Fundamentos de Lógica Matemática

Webconferência 2 - 16/02/2012

Prof. Alexandre L. M. Levada
http://www.dc.ufscar.br/~alexandre

Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

2012/1

Com o intuito de tornar as propriedades da álgebra proposicional mais intuitivas e próximas da aritmética usual, no decorrer desta apresentação utilizaremos a notação da álgebra de Boole, em que os valores lógicos F e V são representados por 0 e 1, respectivamente. Dessa forma, é válida a seguinte equivalência entre operadores lógicos:

Conjunção	$p \wedge q$	$p \cdot q$
Disjunção	$p \vee q$	$p + q$
Negação	$\neg p$	$\bar{p}$

Álgebra Proposicional

- Trata-se de um dos tópicos da lógica mais relevantes para a computação
- Base para o projeto de circuitos digitais
  - Portas lógicas
  - Álgebra de Boole
    - Álgebra dos binários (variáveis assumem apenas valores 0 e 1)
    - Duas operações: soma (disjunção, $+$) e produto (conjunção, $\cdot$)
    - Subconjunto da álgebra proposicional (devido ao menor número de operadores)
  - Apesar de operadores como $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\veebar$, dentre outros, qualquer expressão da lógica proposicional pode ser escrita utilizando apenas os operadores básicos conjunção e disjunção (através de equivalências lógicas)
  - Formas Normais Cojuntiva e Disjuntiva (é essencialmente a representação de qualquer proposição na forma de circuito)

Analogia com Teoria dos Conjuntos

- Operador conjunção $(\cdot)$ representa intersecção
- Operador disjunção $(+)$ representa união
- Valor lógico verdadeiro (1) representa o todo (universo)
- Valor lógico falso (0) representa o vazio

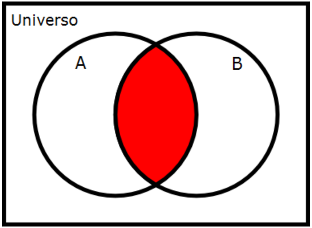
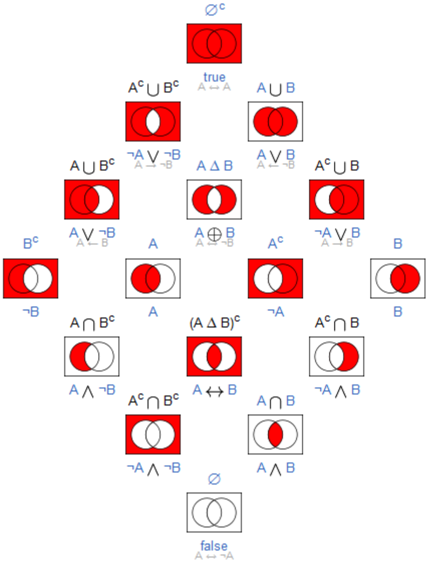


Figura: Diagrama de Venn


∅ᶜ
true
A ↔ A
Aᶜ ∪ Bᶜ
¬A ∨ ¬B
A → ¬B
A ∪ B
A ∨ B
A ← ¬B
A ∪ Bᶜ
A ∨ ¬B
A ← B
A ∆ B
A ⊕ B
A ↔ ¬B
Aᶜ ∪ B
¬A ∨ B
A → B
Bᶜ
¬B
A
A
Aᶜ
¬A
B
B
A ∩ Bᶜ
A ∧ ¬B
(A ∆ B)ᶜ
A ↔ B
Aᶜ ∩ B
¬A ∧ B
Aᶜ ∩ Bᶜ
¬A ∧ ¬B
A ∩ B
A ∧ B
∅
false
A ↔ ¬A

Propriedades Básicas da Álgebra de Boole

Valem para a álgebra proposicional (trocar $\cdot$ por $\wedge$ e $+$ por $\vee$)

$$p \cdot \bar{p} = 0 \qquad p + \bar{p} = 1 \qquad \bar{\bar{p}} = p \qquad p \cdot 1 = p \qquad p + 0 = p$$

$$p \cdot 0 = 0 \qquad p + 1 = 1 \qquad p \cdot p = p \qquad p + p = p$$

$$p \cdot q = q \cdot p, \qquad p + q = q + p$$

$$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r), \qquad (p + q) + r = p + (q + r)$$

$$p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r), \qquad p + (q \cdot r) = (p + q) \cdot (p + r)$$

OBS: Note que diferentemente da álgebra tradicional, a soma também é distributiva!
Lembrar que a distributiva vale nos 2 sentidos (ida e volta)! (*)

Propriedades da Álgebra de Boole

Leis de De Morgan

- Negação de conjunções e disjunções

$$\overline{(p \cdot q)} = \bar{p} + \bar{q} \qquad \overline{(p + q)} = \bar{p} \cdot \bar{q}$$

Leis da absorção

- Equivalências notáveis

$$\begin{array}{c} \hline p + (p \cdot q) = p \\ p \cdot (p + q) = p \\ \hline (p \cdot q) + (\bar{p} \cdot q) = q \\ (p + q) \cdot (\bar{p} + q) = q \\ \hline \end{array}$$

OBS: Note que trata-se de leis intuitivas: no primeiro caso, para que o lado esquerdo seja verdade, p é obrigatoriamente verdade. No segundo caso, é como se cancelássemos os complementares.

- Para verificar a validade de propriedades de um operador lógico existem três opções:
  - Via tabelas-verdade (se forem idênticas)
  - Através de manipulação algébrica (simplificações)
  - Diagramas de Venn (auxilia na checagem do resultado)

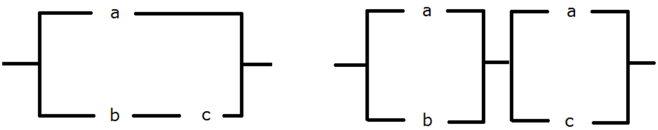
Leis da Absorção (simples)

$p + (p \cdot q)$	$=$	$(p \cdot 1) + (p \cdot q)$	Identidade (multiplica por 1)
	$=$	$p \cdot (1 + q)$	Distributiva (evidência)
	$=$	$p \cdot 1$	Dominação
	$=$	p	
$p \cdot (p + q)$	$=$	$(p + 0) \cdot (p + q)$	Identidade (soma 0)
	$=$	$p + (0 \cdot q)$	Distributiva (evidência)
	$=$	$p + 0$	Dominação
	$\equiv$	p	

Leis da absorção (composta)

$$
\begin{array}{ccc}
\hline
(p \cdot q) + (\bar{p} \cdot q) & = & (p + (\bar{p} \cdot q)) \cdot (q + (\bar{p} \cdot q)) \\
& = & ((p + \bar{p}) \cdot (p + q)) \cdot ((q + \bar{p}) \cdot (q + q)) \\
& = & (1 \cdot (p + q)) \cdot (q \cdot (q + \bar{p})) \\
& = & (p + q) \cdot q \\
& = & q \\
\hline\hline
(p + q) \cdot (\bar{p} + q) & = & (p \cdot (\bar{p} + q)) + (q \cdot (\bar{p} + q) \\
& = & ((p \cdot \bar{p}) + (p \cdot q)) + ((q \cdot \bar{p}) + (q \cdot q)) \\
& = & (0 + (p \cdot q)) + ((q \cdot \bar{p}) + q) \\
& \equiv & (p \cdot q) + q \\
& \equiv & q \\
\hline
\end{array}
$$

- Notação padrão para expressões da lógica proposicional
- Representação de uma expressão como circuito (pois usa apenas conjunção e disjunção, ou seja, série ou paralelo)
- Qualquer expressão da lógica proposicional pode ser representada em duas formas normais
    - Forma Normal Conjuntiva (FNC): E's de OU's (dominante é a conjunção)
    - Forma Normal Disjuntiva (FND): OU's de E's (dominante é a disjunção)



a + b . c = (a + b) . (a + c)

Forma Normal Conjuntiva

Dizemos que uma fórmula proposicional P está na Forma Normal Conjuntiva (FNC) quando P for uma conjunção $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, em que cada p_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma *cláusula*, ou seja, é uma disjunção de átomos ou um átomo. Podemos dizer, então, que uma fórmula P está na FNC se e somente se:

a. contém como conectivos lógicos apenas conjunções, disjunções e negações

b. negações operam apenas sobre átomos, isto é, não tem alcance sobre $\cdot$ e $+$

c. não apresenta operadores de negação sucessivos (dupla negação)

d. $+$ não tem alcance sobre $\cdot$, ou seja, não há expressões como $p + (q \cdot r)$

Se Q é uma fórmula proposicional na forma normal conjuntiva equivalente a P, então Q é referenciada como $FNC(P)$.

Tabela: Procedimento para obtenção da FNC via tabela-verdade.

1. Construir a tabela-verdade da proposição P

2. Procurar na tabela-verdade as linhas que avaliam P como F

3. Para cada uma dessas linhas, constrói-se a disjunção como segue:
   a) Para cada átomo presente na fórmula proposicional, se o valor lógico do átomo é V, toma-se $\bar{p}$, e se for F, toma-se p

4. Determinar a conjunção das disjunções obtidas para cada linha F da tabela-verdade de P

5. Se a proposição P é uma tautologia (não há linha F na tabela-verdade), determina-se que $FNC(P) = p + \bar{p}$, na qual p é uma fórmula atômica

Exemplo: Obtenha a *FNC* de $P = (\bar{p} + q) \to r$.

Construindo a tabela-verdade de P, temos:

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{p} + q$	$(\bar{p} + q) \to r$	
V	V	V	F	V	V	
V	V	F	F	V	F	$\Leftarrow$
V	F	V	F	F	V	
V	F	F	F	F	V	
F	V	V	V	V	V	
F	V	F	V	V	F	$\Leftarrow$
F	F	V	V	V	V	
F	F	F	V	V	F	$\Leftarrow$

$$FNC(P) = (\bar{p} + \bar{q} + r) \cdot (p + \bar{q} + r) \cdot (p + q + r)$$

Forma Normal Disjuntiva

Dizemos que uma fórmula proposicional P está na Forma Normal Disjuntiva (FND) quando P for uma disjunção $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$, em que cada p_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma conjunção de átomos ou um átomo. Podemos dizer, então, que uma fórmula P está na FND se e somente se:

a. contém como conectivos lógicos apenas conjunções, disjunções e negações

b. negações operam apenas sobre átomos, isto é, não tem alcance sobre $\cdot$ e $+$

c. não apresenta operadores de negação sucessivos (dupla negação)

d. $\cdot$ não tem alcance sobre $+$, ou seja, não há expressões como $p \cdot (q + r)$

Se Q é uma fórmula proposicional na forma normal disjuntiva equivalente a P, então, Q é referenciada como $FND(P)$.

Tabela: Procedimento para obtenção da FND via tabela-verdade.

1. Construir a tabela-verdade da proposição P

2. Procurar na tabela-verdade as linhas que avaliam P como V

3. Para cada uma dessas linhas, constrói-se a conjunção como segue:
 a) Para cada átomo presente na fórmula proposicional, se o valor lógico do átomo é V, toma-se p, e se for F, toma-se $\bar{p}$

4. Determinar a disjunção das conjunções obtidas para cada linha V da tabela verdade de P

5. Se a proposição P é uma contradição (não há linha V na tabela-verdade), determina-se que $FND(P) = p \cdot \bar{p}$, na qual p é uma fórmula atômica

Exemplo: Obtenha *FND* de $P = ((q + r) \to p) \cdot ((p + r) \to q)$.

Construindo a tabela-verdade de P, temos:

p	q	r	$(q + r)$	$(p + r)$	$(q + r) \to p$	$(p + r) \to q$	P	
V	V	V	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	V	F	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	F	V	V	V	V	F	F	
V	F	F	F	V	V	F	F	
F	V	V	V	V	F	V	F	
F	V	F	V	F	F	V	F	
F	F	V	V	V	F	F	F	
F	F	F	F	F	V	V	V	$\Leftarrow$

$$FND(P) = (p \cdot q \cdot r) + (p \cdot q \cdot \bar{r}) + (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})$$

Obtenção algébrica da FNC

Tabela: Procedimento para obtenção da FNC via álgebra proposicional.

Para a obtenção da forma normal conjuntiva de uma fórmula P, os seguintes passos devem ser seguidos, quando passíveis de aplicação: 1. Utilizar repetidamente as equivalências a seguir para eliminação dos conectivos lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ $p \rightarrow q = \bar{p} + q$ $\quad\quad$ $p \leftrightarrow q = (\bar{p} + q) \cdot (\bar{q} + p)$ 2. a) Utilizar repetidamente a Lei da dupla negação para a eliminação de negações múltiplas: $\bar{\bar{p}} = p$ b) Utilizar repetidamente as Leis de De Morgan para a redução do escopo da negação: $\overline{(p \cdot q)} = \bar{p} + \bar{q}$ $\quad\quad$ $\overline{(p + q)} = \bar{p} \cdot \bar{q}$ 3. Quando a expressão obtida não tiver subfórmulas compostas negadas, as duas leis a seguir são utilizadas para reduzir o escopo do operador + (distributiva): $p + (q \cdot r) = (p + q) \cdot (p + r)$ $\quad\quad$ $(p \cdot q) + r = (p + r) \cdot (q + r)$

Exemplo: obter a FNC da proposição lógica $\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$ utilizando a álgebra proposicional.
Solução:

$$
\begin{array}{rcl|c}
\overline{((p+\bar{q})\cdot \bar{r})} & = & \overline{(p+\bar{q})}+\bar{\bar{r}} & \text{De Morgan} \\
 & = & \overline{(p+\bar{q})}+r & \text{Dupla negação} \\
 & = & (\bar{p}\cdot \bar{\bar{q}})+r & \text{De Morgan} \\
 & = & (\bar{p}\cdot q)+r & \text{Dupla negação} \\
 & = & (\bar{p}+r)\cdot(q+r) & \text{Distributiva}
\end{array}
$$

Equivalência entre abordagens

Exemplo: obter a FNC da expressão $P = (\neg p \vee q) \rightarrow r$ utilizando tanto a regra da tabela-verdade quanto a sequência de regras da álgebra proposicional. Mostre a equivalência entre P e $FNC(P)$, bem como entre os resultados obtidos por ambos os métodos.
Solução: De exemplos anteriores, sabemos que $FNC(P) = Q \cdot R \cdot S$, com $Q = (\neg p \vee \neg q \vee r)$, $R = (p \vee \neg q \vee r)$ e $S = (p \vee q \vee r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	P	Q	R	S	$(Q \wedge R \wedge S)$	$P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S)$
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V

$(P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S))$ é uma tautologia, o que significa que $P \equiv (Q \wedge R \wedge S)$

A determinação da FNC de P através das regras da álgebra proposicional pode ser realizada de acordo com a seguinte sequência de passos:

$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	$\equiv$	$\neg(\neg p \vee q) \vee r$	Equivalência da implicação
	$\equiv$	$(\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee r$	De Morgan
	$\equiv$	$(p \wedge \neg q) \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	Distributiva

Para mostrar que a expressão derivada é equivalente à anterior, basta verificar que a proposição $T = (Q \wedge R \wedge S) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$ é uma tautologia.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee r$	$\neg q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	$(Q \wedge R \wedge S)$	T
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	F	V

Tabela: Procedimento para obtenção da FND via álgebra proposicional.

Para a obtenção da forma normal disjuntiva de uma fórmula P, os seguintes passos devem ser seguidos, quando passíveis de aplicação:

1. Utilizar repetidamente as equivalências a seguir para eliminação dos conectivos lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

$p \rightarrow q = \bar{p} + q$ $\qquad$ $p \leftrightarrow q = (\bar{p} + q) \cdot (\bar{q} + p)$

2. a) Utilizar repetidamente a Lei da dupla negação para a eliminação de negações múltiplas:

$\bar{\bar{p}} = p$

b) Utilizar repetidamente as Leis de De Morgan para a redução do escopo da negação:

$\overline{(p \cdot q)} = \bar{p} + \bar{q}$ $\qquad$ $\overline{(p + q)} = \bar{p} \cdot \bar{q}$

3. Quando a expressão obtida não tiver subfórmulas compostas negadas, as duas leis a seguir são utilizadas para reduzir o escopo do operador $\cdot$ (distributiva):

$p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r)$ $\qquad$ $(p + q) \cdot r = (p \cdot r) + (q \cdot r)$

Exemplos

Obter a FNC e FND da proposição lógica $(p \cdot q) + (r \cdot (s + t))$ utilizando álgebra proposicional.

- FNC (Operador E dominante)

$$
\begin{array}{rcl}
(p \cdot q) + (r \cdot (s + t)) & = & (p + (r \cdot (s + t))) \cdot (q + (r \cdot (s + t))) \\
& = & (p + r) \cdot (p + s + t) \cdot (q + r) \cdot (q + s + t)
\end{array}
$$

- FND (Operador OU dominante)

$$
\begin{array}{rcl}
(p \cdot q) + (r \cdot (s + t)) & = & (p \cdot q) + ((r \cdot s) + (r \cdot t)) \\
& = & (p \cdot q) + (r \cdot s) + (r \cdot t)
\end{array}
$$

a) Obter a FND da proposição $(p + q) \cdot (r + s)$

Note que, neste caso, a expressão dada se encontra na FNC.

$(p + q) \cdot (r + s) = (p \cdot (r + s)) + (q \cdot (r + s))$

Distribuindo novamente os operadores $\cdot$ internos, temos:

$(p \cdot (r + s)) + (q \cdot (r + s)) = ((p \cdot r) + (p \cdot s)) + ((q \cdot r) + (q \cdot s))$

A fórmula resultante já está na FND. Basta remover os parêntesis mais externos para evidenciar a notação.

b) Obter a FNC da proposição $(p \cdot q) + (r \cdot s)$

Agora, temos como ponto de partida uma expressão na FND (dual da proposição anterior). Distribuindo o operador $+$, temos:

$$(p \cdot q) + (r \cdot s) = (p + (r \cdot s)) \cdot (q + (r \cdot s))$$

Distribuindo novamente os operadores $+$ internos, temos:

$$(p + (r \cdot s)) \cdot (q + (r \cdot s)) = ((p + r) \cdot (p + s)) \cdot ((q + r) \cdot (q + s))$$

c) Obter a FNC e a FND da proposição $(p \cdot q) + (r + s)$

Note que, neste caso, a proposição inicial já se encontra na FND, bastando remover os parêntesis em torno de $r + s$ para evidenciar tal fato. Para escrevermos a proposição na FNC, primeiramente devemos utilizar as Leis associativa e comutativa:

$$((p \cdot q) + (r + s)) = (r + (p \cdot q)) + s$$

Aplicando a distributiva no $+$ mais interno e, em seguida, a Lei comutativa, temos:

$$(r + (p \cdot q)) + s = s + ((r + p) \cdot (r + q))$$

Aplicando a distributiva no $+$ mais externo e a Lei associativa, temos finalmente:

$$s + ((r + p) \cdot (r + q)) = (s + (r + p)) \cdot (s + (r + q))$$

Realiza consultas online para checagem de tabelas-verdade, FNC, FND, diagrama de Venn e outras representações de uma expressão lógica qualquer.

`http://www.wolframalpha.com`