Fundamentos de Lógica Matemática

Webconferência 3 - 01/03/2012
Inferência Lógica

Prof. Alexandre L. M. Levada
http://www.dc.ufscar.br/~alexandre

Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

2012/1

Objetivos

- Análise formal de mecanismos de dedução de conhecimento
- Principal problema
  - Verificar validade de uma conclusão lógica
- Como?
  - Conceito fundamental: Consequência lógica
  - Definição de regras de inferência básicas
  - Verificação da validade de argumentos

OBS: Dentro deste contexto, nas próximas unidades, veremos a relação entre Formas Normais e o processo de inferência lógica, através do conceito de prova por resolução.

Dizemos que um argumento é válido se a conclusão é uma consequência lógica das premissas.

Definição 5.1: um *argumento* é uma sequência $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ de proposições, com $n \geq 1$, na qual as $n - 1$ primeiras proposições P_i são chamadas de premissas e a última proposição, P_n, é chamada de conclusão. Denota-se um argumento por:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \tag{1}$$

Um argumento $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n$ é dito válido se e somente se $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1} \models P_n$, ou seja, se e somente se P_n é uma consequência lógica de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$, o que acontece se $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$ for uma tautologia.

Verificando a validade de argumentos

- Via tabelas-verdade (inviável para maioria dos casos)
- Derivação formal por regras de inferência
  - Regras de raciocínio
  - Argumentos válidos notáveis
  - Operações básicas para realização de inferências lógicas
  - Consideraremos uma tabela fixa de regras de inferência
  - O processo de derivação nada mais é que a definição de uma lista de proposições lógicas
  - Inicialmente, lista encontra-se vazia. Primeiramente, incluímos as premissas (fatos conhecidos).
  - Novas proposições obtidas através da aplicação das regras de inferência são inseridas até que a conclusão seja obtida.

Regras de inferência

Regra de inferência	Nome da regra
$p, p \rightarrow q \models q$	*modus ponens* (MP)
$\neg q, p \rightarrow q \models \neg p$	*modus tollens* (MT)
$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$	silogismo hipotético (SH ou regra da cadeia)
$p \vee q, \neg p \models q$ $p \vee q, \neg q \models p$	silogismo disjuntivo (SD) silogismo disjuntivo (variante)
$p \wedge q \models p$ $p \wedge q \models q$	simplificação (S) simplificação (variante)
$p, q \models p \wedge q$	conjunção (C)
$p \rightarrow q \models p \rightarrow (p \wedge q)$	absorção (ABS)
$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \models q$	de casos (*)
$p \models p \vee q$ $q \models p \vee q$	adição (AD) adição (variante)
$p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \models q \vee s$	dilema construtivo (DC)
$p \rightarrow q, r \rightarrow s, \neg q \vee \neg s \models \neg p \vee \neg r$	dilema destrutivo (DD)
$p \rightarrow q \models \neg q \rightarrow \neg p$	contraposição (CP)
$p, \neg p \models q$	inconsistência (I)
$p \rightarrow q, q \rightarrow p \models p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência (IE)
$p \leftrightarrow q \models p \rightarrow q$ $p \leftrightarrow q \models q \rightarrow p$	eliminação da equivalência (EE) eliminação da equivalência (variante)

Aplicando regras de inferência

Utilize cada uma das regras de inferência citadas para concluir adequadamente cada um dos seguintes conjuntos de premissas:

a) modus ponens
P1: $(x > y \wedge y > z) \rightarrow x > z$
P2: $x > y \wedge y > z$
C: $x > z$ $\Leftarrow$ MP em P1 e P2

b) modus tollens
P1: $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s)$
P2: $\neg(\neg(r \wedge s))$
C: $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ $\Leftarrow$ MT em P1 e P2

c) silogismo disjuntivo
P1: $(s \rightarrow p) \vee (r \wedge t)$
P2: $\neg(r \wedge t)$
C: $(s \rightarrow p) \equiv (\neg s \vee p)$ $\Leftarrow$ SD em P1 e P2

d) silogismo hipotético
P1: $(s \vee t) \rightarrow (r \wedge q)$
P2: $(r \wedge q) \rightarrow \neg p$
C: $(s \vee t) \rightarrow \neg p$ $\Leftarrow$ SH em P1 e P2

e) dilema construtivo
P1: $p \rightarrow r$
P2: $\neg q \rightarrow \neg s$
P3: $p \vee \neg q$
C: $(r \vee \neg s)$ $\Leftarrow$ DC em P1, P2 e P3

f) dilema destrutivo
P1: $p \rightarrow (\neg r \wedge q)$
P2: $\neg(\neg r \wedge q) \vee \neg s$
P3: $\neg q \rightarrow s$
C: $(\neg p \vee \neg\neg q) \equiv (\neg p \vee q)$ $\Leftarrow$ DD em P1, P3 e P2

As tabelas-verdade são ferramentas poderosas na verificação da validade de argumentos. Suponha que se deseja testar a validade do seguinte argumento:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash q \tag{2}$$

Uma maneira de resolver este problema consiste em verficar se q é consequência lógica das premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Para isso, basta verificar se a forma condicional do argumento $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma tautologia. Esse problema foi objeto de estudo da unidade 3 do nosso curso (consequência e equivalência lógicas).

Argumentos na forma condicional

1) Escrever cada um dos argumentos válidos a seguir na forma condicional:

a) $\neg p, \neg q \rightarrow p \models q$

Solução: sabemos que se argumento acima é válido, então, q é consequência lógica das premissas, ou seja, escrevendo na forma condicional, temos a tautologia: $(\neg p \wedge (\neg q \rightarrow p)) \rightarrow q$

b) $p \rightarrow q \models \neg(p \wedge \neg q)$

Solução: escrevendo na forma condicional temos a seguinte proposição tautológica: $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

c) $p, p \rightarrow q, \neg q \vee (r \wedge s) \models (r \wedge s)$

Solução: reescrevendo o argumento válido na forma condicional, temos a tautologia: $(p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee (r \wedge s))) \rightarrow (r \wedge s)$

Exemplo 3: verificar mediante tabela-verdade a validade do argumento seguinte.

Se Carlos está com fome, então, ele come.
Carlos dorme ou não come.
Carlos está acordado.
Portanto, Carlos não está com fome.

Observação: dormir é equivalente a não estar acordado.

Solução: O primeiro passo consiste na representação do argumento acima na forma simbólica, em termos de proposições simples. Chamando as proposições simples *Carlos está com fome*, *Carlos come* e *Carlos está acordado* de p, q e r, respectivamente, o argumento pode ser escrito na linguagem da lógica proposicional como:

$$p \rightarrow q, \neg r \vee \neg q, r \vdash \neg p \tag{3}$$

Verificação mediante tabela-verdade - Exemplo

Assim, para verificar se o argumento é válido, basta checar se sua forma condicional é uma tautologia (ou seja, verificar se a conclusão é consequência lógica das premissas). A forma condicional do argumento é dada por:

$$P = (((p \to q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r) \to \neg p) \tag{4}$$

A tabela-verdade para a proposição resultante é mostrada a seguir.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$(p \to q)$	$(\neg r \vee \neg q)$	$(p \to q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r$	P
V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F	V

Como a forma condicional do argumento é tautológica, ou seja, $\neg p$ é consequência lógica das premissas, o argumento em questão é válido.

Validade de argumentos mediante regras de inferência

- Apesar de funcional, o método baseado em tabelas-verdade torna-se cada vez mais ineficiente e trabalhoso à medida que o número de proposições simples aumenta.
- Uma maneira mais eficiente de verificar a validade de argumentos é mediante o uso de regras de inferência.
- A ideia consiste em concluir logicamente a partir das premissas, utilizando as regras descritas anteriormente.

Exemplo 4: verificar mediante regras de inferência a validade do argumento $p \to q, p \wedge r \vdash q$.

Solução: A sequência de regras de inferência aplicadas para a resolução do problema é mostrada na tabela abaixo. Primeiramente, apenas copiamos as premissas do argumento no início da sequência. A seguir, por sucessivas aplicações das regras de inferência nas proposições já existentes, chega-se à conclusão, o que verifica a validade do argumento.

(1)	$p \to q$	premissa	
(2)	$p \wedge r$	premissa	
(3)	p	simplificação	2
(4)	q	*modus ponens*	$1, 3$

Exemplo 5: verificar mediante regras de inferência a validade do argumento $p \rightarrow q, (p \wedge q) \rightarrow r, \neg(p \wedge r) \vdash \neg p$.

Solução: Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa	
(3)	$\neg(p \wedge r)$	premissa	
(4)	$p \rightarrow (p \wedge q)$	absorção	1
(5)	$p \rightarrow r$	silogismo hipotético	2, 4
(6)	$p \rightarrow (p \wedge r)$	absorção	5
(7)	$\neg p$	*modus tollens*	3, 6

Exemplo 6: verificar que o argumento seguinte é válido.

$$(p \vee q) \rightarrow r, (r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), (p \wedge s) \vdash s \leftrightarrow t \tag{5}$$

Solução: Argumento composto por 5 átomos: resulta em tabela-verdade de 32 linhas!

(1)	$(p \vee q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	$(r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))$	premissa	
(3)	$(p \wedge s)$	premissa	
(4)	p	simplificação	1
(5)	$p \vee q$	adição	3, 4
(6)	r	*modus ponens*	1, 5
(7)	$r \vee q$	adição	6
(8)	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	*modus ponens*	2, 7
(9)	$(s \leftrightarrow t)$	*modus ponens*	4, 8

Exemplo 7: verificar que o argumento seguinte é válido.

$$(p \wedge q) \to r, r \to s, t \to \neg u, t, \neg s \vee u \vdash \neg p \vee \neg q \tag{6}$$

Solução: Tabela-verdade teria 64 linhas!

(1)	$(p \wedge q) \to r$	premissa	
(2)	$r \to s$	premissa	
(3)	$t \to \neg u$	premissa	
(4)	t	premissa	
(5)	$\neg s \vee u$	premissa	
(6)	$\neg u$	*modus ponens*	$3, 4$
(7)	$\neg s$	silogismo disjuntivo	$5, 6$
(8)	$\neg r$	*modus tollens*	$2, 7$
(9)	$\neg(p \wedge q)$	*modus tollens*	$1, 8$
(10)	$\neg p \vee \neg q$	De Morgan	9

Exemplo 9: testar a validade do argumento seguinte.

$$(p \to q) \land (r \to s), t \to u, u \to v, \neg(q \land v) \vdash \neg(p \land t) \qquad (7)$$

Solução: Tabela-verdade teria 128 linhas!

(1)	$(p \to q) \land (r \to s)$	premissa	
(2)	$t \to u$	premissa	
(3)	$u \to v$	premissa	
(4)	$\neg(q \land v)$	premissa	
(5)	$t \to v$	silogismo hipotético	2, 3
(6)	$p \to q$	simplificação	1
(7)	$\neg q \lor \neg v$	De Morgan	4
(8)	$\neg p \lor \neg t$	dilema destrutivo	5, 6, 7
(9)	$\neg(p \land t)$	De Morgan	8

Exemplo 9: considere o argumento seguinte.
Se as uvas caem, então, a raposa as come.
Se a raposa as come, então, estão maduras.
As uvas estão verdes ou caem.
Logo, a raposa come as uvas se e somente se as uvas caem.

Identificando as proposições atômicas nas sentenças em linguagem natural escritas neste exemplo, tem-se:
p : as uvas caem
q : a raposa come as uvas
r : as uvas estão maduras

Reescrevendo na linguagem da lógica proposicional, temos o seguinte argumento:

$$p \to q, q \to r, \neg r \vee p \vdash p \leftrightarrow q \tag{8}$$

Validade de argumentos mediante regras de inferência

Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$p \to q$	premissa	
(2)	$q \to r$	premissa	
(3)	$\neg r \vee p$	premissa	
(4)	$r \to p$	equivalência lógica	3
(5)	$q \to p$	silogismo hipotético	2, 4
(6)	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	conjunção	1, 5
(7)	$p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência	6

Conclusões

Esta unidade apresentou o conceito de **argumento válido**, bem como duas abordagens distintas de se verificar a validade de argumentos em geral: a primeira, baseada na **construção de tabelas-verdade**, e a segunda, mais geral e eficiente (pois é viável mesmo quando o número de proposições atômicas cresce), através da **utilização de um conjunto pré-estabelecido de regras de inferência, o que é essencialmente o cálculo proposicional**.

Também vimos como o cálculo proposicional pode ser aplicado em sentenças da linguagem natural, **permitindo a derivação de conclusões várias vezes não intuitivas**. Na próxima unidade será introduzido o conceito de prova formal, que será empregado em conjunto com técnicas dedutivas para a demonstração da validade de argumentos, bem como de teoremas.