Semana 8

Funções racionais. Aplicações da integral definida.

8.1 Integração de funções racionais

Nesta seção estudaremos o cálculo de integrais $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em x. Tais funções $p(x)/q(x)$ são chamadas *funções racionais*.

Quando o grau de $p(x)$ é maior que, ou igual ao grau de $q(x)$, devemos primeiramente dividir $p(x)$ por $q(x)$,

$$\begin{array}{r|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

obtendo quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$, de forma que

$$p(x) = q(x)Q(x) + R(x)$$

sendo $R(x) = 0$ ou um polinômio de grau menor que o grau do polinômio divisor $q(x)$.

Neste caso,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)Q(x) + R(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$$

e então $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{q(x)}\,dx$.

Por exemplo, suponhamos que queremos calcular

$$I = \int \frac{2x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx$$

Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, devemos primeiramente proceder à divisão de polinômios abaixo, na qual obteremos $Q(x) = 2x + 1$ e $R(x) = 2x - 1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +x^3 & -6x^2 & +3x & +1 & x^3 - 3x + 2 \\
\cline{6-6}
2x^4 & + & -6x^2 & +4x & & 2x + 1 \\
\cline{1-5}
 & x^3 & & -x & +1 & \\
 & x^3 & & -3x & +2 & \\
\cline{2-5}
 & & & 2x & -1 &
\end{array}
$$

Teremos então

$$I = \int \frac{(x^3 - 3x + 2)(2x + 1) + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}\, dx = \int (2x + 1)\, dx + \int \frac{2x - 1}{x^3 - 3x + 2}\, dx$$

Assim sendo, precisamos apenas estudar integrais de funções racionais próprias, isto é, funções racionais em que o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

8.1.1 Decompondo funções racionais em frações parciais

Primeiro caso. O denominador tem raízes reais, distintas entre si.

Suponhamos que na função racional própria $p(x)/q(x)$ o denominador, sendo de grau n, fatora-se em produtos lineares distintos

$$q(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

ou então

$$q(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \cdots (a_n x + b_n)$$

tendo, os n fatores lineares, raízes distintas entre si.

Então aplicamos um resultado da álgebra de frações racionais que diz que, neste caso, existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \cdots (a_n x + b_n)} = \frac{A_1}{a_x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_n x + b_n}$$

sendo os coeficientes das *frações parciais*, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, determinados de maneira única.

Neste caso,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx &= \int \frac{A_1}{a_1 x + b_1}\, dx + \cdots + \frac{A_n}{a_n x + b_n}\, dx \\
&= \frac{A_1}{a_1} \ln |a_1 x + b_1| + \cdots + \frac{A_n}{a_n} \ln |a_n x + b_n| + C
\end{aligned}
$$

Exemplo 8.1 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(2x + 1)}\, dx.$

Solução. Começamos fazendo

$$\frac{x^2-3}{(x^2-4)(2x+1)} = \frac{x^2-3}{(x-2)(x+2)(2x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1}$$

Para calcular os coeficientes A, B e C, somamos as três frações parciais à direita, igualando a soma à função racional original.

$$\frac{x^2-3}{(x^2-4)(2x+1)} = \frac{A(x+2)(2x+1) + B(x-2)(2x+1) + C(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(2x+1)}$$

Observando que os denominadores são iguais, devemos obter A, B e C de modo a termos a igualdade (identidade) de polinômios

$$x^2 - 3 = A(x+2)(2x+1) + B(x-2)(2x+1) + C(x-2)(x+2)$$

Desenvolvendo o produto à direita e comparando os coeficientes dos termos de mesmo grau, chegaremos a três equações lineares nas incógnitas A, B e C. Mas podemos tomar um atalho. Já que os polinômios à esquerda e à direita são iguais, eles tem o mesmo valor para cada x real.

Tomando $x = -2$, obtemos $B(-2-2)(-4+1) = 1$, e então $B = 1/12$.

Tomando $x = 2$, obtemos $A \cdot 20 = 1$, e então $A = 1/20$.

Tomando $x = -1/2$, obtemos $C(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{1}{2}+2) = -15/4$, e então $C = 11/15$.

Repare que os valores de x, estrategicamente escolhidos, são as raízes de $(x^2-4)(2x+1)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3}{(x^2-4)(2x+1)}\,dx &= \int \frac{1/40}{x-2}\,dx + \int \frac{1/12}{x+2}\,dx + \int \frac{11/15}{2x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{40}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\ln|x+2| + \frac{11}{30}\ln|2x+1| + C\end{aligned}$$

Segundo caso. O denominador tem somente raízes reais, mas algumas raízes múltiplas.

No próximo exemplo ilustramos uma decomposição, em frações parciais, de uma função racional própria, cujo denominador tem apenas raízes reais, tendo porém raízes múltiplas.

Exemplo 8.2 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}\,dx.$

Aqui, a raiz -1, do denominador, é de multiplicidade 3. A decomposição, em frações parciais, que funciona neste caso, é da forma

$$\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

na qual teremos A, B, C e D determinados de maneira única.

Como antes, primeiramente somamos as frações parciais:

$$\frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^3 + B(2x-1) + C(2x-1)(x+1) + D(2x-1)(x+1)^2}{(2x-1)(x+1)^3}$$

Tendo à esquerda e à direita o mesmo denominador, teremos:

$$A(x+1)^3 + B(2x-1) + C(2x-1)(x+1) + D(2x-1)(x+1)^2$$

Quando $x = -1$, temos $-3B = 4$, logo $B = -4/3$.

Quando $x = 1/2$, temos $A \cdot \frac{27}{8} = \frac{1}{4}$, logo $A = 2/27$.

Tendo esgotado, para valores de x, as raízes de $(2x-1)(x+1)^3$, tomamos agora valores de x que não produzam, em nossos cálculos, valores numéricos muito grandes.

Tomando $x = 0$, temos $A - B - C - D = 0$, e tomando $x = 1$, temos

$8A + B + 2C + 4D = 1$. Logo,

$$\begin{cases} C + D = & \frac{38}{27} \\ 2C + 4D = & \frac{52}{27} \end{cases}$$

e então $C = \frac{31}{27}$, $D = \frac{7}{27}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(2x-1)(x+1)^3}\,dx &= \int \frac{2/27}{2x-1}\,dx + \int \frac{-4/3}{(x+1)^3}\,dx + \int \frac{31/27}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{7/27}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{27}\ln|2x-1| + \frac{2}{3(x+1)^2} - \frac{31}{27(x+1)} + \frac{7}{27}\ln|x+1| + C \end{aligned}$$

Como um outro exemplo de decomposição em frações parciais, em um caso de raízes reais múltiplas no denominador, se tivermos que calcular

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{(3x-2)^2(5x+1)^3(1-7x)}\,dx$$

devemos primeiramente fazer

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{(3x-2)^2(5x+1)^3(1-7x)} = \frac{A}{(3x-2)^2} + \frac{B}{3x-2} + \frac{C}{(5x+1)^3} + \frac{D}{(5x+1)^2} + \frac{E}{5x+1} + \frac{F}{1-7x}$$

Terceiro caso. O denominador tem raízes complexas não reais.

Um terceiro caso de decomposição, em frações parciais, ocorre quando o denominador tem fatores quadráticos irredutíveis (fatores de grau 2 sem raízes reais), como no exemplo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^2 - x}{(x-2)^3(x^2+x+4)(x^2+1)}$$

em que $x^2 + x + 4$ e $x^2 + 1$ não tem raízes reais.

Neste caso, devemos fazer

$$\frac{3x^2 - x}{(x-2)^2(x^2+x+4)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+4} + \frac{Fx+G}{x^2+1}$$

e proceder tal como antes, na busca dos coeficientes A a G.

Ou seja, na decomposição em frações parciais, para os fatores lineares no denominador seguimos as regras anteriores, mas sobre cada fator quadrático vai um polinômio do primeiro grau $Mx + N$.

E se tivermos, no denominador, potências de fatores quadráticos irredutíveis, tal como na integral $\displaystyle\int \frac{x^5 + 3x - 5}{(x^2 - 3x + 4)^2(x^2+2)^3(3x-5)}\,dx$?

Neste caso, notando que $x^2 + 3x - 5$ e $x^2 + 2$ não tem raízes reais, fazemos

$$\begin{aligned}\frac{x^5 + 3x - 5}{(x^2 - 3x + 4)^2(x^2+2)^3(3x-5)} &= \frac{Ax+B}{(x^2-3x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-3x+4} \\ &\quad + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3} + \frac{Gx+H}{(x^2+2)^2} + \frac{Ix+J}{x^2+2} + \frac{K}{3x-5}\end{aligned}$$

Este é um cálculo deveras longo. Para calcular a integral de fração racional elementar, devemos recorrer às fórmulas de recorrência descritas abaixo.

Observação 8.1 *Na verdade, esse tipo de decomposição funciona mesmo se os fatores quadráticos tem raízes reais, desde que estas não sejam raízes de outros fatores do denominador.*

Por exemplo, no cálculo de $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2}{(x^2-4)(2x+1)}\,dx$*, podemos fazer a decomposição*

$$\frac{x^2 - 3}{(x^2-4)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-4} + \frac{C}{2x+1}$$

e ir à busca dos coeficientes A*,* B *e* C*, como anteriormente.*

Fórmulas de recorrência para $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

Uma boa tábua de integrais nos fornecerá

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^n} = \frac{x}{2k^2(n-1)(x^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2k^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+k^2)^{n-1}}} \tag{8.1}$$

bem como também (aqui λ pode ser uma constante negativa)

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n} = \frac{x}{2\lambda(n-1)(x^2+\lambda)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\lambda(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n-1}}} \tag{8.2}$$

De um modo mais geral, encontramos também, em uma boa tábua de integrais, o seguinte resultado.

Sendo $a > 0$, $n \geq 2$, e $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$,

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{-(2ax+b)}{\Delta\cdot(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{-2a(2n-3)}{\Delta\cdot(n-1)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \tag{8.3}$$

Também encontramos

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx &= \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)+(N-\frac{b}{2a})}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \\ &= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(N - \frac{b}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\end{aligned} \tag{8.4}$$

sendo $\displaystyle\int \frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{du}{u}$ pela substituição $u = ax^2+bx+c$, $du = (2ax+b)\,dx$.

8.2 Problemas

Integração de funções racionais

Calcule as seguintes integrais de funções racionais.

1. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$. *Resposta.* $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C$.

2. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. *Resposta.* $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right| + C$.

3. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. *Resposta.* $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + C$.

4. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. *Resposta.* $\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

5. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. *Resposta.* $\frac{3}{x-8} + \ln\frac{(x-2)^2}{x^2} + C$.

6. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. *Resposta.* $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

7. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. *Resposta.* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

8. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$. *Resposta.* $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x + C$.

Recorrência em integrais de funções racionais

Use as fórmulas de recorrência 8.1 a 8.4 para mostrar que

1. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x^2+4)^3}\,dx = \frac{-2x-16}{32(x^2+4)^2} - \frac{3x}{128(x^2+4)} - \frac{3}{256}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^4}$
$\displaystyle = \frac{2x-4}{12(x^2-4x+5)^3} + \frac{5(2x-4)}{48(x^2-4x+5)^2} + \frac{5(2x-4)}{32(x^2-4x+5)} + \frac{5}{16}\operatorname{arc\,tg}(x-2) + C$

8.3 Aplicações selecionadas da integral definida

8.3.1 Área de uma região plana

Suponhamos que f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Para $x \in [a, b]$, consideramos, apoiada à esquerda no ponto x, uma fatia retangular vertical, de base Δx, e altura $h(x) = f(x) - g(x)$, como na figura 8.1. A área dessa fatia será dada por $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$.

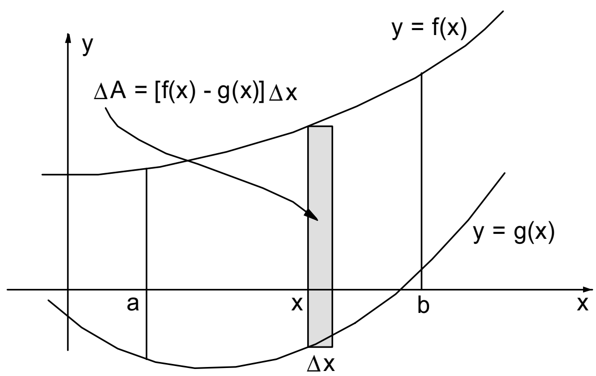

Figura 8.1.

Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em vários sub-intervalos de comprimento Δx, e sobre cada um deles construírmos uma área ΔA, como acima, teremos a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, dada aproximadamente por

$$\sum \Delta A = \sum [f(x) - g(x)]\Delta x$$

onde, pelo bem da simplicidade, estamos omitidindo índices do somatário.

A área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, será dada pelo limite de tais somas integrais, quando $\Delta x \to 0$, ou seja, será dada por

$$\boxed{A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum [f(x) - g(x)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

Sendo $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$, é costume simbolizar $dA = [f(x) - g(x)]dx$. Temos então $A = \int_a^b dA$.

É costume dizer que $dA = [f(x) - g(x)]\, dx$ é um *elemento infinitesimal de área*, de altura $f(x) - g(x)$, sobre um *elemento infinitesimal de comprimento* dx. O símbolo de integração, $\int$, provém da forma de um arcaico S, e tem o significado de "*soma* (veja isto: *ʃoma*) de um número infinito de quantidades infinitesimais" . Assim, se $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)\, dx$ corresponde, grosso modo, a uma soma de "elementos infinitesimais de área", de alturas $f(x)$, e base dx, com x "variando" de a até b.

Exemplo 8.3 *Calcular a área delimitada pelas curvas* $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

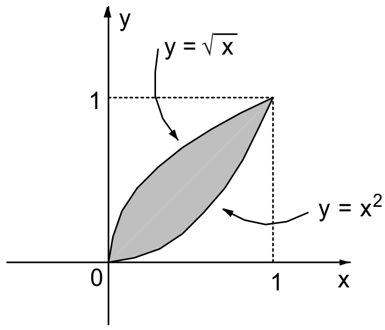

Figura 8.2.

Solução. As curvas dadas se interceptam em $x_0 = 0$ e em $x_1 = 1$ (soluções de $x^2 = \sqrt{x}$). Para $0 \leq x \leq 1$, temos $\sqrt{x} \geq x^2$. Veja figura 8.2.

Assim sendo, a área entre as duas curvas é dada por
$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\, dx = \int_0^1 [x^{1/2} - x^2]\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

8.3.2 Média ou valor médio de uma função

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Em $[a, b]$ tomemos os $n + 1$ pontos igualmente espaçados

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

isto é, tais que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

A média aritmética dos $n+1$ valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, é dada por

$$\mu_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n+1}$$

Definiremos a média (ou valor médio) da função f, no intervalo $[a, b]$, como sendo

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty} \mu_n$$

É possível demonstrar que

$$\boxed{\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}$$

Exemplo 8.4 *Determine o valor médio de $f(x) = x^2$, no intervalo $a \leq x \leq b$.*

Solução. O valor médio de f em $[a, b]$, é dado por

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)\\ &= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}\end{aligned}$$

8.3.3 Volume de um sólido

Na figura 8.3, para cada x, $a \leq x \leq b$, um plano perpendicular a um eixo x corta um sólido (uma batata ?) determinando no sólido uma secção transversal de área $A(x)$. De $x = a$ até $x = b$, são determinadas as áreas de todas todas as secções transversais desse sólido, sendo $b - a$ o seu "comprimento". Qual é o seu volume ?

Suponhamos que o intervalo $[a, b]$ é subdividido em n sub-intervalos, todos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$.

Se x é um ponto dessa subdivisão, determina-se um volume de uma fatia "cilíndrica", de "base" com área $A(x)$ e "altura" Δx,

$$\Delta V = V(x) \cdot \Delta x$$

Uma aproximação do volume do sólido é dado pelo somatório desses vários volumes cilíndricos,

$$V \cong \sum \Delta V = \sum_x A(x) \cdot \Delta x$$

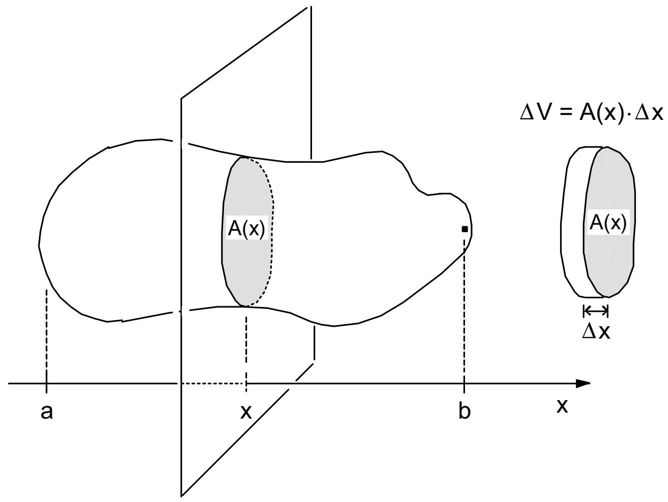

Figura 8.3.

sendo o somatório aqui escrito sem os habituais índices i, para simplificar a notação. Quanto mais finas as fatias "cilíndricas", mais próximo o somatório estará do volume do sólido, sendo seu volume igual a

$$\boxed{V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum A(x) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx}$$

Os cientistas de áreas aplicadas costumam dizer que $dV = A(x) \cdot dx$ é um *elemento infinitesimal de volume*, construído sobre um ponto x, de um "cilindro" de área da base $A(x)$ e altura (espessura) "infinitesimal" dx. Ao "somar" os infinitos elementos de volume, temos $\int_a^b dV = \int_a^b A(x)\, dx$ igual ao volume do sólido.

Exemplo 8.5 *Qual é o volume de um tronco de pirâmide, de altura h, cuja base é um quadrado de lado a e cujo topo é um quadrado de lado b ?*

Solução. Posicionemos um eixo x perpendicular às duas bases. Cada ponto (altura) x, demarcada nesse eixo, corresponde, no tronco de pirâmide, a uma secção transversal quadrada, de tal modo que $x = 0$ corresponde à base quadrada de lado a, e $x = h$ corresponde ao topo quadrado de lado b. Veja figura 8.4.

Procurando uma função afim, $f(x) = mx + n$, tal que $f(0) = a$ e $f(h) = b$. encontramos $f(x) = a + \frac{b-a}{h}x$.

A área da secção transversal, na altura x, é dada por

$$A(x) = \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2$$

O volume do tronco de pirâmide é então

$$V = \int_0^h A(x)\, dx = \int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2 dx$$

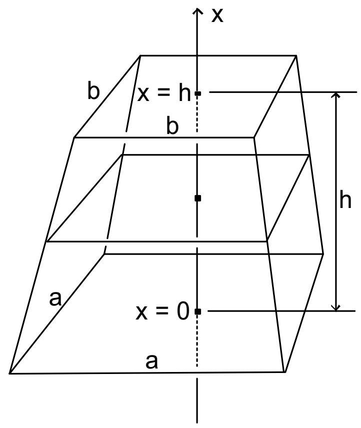

Figura 8.4.

Fazendo $u = a + \frac{b-a}{h}x$, temos $du = \frac{b-a}{h}\,dx$. Além disso, $u = a$ para $x = 0$, e $u = b$ para $x = h$, e então

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \frac{h}{b-a}\int_a^b u^2\,du = \frac{h}{b-a}\cdot\left.\frac{u^3}{3}\right|_a^b = \frac{h}{3(b-a)}(b^3 - a^3) = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Note que o volume do tronco de pirâmide é $1/3$ do produto de sua altura pelo valor médio das áreas das secções transversais (veja exemplo 8.4). Conforme um antigo papiro, esta fórmula já era conhecida pela civilização egípcia do segundo milênio a.C.

Volume de um sólido de revolução

Quando rotacionamos uma região do plano xy em torno do eixo x ou do eixo y, realizando uma volta completa, o lugar geométrico descrito pelos pontos da região é o que chamamos um *sólido de revolução*.

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo x, uma região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Para cada $x \in [a, b]$, um plano perpendicular ao eixo x, cortando este no ponto x, determina no sólido de revolução uma secção transversal. Esta secção transversal é obtida pela revolução completa, em torno do eixo x, do segmento vertical A_xB_x, sendo $A_x = (x, g(x))$ e $B_x = (x, f(x))$. Veja figura 8.5

A área dessa secção transversal é a área de uma região plana compreendida entre dois círculos concêntricos de centro $(x, 0)$, sendo um menor, de raio $g(x)$, e outro maior, de raio $f(x)$. Como a área de um círculo de raio r é πr^2, temos que a área $A(x)$, da secção transversal do sólido de revolução, é dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2$$

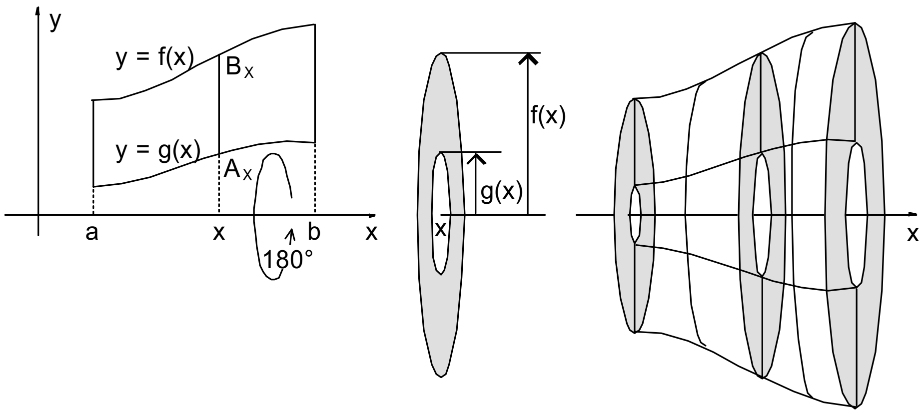

Figura 8.5.

Portanto, o volume do sólido de revolução será

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b (\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2)\,dx}$$

Se a região plana for delimitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x, e pelas retas $x = a$ e $x = b$, teremos $g(x) = 0$, e então

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

Exemplo 8.6 *Calcule o volume de uma esfera de raio R.*

A esfera de raio R pode ser interpretada como o sólido obtido pela revolução da região semi-circular $x^2+y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$, em torno do eixo x. Uma tal região é delimitada pelas curvas $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, e $y = 0$, com $-R \leq x \leq R$. Assim, aqui, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$, sendo então

$$dV = A(x)\,dx = \pi[f(x)]^2\,dx = \pi(R^2 - x^2)\,dx$$

o elemento de volume a integrar.

Portanto,

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

8.3.4 Área de uma superfície de revolução

Consideremos a curva $y = f(x)$, gráfico de uma função f contínua, a qual assumiremos que tem derivada f' também contínua, para $a \leq x \leq b$.

Rotacionando-se essa curva em torno do eixo x, obtemos uma superfície de revolução.

A área da superfície obtida pela revolução da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x, é dada por

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}$$

8.3.5 Centro de gravidade de uma figura plana

Se temos, em um plano ou no espaço n pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tendo massas m_1, m_2, $\ldots$, m_n, respectivamente, o centro de massa $\bar{P}$, do sistema de n pontos, é dado por

$$\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

ou seja, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Consideremos uma região plana, delimitada pelos gráficos das funções contínuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Olhando essa região como uma placa plana, de espessura desprezível, suponhamos que ela possui densidade superficial (massa por unidade de área) δ constante.

Particionando-se o intervalo $[a, b]$, em intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através dos pontos $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, aproximamos essa região por uma reunião de retângulos, como na figura 8.6, sendo cada retângulo de altura $f(x) - g(x)$ e base Δx, sendo aqui x o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

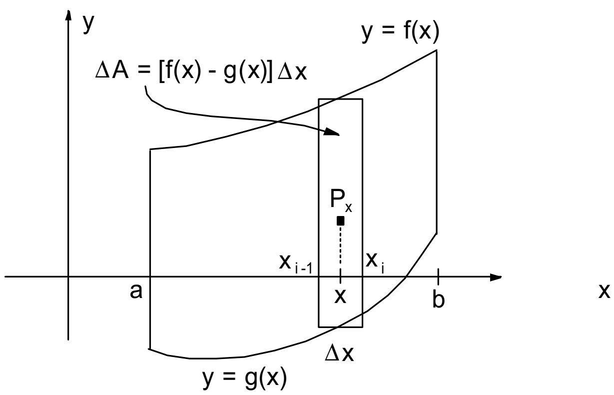

Figura 8.6.

Esse retângulo elementar tem área $\Delta A = (f(x) - g(x))\Delta x$, seu centro de massa é o ponto $P_x = \left(x, \frac{f(x)+g(x)}{2}\right)$, sendo sua massa dada por

$$\Delta m = \delta \cdot \Delta A = \delta(f(x) - g(x))\Delta x$$

O centro de massa da reunião de todos esses retângulos elementares coincide com o centro de massa dos pontos P_x, atribuindo-se a cada ponto a massa Δm do seu retângulo.

Assim, uma aproximação do centro de massa da região plana considerada, o centro de massa dos vários retângulos elementares, é dada por

$$\hat{P} = \frac{\sum \Delta m \cdot P_x}{\sum \Delta m} = \frac{\sum \delta \cdot \Delta A \cdot P_x}{\sum \delta \cdot \Delta A} = \frac{\sum \Delta A \cdot P_x}{\sum \Delta A}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \Delta A \cdot P_x &= \Delta A \cdot \left(x, \frac{f(x)+g(x)}{2}\right) \\ &= (f(x) - g(x))\Delta x \cdot \left(x, \frac{f(x)+g(x)}{2}\right) \\ &= \left(x(f(x) - g(x))\Delta x, (f(x) - g(x)) \cdot \frac{f(x)+g(x)}{2}\Delta x\right) \\ &= \left(x(f(x) - g(x))\Delta x, \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) \cdot \Delta x\right) \end{aligned}$$

Finalmente, o centro de massa $\bar{P}$ da região plana considerada, será dado por

$$\bar{P} = \lim_{\Delta x \to 0} \hat{P} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sum \Delta A \cdot P_x}{\sum \Delta A}$$

Portanto, passando ao limite, nas duas coordenadas de $\hat{P}$, chegamos ao resultado:

O centro de gravidade da região plana delimitada pelas curvas contínuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, é dado por

$$\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$$

sendo

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))\,dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

8.4 Problemas

Áreas de regiões planas

1. Calcule a área delimitada pelas curvas $y^2 = 9x$ e $y = 3x$. *Resposta.* $1/2$.

2. Calcule a área delimitada pelas curvas $xy = a^2$, $x = a$, $y = 2a$ $(a > 0)$ e o eixo x. *Resposta.* $a^2 \ln 2$.

3. Calcule a área delimitada pela curva $y = x^3$, pela reta $y = 8$ e pelo eixo y. *Resposta.* 12.

4. Calcule a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Resposta.* πab.
   Sugestão. A área é delimitada pelos gráficos de funções $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, com $-a \le x \le a$. Ao calcular a integral, faça a substituição $x = a \operatorname{sen} t$. Use a fórmula de redução de potências $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$.

Valor médio de uma função contínua

Determine a média ou valor médio da função dada, no intervalo especificado.

1. $f(x) = x^2$, $a \le x \le b$. *Resposta.* $\bar{f} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $a \le x \le b$ $(0 \le a < b)$. *Resposta.* $\frac{2(a+b+\sqrt{ab})}{3(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.

3. $f(x) = \cos^2 x$, $0 \le x \le \pi/2$. *Resposta.* $1/2$.

Volumes de sólidos

Em cada problema, calcule o volume do sólido obtido por revolução, conforme descrito.

1. A elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ gira em torno do eixo x. *Resposta.* $\frac{1}{3}\pi ab^2$.

2. O arco de senóide $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, gira em torno do eixo x. *Resposta.* $\pi^2/2$.

3. A região delimitada pela parábola $y^2 = 4x$, pela reta $x = 4$ e pelo eixo x, gira em torno do eixo x. *Resposta.* 32π.

Áreas de superfícies de revolução

Em cada problema, calcule a área da superfície obtida por revolução da curva dada em torno do eixo especificado.

1. $y^2 = 4ax$, $0 \le x \le 3a$, rotacionada em torno do eixo x. *Resposta.* $\frac{56}{3}\pi a^2$.

2. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, rotacionada em torno do eixo x.
   Resposta. $4\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

Centro de massa (ou de gravidade) de uma região plana

Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada.

1. Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$. *Resposta.* $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.
2. Área delimitada pela curva $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ e o eixo x. *Resposta.*$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 8/5)$.
3. Área delimitada pela parábola $y^2 = ax$ e pela reta $x = a$. *Resposta.* $(\bar{x}, \bar{y}) = (3a/5, 0)$.