# Fundamentos de Lógica Matemática

## Webconferência 4 - 08/03/2012
## Técnicas dedutivas


Prof. Alexandre L. M. Levada
http://www.dc.ufscar.br/~alexandre

Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)


2012/1

# Objetivos

- Maneiras de provar a validade de argumentos
- Principal problema
  - Existe mais de uma maneira de provar que um argumento é válido?
- Quais?
  - Prova direta (procedimento apresentado na unidade 5)
  - Prova condicional (para conclusões condicionais)
  - Prova por redução ao absurdo

# Prova Direta

**Definição 6.1**: considere que $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ e $Q$ são fórmulas válidas da lógica proposicional. Dizemos que uma *dedução* (ou prova) de $Q$ a partir de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ (consideradas aqui como premissas) é uma sequência finita de proposições $C_1, C_2, \ldots, C_k$ se e somente se $C_k \equiv Q$ (a última proposição derivada é $Q$) e:

- cada $C_i$ diferente de $C_k \equiv Q$ for uma premissa $P_j$, $1 \leq j \leq n$ ou
- cada $C_i$ que não é uma premissa for derivada das fórmulas anteriores pela utilização de uma regra de inferência ou
- cada $C_i$ que não é uma premissa for obtida pela substituição de um fórmula anterior por outra logicamente equivalente.

Dizemos, então, que $Q$ é dedutível a partir de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, ou ainda que $Q$ é um teorema e a sequência $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$ é sua demonstração. Em outras palavras, a proposição $Q$ é um teorema se é uma consequência lógica de um conjunto de premissas, ou em outras palavras, $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash Q$ é um argumento válido.

**Exemplo 2**: provar $r \vee \neg s$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & s \wedge q \\ (2) & t \rightarrow \neg q \\ (3) & \neg t \rightarrow r \end{array}$$

Solução: Para demonstrar $r \vee \neg s$ a partir do conjunto de premissas, temos que mostrar a validade do argumento $s \wedge q, t \rightarrow \neg q, \neg t \rightarrow r \vdash r \vee \neg s$. Isso é feito através da seguinte dedução:

# Prova direta

**Exemplo 2**: provar $r \vee \neg s$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{lc} (1) & s \wedge q \\ (2) & t \rightarrow \neg q \\ (3) & \neg t \rightarrow r \end{array}$$

Solução: Para demonstrar $r \vee \neg s$ a partir do conjunto de premissas, temos que mostrar a validade do argumento $s \wedge q, t \rightarrow \neg q, \neg t \rightarrow r \vdash r \vee \neg s$. Isso é feito através da seguinte dedução:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $s \wedge q$ | premissa | |
| (2) | $t \rightarrow \neg q$ | premissa | |
| (3) | $\neg t \rightarrow r$ | premissa | |
| (4) | $q$ | simplificação | 1 |
| (5) | $\neg(\neg q)$ | dupla negação | 4 |
| (6) | $\neg t$ | *modus tollens* | 2, 5 |
| (7) | $r$ | *modus ponens* | 3, 6 |
| (8) | $r \vee \neg s$ | adição | 7 |

**Exemplo 4**: provar $a$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & \neg a \rightarrow c \\ (2) & c \rightarrow \neg m \\ (3) & m \vee r \\ (4) & \neg r \end{array}$$

Solução: Para demonstrar $a$ a partir do conjunto de premissas, basta mostrar a validade do argumento $\neg a \rightarrow c, c \rightarrow \neg m, m \vee r, \neg r \vdash a$. Isso pode ser feito através da seguinte dedução:

**Exemplo 4**: provar $a$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & \neg a \rightarrow c \\ (2) & c \rightarrow \neg m \\ (3) & m \vee r \\ (4) & \neg r \end{array}$$

Solução: Para demonstrar $a$ a partir do conjunto de premissas, basta mostrar a validade do argumento $\neg a \rightarrow c, c \rightarrow \neg m, m \vee r, \neg r \vdash a$. Isso pode ser feito através da seguinte dedução:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg a \rightarrow c$ | premissa | |
| (2) | $c \rightarrow \neg m$ | premissa | |
| (3) | $m \vee r$ | premissa | |
| (4) | $\neg r$ | premissa | |
| (5) | $m$ | silogismo disjuntivo | $3, 4$ |
| (6) | $\neg(\neg m)$ | dupla negação | $5$ |
| (7) | $\neg c$ | *modus tollens* | $2, 6$ |
| (8) | $\neg(\neg a)$ | *modus tollens* | $1, 6$ |
| (9) | $a$ | dupla negação | $8$ |

# Prova direta

**Exemplo 5**: prove a validade do argumento seguinte.
Gabriel estuda ou não está cansado.
Se Gabriel estuda, então dorme tarde.
Gabriel não dorme tarde ou está cansado.
Portanto, Gabriel está cansado se e somente se estuda.

# Prova direta

**Exemplo 5**: prove a validade do argumento seguinte.
Gabriel estuda ou não está cansado.
Se Gabriel estuda, então dorme tarde.
Gabriel não dorme tarde ou está cansado.
Portanto, Gabriel está cansado se e somente se estuda.

Solução: Reescrevendo as sentenças na linguagem da lógica proposicional, temos:

p: Gabriel estuda
q: Gabriel está cansado
r: Gabriel dorme tarde

Assim, o problema consiste em provar $p \leftrightarrow q$ a partir das premissas:

$$\begin{array}{lc} (1) & p \vee \neg q \\ (2) & p \rightarrow r \\ (3) & \neg r \vee q \end{array}$$

**Exemplo 5**: prove a validade do argumento seguinte.
Gabriel estuda ou não está cansado.
Se Gabriel estuda, então dorme tarde.
Gabriel não dorme tarde ou está cansado.
Portanto, Gabriel está cansado se e somente se estuda.

Solução: Reescrevendo as sentenças na linguagem da lógica proposicional, temos:

p: Gabriel estuda
q: Gabriel está cansado
r: Gabriel dorme tarde

Assim, o problema consiste em provar $p \leftrightarrow q$ a partir das premissas:

$$\begin{array}{cc} (1) & p \lor \neg q \\ (2) & p \rightarrow r \\ (3) & \neg r \lor q \end{array}$$

Para isso, basta mostrar que o argumento $p \lor \neg q, p \rightarrow r, \neg r \lor q \vdash p \leftrightarrow q$ é válido, conforme indica a dedução a seguir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $p \lor \neg q$ | premissa | |
| (2) | $p \rightarrow r$ | premissa | |
| (3) | $\neg r \lor q$ | premissa | |
| (4) | $q \rightarrow p$ | equivalência lógica | 1 |
| (5) | $r \rightarrow q$ | equivalência lógica | 3 |
| (6) | $p \rightarrow q$ | silogismo hipotético | 2, 5 |
| (7) | $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$ | conjunção | 4, 6 |
| (8) | $p \leftrightarrow q$ | introdução da equivalência | 7 |

# Prova direta

**Exemplo 6**: provar $r$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{lc} (1) & p \vee (q \wedge r) \\ (2) & p \rightarrow s \\ (3) & s \rightarrow r \end{array}$$

# Prova direta

**Exemplo 6**: provar $r$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{cc} (1) & p \vee (q \wedge r) \\ (2) & p \rightarrow s \\ (3) & s \rightarrow r \end{array}$$

Solução: Para demonstrar $r$ a partir do conjunto de premissas, devemos verificar a validade do argumento $p \vee (q \wedge r), p \rightarrow s, s \rightarrow r \vdash r$. Neste caso, utilizamos algumas identidades da álgebra proposicional (ao invés da regra de casos).

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa | |
| (2) | $p \rightarrow s$ | premissa | |
| (3) | $s \rightarrow r$ | premissa | |
| (4) | $p \rightarrow r$ | silogismo hipotético | 2, 3 |
| (5) | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | distributiva | 1 |
| (6) | $p \vee r$ | simplificação | 5 |
| (7) | $r \vee p$ | comutativa | 6 |
| (8) | $\neg(\neg r) \vee p$ | dupla negação | 7 |
| (9) | $\neg r \rightarrow p$ | equivalência lógica | 8 |
| (10) | $\neg r \rightarrow r$ | silogismo hipotético | 4, 9 |
| (11) | $\neg(\neg r) \vee r$ | equivalência lógica | 10 |
| (12) | $r \vee r$ | dupla negação | 11 |
| (13) | $r$ | identidade | 12 |

# Inconsistência

- Denomina-se conjunto inconsistente de proposições todo conjunto de duas ou mais proposições que não podem ser simultaneamente verdadeiras.
- No caso de um argumento, ele é inconsistente se as suas premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras.
- Ao construir a tabela-verdade dessas proposições, não existe sequer uma linha na qual as proposições assumam valor lógico $V$ ao mesmo tempo.

Consideremos as proposições $\neg(p \vee \neg q), p \vee \neg r, q \rightarrow r$

| | | | | | | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q$ | $\neg r$ | $(p \vee \neg q)$ | $\neg(p \vee \neg q)$ | $(p \vee \neg r)$ | $q \rightarrow r$ |
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |

# Inconsistência

Outra maneira de demonstrar que um conjunto de proposições é inconsistente é através das regras de inferência. Se a partir do conjunto de proposições for possível deduzir uma contradição qualquer, como por exemplo, $p \wedge \neg p$, elas são inconsistentes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg(p \vee \neg q)$ | premissa | |
| (2) | $p \vee \neg r$ | premissa | |
| (3) | $q \rightarrow r$ | premissa | |
| (4) | $\neg p \wedge \neg(\neg q)$ | De Morgan | 1 |
| (5) | $\neg p \wedge q$ | dupla negação | 4 |
| (6) | $q$ | simplificação | 5 |
| (7) | $r$ | *modus ponens* | $3, 6$ |
| (8) | $\neg p$ | simplificação | 5 |
| (9) | $\neg r$ | silogismo disjuntivo | $2, 8$ |
| (10) | $r \wedge \neg r$ | conjunção | $7, 9$ |

# Inconsistência

**Exemplo 8**: demonstrar, via regras de inferência, que o conjunto de proposições abaixo é inconsistente.

$$\neg p \vee \neg q, p \wedge s, \neg s \vee r, r \rightarrow (r \wedge q) \tag{1}$$

# Inconsistência

**Exemplo 8**: demonstrar, via regras de inferência, que o conjunto de proposições abaixo é inconsistente.

$$\neg p \vee \neg q, p \wedge s, \neg s \vee r, r \rightarrow (r \wedge q) \tag{1}$$

Solução: Do conjunto dado podemos deduzir a contradição $q \wedge \neg q$, conforme ilustra a derivação a seguir. Portanto, o conjunto de proposições é inconsistente.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg p \vee \neg q$ | premissa | |
| (2) | $p \wedge s$ | premissa | |
| (3) | $\neg s \vee r$ | premissa | |
| (4) | $r \rightarrow (r \wedge q)$ | premissa | |
| (5) | $p$ | simplificação | 2 |
| (6) | $s$ | simplificação | 2 |
| (7) | $\neg q$ | silogismo disjuntivo | 1, 5 |
| (8) | $r$ | silogismo disjuntivo | 3, 6 |
| (9) | $r \wedge q$ | *modus ponens* | 4, 8 |
| (10) | $q$ | simplificação | 9 |
| (11) | $q \wedge \neg q$ | conjunção | 7, 10 |

# Prova condicional

- Suponha que se deseje provar $p \rightarrow q$ dadas as premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Como já vimos anteriormente, esse problema consiste em mostrar que é válido o argumento $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash p \rightarrow q$.
- Veremos agora que uma maneira de **provar uma condicional é colocar seu antecedente como hipótese e inferir logicamente seu consequente**. Tal resultado é formalizado pelo teorema da dedução.
- Para entender esse resultado, utilizaremos a definição de consequência e equivalência lógicas, de acordo com a definição encontrada em Daghlian (2009).

# Prova condicional

Partindo da tautologia $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (p \rightarrow q)$ e aplicando a equivalência da condicional, temos que:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (p \rightarrow q)$$

Eliminando a condicional interna através da mesma equivalência, temos:

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (p \rightarrow q) \equiv \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (\neg p \vee q)$$

Através da propriedade associativa da álgebra proposicional segue que:

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee (\neg p \vee q) \equiv (\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee \neg p) \vee q$$

# Prova condicional

Aplicando a Lei de De Morgan temos:

$$(\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee \neg p) \vee q \equiv \neg((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p) \vee q$$

Por fim, utilizando novamente a equivalência da condicional, chega-se à:

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p) \rightarrow q$$

Isso demonstra que, se $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (p \rightarrow q)$ for uma tautologia, $((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p) \rightarrow q$, também será. Portanto, $q$ é dedutível das premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p$.

A essência da prova condicional é a seguinte: **para provar uma conclusão que tem a forma condicional, como, por exemplo $p \rightarrow q$, a partir de um conjunto de premissas, devemos introduzir o antecedente $p$ como premissa provisória (ou hipótese), deduzir $q$ utilizando $p$ se necessário e, no final, descartar $p$, significando que a hipótese não é mais necessariamente verdade, construindo $p \rightarrow q$.**

**Teorema da dedução**: sejam $p$ e $q$ duas fórmulas bem-formadas (proposições válidas) e $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ um conjunto de premissas. Então, as proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p$ implicam logicamente $q$ se e somente se as proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ implicarem logicamente $p \rightarrow q$, ou seja:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p \models q \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \models p \rightarrow q$$

# Prova condicional

**Exemplo 9**: provar $p \rightarrow r$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & p \rightarrow q \\ (2) & q \rightarrow r \end{array}$$

**Exemplo 9**: provar $p \rightarrow r$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & p \rightarrow q \\ (2) & q \rightarrow r \end{array}$$

Solução: Como a conclusão a ser deduzida é da forma condicional, devemos invocar o resultado do teorema da dedução e incluir o antecedente $p$ como hipótese (premissa provisória). Note que a solução para esse exemplo consiste em mostrar a validade da regra silogismo hipotético.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $p \rightarrow q$ | premissa. | |
| (2) | $q \rightarrow r$ | premissa | |
| (3) | $p$ | hipótese | |
| (5) | $q$ | *modus ponens* | 1, 3 |
| (6) | $r$ | *modus ponens* | 2, 5 |
| (7) | $p \rightarrow r$ | eliminação da hipótese | 3, 6 |

# Prova condicional

**Exemplo 10**: mostrar que o argumento $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$ é válido.

Solução: Esse exemplo mostra um caso em que temos uma única premissa e a conclusão a ser deduzida é uma condicional que tem como consequente outra condicional. O antecedente da condicional mais externa, $p$, é assumido como hipótese. Porém, como o consequente dessa condicional é uma outra condicional, o antecedente dessa condicional mais interna também pode ser assumido como uma nova hipótese, fazendo com que tenhamos duas premissas provisórias, conforme indica a derivação a seguir.

# Prova condicional

**Exemplo 10**: mostrar que o argumento $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$ é válido.

Solução: Esse exemplo mostra um caso em que temos uma única premissa e a conclusão a ser deduzida é uma condicional que tem como consequente outra condicional. O antecedente da condicional mais externa, $p$, é assumido como hipótese. Porém, como o consequente dessa condicional é uma outra condicional, o antecedente dessa condicional mais interna também pode ser assumido como uma nova hipótese, fazendo com que tenhamos duas premissas provisórias, conforme indica a derivação a seguir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $(p \wedge q) \rightarrow r$ | premissa | |
| (2) | $p$ | hipótese | |
| (3) | $q$ | hipótese | |
| (4) | $p \wedge q$ | conjunção | $2, 3$ |
| (5) | $r$ | *modus ponens* | $1, 4$ |
| (6) | $q \rightarrow r$ | eliminação da hipótese | $3, 5$ |
| (7) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | eliminação da hipótese | $2, 6$ |

**Exemplo 12**: provar $a \to b$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{ll} (1) & (a \vee j) \to g \\ (2) & j \to (\neg g \wedge \neg h) \\ (3) & j \vee b \end{array}$$

# Prova condicional

**Exemplo 12**: provar $a \rightarrow b$, dadas as premissas,

$$\begin{array}{cc} (1) & (a \vee j) \rightarrow g \\ (2) & j \rightarrow (\neg g \wedge \neg h) \\ (3) & j \vee b \end{array}$$

Solução: Outro caso em que devemos utilizar o resultado do teorema da dedução, pois a conclusão é da forma condicional.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $(a \vee j) \rightarrow g$ | premissa | |
| (2) | $j \rightarrow (\neg g \wedge \neg h)$ | premissa | |
| (3) | $j \vee b$ | premissa | |
| (4) | $a$ | hipótese | |
| (5) | $a \vee j$ | adição | 4 |
| (6) | $g$ | *modus ponens* | 1, 5 |
| (7) | $j \rightarrow \neg(g \vee h)$ | De Morgan | 2 |
| (8) | $g \vee h$ | adição | 6 |
| (9) | $\neg(\neg(g \vee h))$ | dupla negação | 8 |
| (10) | $\neg j$ | *modus tollens* | 7, 9 |
| (11) | $b$ | silogismo disjuntivo | 3, 10 |
| (12) | $a \rightarrow b$ | eliminação da hipótese | 4, 11 |

# Prova condicional

**Exemplo 13**: suponha que um corredor machucou seu tornozelo uma semana antes de uma grande corrida e a sua intenção seja persuadí-lo a parar de correr por alguns dias, a fim de que seu tornozelo sare. Você pode alertá-lo fazendo a seguinte afirmação condicional: *se você continuar a correr, não estará apto a disputar a corrida*. A resposta do corredor eventualmente pode ser: *Prove isso!* Para fazer isso, você pode elaborar seu argumento com base em três suposições:

a. seu tornozelo está muito inchado;

b. se seu tornozelo está muito inchado e você continuar a correr, então, seu tornozelo não irá sarar em uma semana;

c. se seu tornozelo não sarar em uma semana, então, você não estará apto a disputar a corrida.

Assim, você pode provar a afirmação *se você continuar a correr, então você não estará apto a disputar a corrida* utilizando o resultado do teorema da dedução, adicionando como hipótese o antecendente da conclusão.

# Prova condicional

É fato que a correção do argumento depende da veracidade das suposições (premissas). Na vida real, a veracidade delas pode ser duvidosa. Entretanto, **o ponto importante aqui é que a correção do argumento não depende da veracidade da hipótese**. Considerando as premissas (sentenças de a a c) e independentemente do corredor continuar a correr ou não (hipótese), deve ser verdade que se ele continuar correndo, não estará apto a disputar a corrida. A hipótese é adicionada somente para mostrar que, dadas as suposições, ela implica a conclusão. Uma vez provado isso, a hipótese é descartada e a expressão condicional que representa a conclusão é estabelecida somente com base nas premissas (suposições). Escrevendo na linguagem da lógica proposicional, temos:

p: seu tornozelo está muito inchado
q: você continua a correr
r: seu tornozelo irá sarar em uma semana
s: você está apto a disputar a corrida

# Prova condicional

Isso permite formalizar o seguinte argumento:

$$p, (p \wedge q) \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow \neg s \vdash q \rightarrow \neg s \tag{2}$$

Utilizando a prova condicional, podemos inferir logicamente a conclusão desejada, provando a afirmação, o que demonstra a validade do argumento.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $p$ | premissa | |
| (2) | $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$ | premissa | |
| (3) | $\neg r \rightarrow \neg s$ | premissa | |
| (4) | $q$ | hipótese | |
| (5) | $p \wedge q$ | conjunção | $1, 4$ |
| (6) | $\neg r$ | *modus ponens* | $2, 5$ |
| (7) | $\neg s$ | *modus ponens* | $3, 6$ |
| (8) | $q \rightarrow \neg s$ | eliminação da hipótese | $4, 7$ |

# Prova por redução ao absurdo (ou prova indireta)

Suponha que se deseja provar $q$ dadas as premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Para isso, basta mostrar que o argumento $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n \vdash q$ é válido, isto é, $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma tautologia. Considerando que o argumento seja válido (q é dedutível das premissas) e utilizando as leis de idempotência, dupla negação e equivalência da condicional, temos:

$$q \equiv q \vee q \equiv \neg(\neg q) \vee q \equiv \neg q \rightarrow q \tag{3}$$

Dessa forma, então, a proposição a seguir também é uma tautologia:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (\neg q \rightarrow q) \tag{4}$$

Pelo teorema da dedução, temos que a inclusão do antecedente da conclusão $\neg q$ como hipótese permite deduzir $q$, ou seja, $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n, \neg q \vdash q$ também é um argumento válido, o que implica dizer que $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow q$ também é uma tautologia.

# Resumo da prova por redução ao absurdo

Portanto, se introduzirmos a negação da conclusão $\neg q$ no conjunto de premissas, ainda conseguimos deduzir a conclusão $q$, gerando assim uma contradição $q \wedge \neg q$. Em resumo, para aplicar a prova por redução ao absurdo, devemos introduzir a negação da conclusão como premissa provisória e deduzir uma contradição. Ao chegar na contradição, provamos a validade do argumento.

OBS: Podemos encontrar uma contradição que não envolve a mesma proposição da premissa provisória. Em outras palavras, a contradição procurada pode ou não envolver a proposição $q$. Pode ser qualquer contradição!

**Exemplo 16**: provar $\neg p$ por redução ao absurdo, dadas as premissas,

$$\begin{array}{cc} (1) & \neg q \vee r \\ (2) & p \rightarrow \neg r \\ (3) & q \end{array}$$

Solução:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg q \vee r$ | premissa | |
| (2) | $p \rightarrow \neg r$ | premissa | |
| (3) | $q$ | premissa | |
| (4) | $p$ | premissa provisória | |
| (5) | $\neg r$ | *modus ponens* | $2, 4$ |
| (6) | $\neg q$ | silogismo disjuntivo | $1, 5$ |
| (7) | $q \wedge (\neg q)$ | conjunção | $3, 6$ |
| (8) | $\neg p$ | redução ao absurdo | $4, 7$ |

**Exemplo 17**: verifique, utilizando redução ao absurdo, a validade do argumento $p \leftrightarrow \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$.

*Solução*: Ao inserir a negação da conclusão como premissa provisória temos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $p \leftrightarrow \neg q$ | premissa | |
| (2) | $p \wedge q$ | premissa provisória | |
| (3) | $p$ | simplificação | 2 |
| (4) | $q$ | simplificação | 2 |
| (5) | $(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$ | equivalência da bicondicional | 1 |
| (6) | $(p \rightarrow \neg q)$ | simplificação | 5 |
| (7) | $\neg q$ | *modus ponens* | $3, 6$ |
| (8) | $q \wedge \neg q$ | conjunção | $4, 7$ |
| (9) | $\neg(p \wedge q)$ | redução ao absurdo | $2, 8$ |

**Exemplo 18**: verifique, utilizando redução ao absurdo, a validade do argumento $\neg p \vee q, \neg q, \neg r \to s, \neg p \to (s \to \neg t) \vdash t \to r$.

Solução: Queremos provar por redução ao absurdo uma conclusão na forma condicional. O primeiro passo consiste em aplicar o teorema da dedução para obter:

$$\neg p \vee q, \neg q, \neg r \to s, \neg p \to (s \to \neg t), t \vdash r \quad (5)$$

Agora, introduzindo a negação da conclusão como premissa provisória, temos a seguinte dedução (note que agora adicionamos duas novas premissas):

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg p \vee q$ | premisssa | |
| (2) | $\neg q$ | premissa | |
| (3) | $\neg r \to s$ | premissa | |
| (4) | $\neg p \to (s \to \neg t)$ | premissa | |
| (5) | $t$ | hipótese | |
| (6) | $\neg r$ | premissa provisória | |
| (7) | $\neg p$ | silogismo disjuntivo | $1, 2$ |
| (8) | $s \to \neg t$ | *modus ponens* | $4, 7$ |
| (9) | $s$ | *modus ponens* | $3, 6$ |
| (10) | $\neg t$ | *modus ponens* | $8, 9$ |
| (11) | $t \wedge \neg t$ | conjunção | $5, 10$ |
| (12) | $r$ | redução ao absurdo | $6, 11$ |
| (13) | $t \to r$ | eliminação da hipótese | $5, 12$ |