\neg\forall x(P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$, o que corresponde à *existe pescador que não é mentiroso*.

Veremos agora uma aplicação prática do que foi apresentado nesta unidade: implementação em linguagem Prolog do caso de West, um conhecido problema de inferência na lógica de predicados.

Prolog é uma linguagem de programação baseada no paradigma lógico muito utilizada em Inteligência Artificial.

Interpretador SWI-Prolog é um software livre disponível em:
`http://www.swi-prolog.org/download/stable`

Devemos armazenar fatos como cláusulas de Horn. Por exemplo, a expressão:

$$(p \wedge q \wedge \ldots \wedge t) \rightarrow u \tag{13}$$

em Prolog deve ser escrita como:

$$u \text{ :- } p, q, ..., t \tag{14}$$