Semana 7

Integrais definidas. Novas técnicas para integrais indefinidas.

7.1 A integral definida

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.

Subdividamos o intervalo $[a, b]$ através de $n + 1$ pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto de pontos $\wp = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ constitui uma *subdivisão* ou *partição* do intervalo $[a, b]$.

Tomemos ainda pontos $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n$ em $[a, b]$, tais que

$$\begin{aligned} c_1 &\in [x_0, x_1] = [a, x_1], \\ c_2 &\in [x_1, x_2], \\ &\vdots \\ c_i &\in [x_{i-1}, x_i], \\ &\vdots \\ c_n &\in [x_{n-1}, x_n]. \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_0 \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_1 \\ &\vdots \\ \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \\ &\vdots \\ \Delta x_n &= x_n - x_{n-1} \end{aligned}$$

E formemos a soma

$$S = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Esta é uma *soma integral* de f, no intervalo $[a, b]$, correspondente à partição $\wp$, e à escolha de pontos intermediários $c_1, \ldots, c_n$.

Note que, quando $f(x) > 0$ em $[a, b]$, a soma integral de f, $S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, é a soma das áreas de n retângulos, sendo o i-ésimo retângulo, para $1 \leq i \leq n$, de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Isto é ilustrado na figura 7.1.

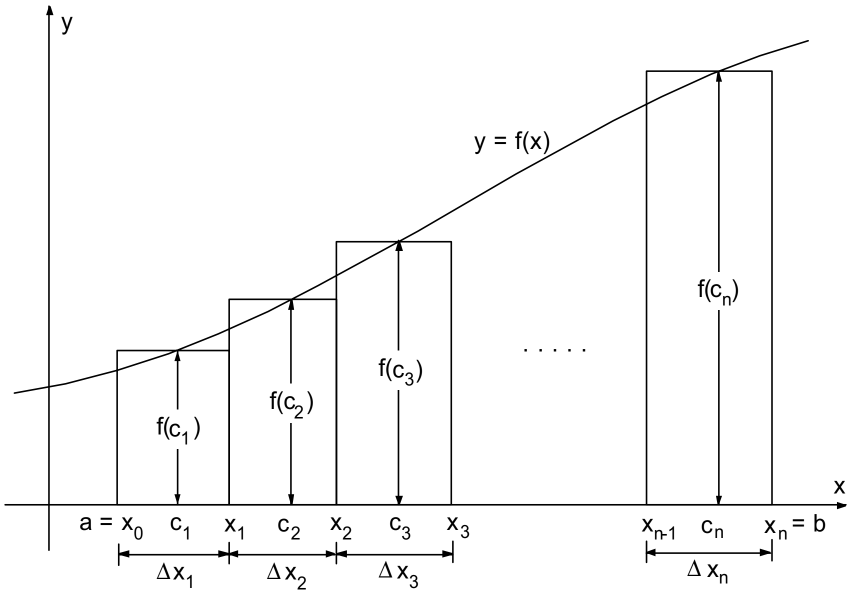


Figura 7.1.

Seja Δ o maior dos números Δx_1, Δx_2, ... , Δx_n. Escrevemos

$$\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} = \max \Delta x_i$$

Tal Δ é também chamado de *norma da partição* $\wp$.

A *integral definida de* f*, de* a *até* b (ou *no intervalo* $[a, b]$) é o número real

$$\gamma = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Observação 7.1 *Se* $f(x) > 0$ *no intervalo* $[a, b]$*, quando* $\max \Delta x_i \to 0$*, o número* k*, de sub-intervalos tende a* ∞*.*

Os retângulos ilustrados na figura 7.1 tornam-se cada vez mais estreitos e numerosos à medida em que $\max \Delta x_i$ *torna-se mais e mais próximo de* 0*.*

Neste caso, $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *definirá a área compreendida entre a curva* $y = f(x)$, *o eixo* x, *e as retas verticais* $x = a$, $x = b$.

Sumarizando,

Se $f(x) > 0$ *em* $[a, b]$, *então* $$\int_a^b f(x)\,dx = (\textit{área sob o gráfico de } f, \textit{ de } x = a \textit{ até } x = b)$$

Observação 7.2 *Por outro lado, se* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in [a, b]$, *teremos* $\int_a^b f(x)\,dx = -A$, *sendo* A *a área (positiva) da região plana compreendida entre o eixo* x, *o gráfico de* f, *e as retas* $x = a$ *e* $x = b$.

Note que, neste caso, feita uma subdivisão $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, *e escolhidos os pontos* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *com* $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *teremos*

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i < 0$$

pois $f(c_i) < 0$ *para cada* i, *e* $\Delta x_i > 0$ *para cada* i.

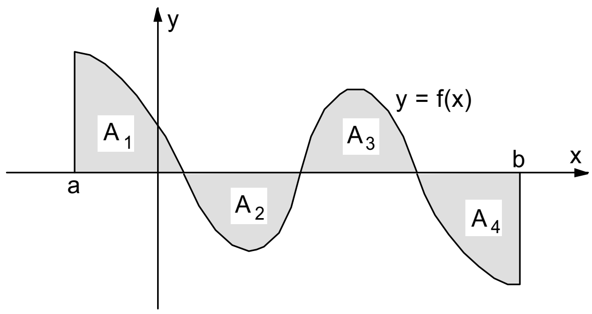


Figura 7.2. $\int_a^b f = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$.

Observação 7.3 *Se o gráfico de* f, *no intervalo* $[a, b]$, *é como o gráfico esboçado na figura 7.2, então, sendo* A_1, A_2, A_3 *e* A_4 *as áreas (positivas) indicadas na figura, teremos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

Observação 7.4 *Pode-se demonstrar que se* f *é contínua em* $[a, b]$, *o limite* $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f$ *não depende das sucessivas subdivisões* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, *e nem das sucessivas escolhas de pontos* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *com* $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *para cada* i.

Assumiremos sem demonstração as seguintes propriedades.

Proposição 7.1 *Se f e g são contínuas em $[a, b]$, então, sendo k uma constante e $a < c < b$,*

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
2. $\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$
3. $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$
4. *se* $f(x) \le g(x)$, *para todo* $x \in [a, b]$, *então* $\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$

Observação 7.5 *Sendo f contínua em $[a, b]$, são adotadas as seguintes convenções (definições).*

(i) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

(ii) $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

Adotadas essas convenções, a proposição 7.1, acima enunciada, continua verdadeira qualquer que seja a ordem dos limites de integração a, b e c, podendo ainda dois deles (ou os três) coincidirem.

7.2 O teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo estabelece o modo pelo qual as integrais definidas podem ser calculadas através de integrais indefinidas.

Teorema 7.1 (Teorema fundamental do cálculo) *Sendo f uma função contínua no intervalo $[a, b]$,*

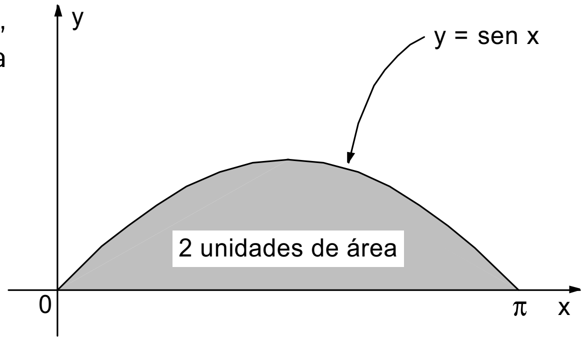
$$\text{se} \quad \int f(x)\, dx = F(x) + C \quad \text{então} \quad \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

É costume denotar $[F(x)]_a^b = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.
Ou seja, sendo $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, temos $\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemplo 7.1 *Calcular a área compreendida entre a curva $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo x, para $0 \le x \le \pi$.*

Solução.
Como $\operatorname{sen} x \geq 0$ quando $0 \leq x \leq \pi$, temos que a área procurada é dada pela integral $A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$.

Temos $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$.



Logo, $A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1+1 = 2$ (unidades de área).

7.2.1 Integração definida, com mudança de variável

Quando fazemos mudança de variável (integração por substituição), no caso de uma integral definida, podemos finalizar os cálculos com a nova variável introduzida, sem necessidade de retornar à variável original. Para tal, ao realizarmos a mudança de variável, trocamos adequadamente os limites de integração.

Suponhamos que $y = f(x)$ é uma função contínua em um intervalo I, com $a, b \in I$, e que $x = \varphi(t)$ é uma função de t derivável em um certo intervalo $J \subset \mathbb{R}$, satisfazendo

1. $f(\varphi(t)) \in I$ quando $t \in J$.
2. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, para certos $\alpha, \beta \in J$;
3. $\varphi'(t)$ é contínua em J;

Sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ em I, temos $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, e como vimos, tomando $x = \varphi(t)$, teremos $dx = \varphi'(t)\, dt$, e

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C$.

Então, Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(\varphi(t))\big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt\end{aligned}$$

Exemplo 7.2 *Calcular* $\int_{-1}^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx$.

Fazendo $u = 1 + x^2$, calculamos $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + C$.

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3} = 0$.

Por outro lado, poderíamos ter trocado os limites de integração, ao realizar a mudança de variável. O resultado seria:

para $x = -1$, $u = 2$; e para $x = 1$, $u = 2$ (!). Então

$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_{2}^{2} \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 0$.

Exemplo 7.3 *Calcular a área delimitada pela circunferência de equação $x^2 + y^2 = a^2$.*

Para calcular a área A desse círculo, basta calcular a área sob o semi-círculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, acima do eixo x, entre os pontos $x = -a$ e $x = a$, ou seja, calcular

$$A/2 = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Faremos a substituição $x = a \operatorname{sen} t$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Para $t = -\pi/2$, $x = -a$; para $t = \pi/2$, $x = a$.

Teremos então $dx = a\cos t\,dt$, $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$ e, como $\cos t \geq 0$ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$.

Logo, $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt$.

Temos $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ e $\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$, logo $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right] - \frac{a^2}{2}\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-\pi)\right] = \frac{\pi a^2}{2}
\end{aligned}$$

E portanto a área do círculo é $A = \pi a^2$.

7.2.2 Integração definida, por partes

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções deriváveis no intervalo $[a, b]$, com as derivadas $u'(x)$ e $v'(x)$ contínuas em $[a, b]$.

Temos $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = uv' + vu'$, e então

$\int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$.

Pelo teorema fundamental do cálculo, $\int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b$. Portanto

$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$.

Em notação abreviada,

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

7.3 Problemas

Calcule as integrais definidas listadas abaixo.

1. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$. *Resposta.* $\pi/2$.
2. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resposta.* $\pi/4$.
3. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$. *Resposta.* $\ln 2$.
4. $\int_1^x \frac{dt}{t}$. *Resposta.* $\ln x$.
5. $\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$. *Resposta.* $1 - \cos x$.
6. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$. *Resposta.* $1/3$.
7. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$. *Resposta.* $\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$. *Sugestão.* Use a identidade $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, faça $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, e $\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg} u$.
8. $\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$. *Resposta.* $3\sqrt{2}/2$.
9. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. *Resposta.* $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. *Sugestão.* Faça $x = \operatorname{tg} u$.
10. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$. *Resposta.* $4 - 2\operatorname{arc\,tg} 2$.
11. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{6-5\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}$. *Resposta.* $\ln \frac{4}{3}$.
12. Calcule a integral $\int_0^t \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $(0 \le t \le a)$, sem usar antiderivadas, interpretando-a como área sob a curva (semi-círculo) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, e acima do eixo x, no intervalo $[0, t]$ (figura 7.3).

   Resposta. $\frac{t}{2}\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{a}$. *Sugestão.* Subdivida a área a ser calculada em duas regiões, como sugere a figura.

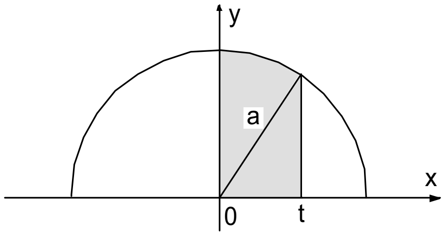


Figura 7.3.

7.4 Completando quadrados em integrais indefinidas

Da nossa tabela ampliada de integrais imediatas, tabela 6.1, página 95, temos as integrais da tabela 7.1 abaixo.

Tabela 7.1. ($a > 0,\ \lambda \neq 0$)

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}| + C$$

Voltaremos nossa atenção agora ao cálculo das integrais

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad I_4 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

nas quais, a, b, c, A e B são números reais, e $a \neq 0$.

Veremos que, para calcular cada uma das integrais I_1, I_2, I_3, e I_4, tudo (ou quase tudo) que temos a fazer é *completar um quadrado* em ax^2+bx+c, e então usar a pequena tabela de integrais 7.1.

Lembramos que *completar um quadrado em* ax^2+bx+c é escrever este trinômio do segundo grau na forma $a(x+m)^2+n$.

Primeiramente, *colocamos o coeficiente* a *em evidência*:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Completamos então o quadrado em $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}$:

$$x^2 + \beta x + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)$$

Fazemos então, para o cálculo da integral, a substituição

$$u = x + \frac{\beta}{2}, \quad du = dx$$

e teremos

$$x^2 + \beta x + \gamma = u^2 \pm k^2$$
$$ax^2 + bx + c = a(u^2 \pm k^2)$$

Agora, a menos de alguns pequenos ajustes, recairemos em integrais da tabela 7.1.

Exemplo 7.4 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1}$.

Solução. Começamos fazendo

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = 2\left[u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] \end{aligned}$$

sendo $u = x + 3/4$.

Como $du = dx$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1} &= \int \frac{du}{2\left[u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - u^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \ln\left|\frac{\frac{1}{4} + u}{\frac{1}{4} - u}\right| + C \qquad \text{(tabela 7.1)} \\ &= -\ln\left|\frac{1 + 4u}{1 - 4u}\right| + C = -\ln\left|\frac{1 + 4x + 3}{1 - (4x + 3)}\right| + C \\ &= -\ln\left|\frac{4x + 4}{4x + 2}\right| + C = -\ln\left|\frac{2x + 2}{2x + 1}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{2x + 1}{2x + 2}\right| + C \end{aligned}$$

Exemplo 7.5 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x - 1}{\sqrt{1 - x - x^2}}dx$.

Solução. Começamos fazendo

$$
\begin{aligned}
1 - x - x^2 = -(x^2 + x - 1) &= -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right] \\
&= -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Sendo, $u = x + 1/2$, $du = dx$, e $x = u - 1/2$,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{1 - x - x^2}}dx &= \int \frac{x-1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}}dx \\
&= \int \frac{u - 3/2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}du \\
&= \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}du - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}du \\
&= I - \frac{1}{2}J
\end{aligned}
$$

sendo $I = \displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2 - u^2}}du$, e $J = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2 - u^2}}du$.

Para o cálculo de I, fazemos $w = (\sqrt{5}/2)^2 - u^2$, e então $dw = -2u\,du$, e temos

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}du &= \int \frac{-\frac{1}{2}dw}{\sqrt{w}} = -\sqrt{w} + C \\
&= -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2} = -\sqrt{1 - x - x^2} + C
\end{aligned}
$$

Por sua vez,

$$
\begin{aligned}
J = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}}du &= \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{\sqrt{5}/2} + C \\
&= \operatorname{arc\,sen}\frac{2u}{\sqrt{5}} + C = \operatorname{arc\,sen}\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx &= I - \frac{1}{2}J \\ &= -\sqrt{1-x-x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C\end{aligned}$$

7.5 Algumas integrais envolvendo funções trigonométricas

7.5.1 Integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, m e n inteiros não negativos

Primeiro caso: m ou n é um inteiro ímpar

Consideremos $J = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$.

Sendo m e n inteiros não negativos, no caso em que o expoente m é ímpar, teremos $m = 2k+1$, e então

$$\begin{aligned}J &= \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$

Agora fazemos $\cos x = t$, e então $dt = -\operatorname{sen} x\, dx$, obtendo

$$J = \int (1-t^2)^k t^n(-dt) = -\int (1-t^2)^k t^n\, dt$$

que é uma integral de um polinômio em t.

Se m é par, mas n é ímpar, transformamos a integral J em uma integral de um polinômio, por um procedimento análogo.

Exemplo 7.6 *Calcular* $J = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x\, dx$.

Solução.

$$\begin{aligned}
J &= \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^4 x \cos x \, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^6 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx \\
&= \int t^6 (1 - t^2)^2 \, dt, \quad \text{sendo } t = \operatorname{sen} x, \; dt = \cos x \, dx.
\end{aligned}$$

Teremos então

$$\begin{aligned}
J &= \int t^6 (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10}) \, dt \\
&= \frac{t^7}{7} - \frac{2t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} - \frac{2 \operatorname{sen}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} + C
\end{aligned}$$

Segundo caso: m e n são ambos pares

Neste caso, abaixamos os graus das potências de funções trigonométricas, mediante as relações

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \tag{7.1}$$

ou seja, fazemos

$$\begin{aligned}
J &= \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^{2\ell} x \, dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k (\cos^2 x)^\ell \, dx \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^\ell dx
\end{aligned}$$

Exemplo 7.7 *Calcular* $I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$.

Solução. $I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$

Fazendo uso das relações trigonométricas 7.1, temos

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\
&= \int \left(\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx
\end{aligned}$$

Calculando separadamente as quatro integrais, temos:

$I_1 = \int dx = x$ (juntaremos adiante todas as constantes em uma só)

$I_2 = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2x$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \cos^2 2x\, dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2}\, dx \qquad (\cos^2 a = \tfrac{1+\cos 2a}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\, 4x = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}\, 4x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \cos^3 2x\, dx \qquad \text{(potência de cosseno, de expoente ímpar!)} \\
&= \int \cos^2 2x \cos 2x\, dx = \int (1 - \mathrm{sen}^2\, 2x) \cos 2x\, dx \\
&= \int (1 - t^2)\cdot \frac{dt}{2} \qquad (t = \mathrm{sen}\, 2x,\ \ dt = 2\cos 2x\, dx, \text{ logo } \cos 2x\, dx = \tfrac{dt}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) = \frac{\mathrm{sen}\, 2x}{2} - \frac{\mathrm{sen}^3\, 2x}{6}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I &= \int \mathrm{sen}^4\, x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{8}(I_1 - I_2 - I_3 + I_4) \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\,\mathrm{sen}\, 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\,\mathrm{sen}\, 4x + \frac{1}{16}\,\mathrm{sen}\, 2x - \frac{1}{48}\,\mathrm{sen}^3\, 2x + C \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\mathrm{sen}\, 4x}{64} - \frac{\mathrm{sen}^3\, 2x}{48} + C
\end{aligned}$$

7.6 Fórmulas de redução (ou de recorrência)

As *fórmulas de redução*, ou *fórmulas de recorrência*, são freqüentemente encontradas em tábuas de integrais.

Exemplo 7.8 *Empregando a fórmula de redução*

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{\mathrm{tg}\, x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\cdot \int \sec^{n-2} x\, dx \tag{7.2}$$

calcule as integrais $\int \sec^3 x\, dx$, $\int \sec^4 x\, dx$, *e* $\int \sec^5 x\, dx$.

Aplicando a fórmula dada, para $n = 3$,

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\,dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \sec^2 x\,dx \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + C\end{aligned}$$

Para $n = 5$, temos

$$\begin{aligned}\int \sec^5 x\,dx = I_5 &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4}I_3 \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2}I_1\right) \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3\operatorname{tg} x \sec x}{8} + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}$$

7.7 Substituições trigonométricas

As *substituições trigonométricas* são substituições empregadas em integrais envolvendo uma das expressões $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, e $\sqrt{x^2 - a^2}$, nas quais a variável x é substituída (correspondentemente) por uma das funções $a \operatorname{sen}\theta$, $a \operatorname{tg}\theta$, e $a \sec\theta$.

Os três procedimentos de substituições trigonométricas, habitualmente usados, são ilustrados geométricamente nas figuras 7.4 e 7.5.

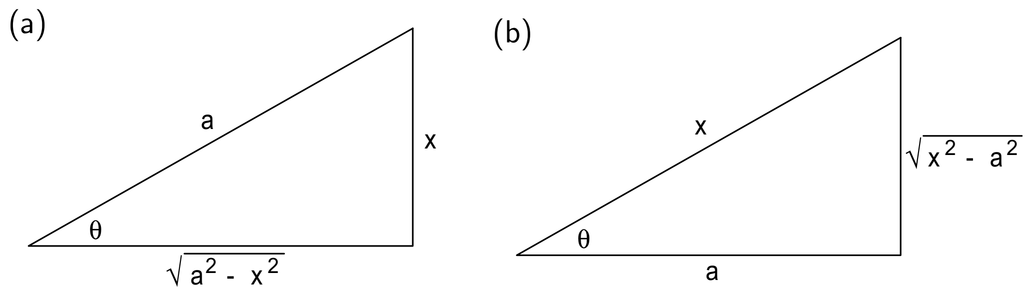


Figura 7.4. Em (a) $\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta\,d\theta$, $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \cos\theta$. Em (b), $\frac{a}{x} = \cos\theta$, ou $\frac{x}{a} = \sec\theta$, $dx = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta$, $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \operatorname{tg}\theta$. Em ambos os casos, a raiz quadrada da diferença de quadrados é um cateto.

Exemplo 7.9 *Calcular* $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

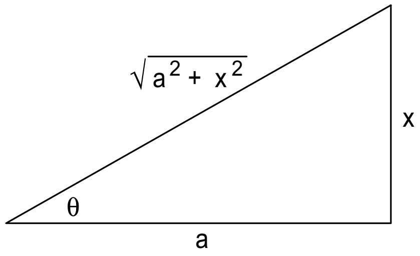


Figura 7.5. A raiz quadrada $\sqrt{a^2+x^2}$ é interpretada geometricamente como sendo a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos x e a. Agora, $\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\theta$, $dx = a\sec^2\theta\,d\theta$, e $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} = \sec\theta$.

Para o cálculo desta integral, usaremos uma substituição trigonométrica, baseada no esquema geométrico da figura 7.4 (a).

Observando as relações trigonométricas da figura 7.4 (a), fazemos

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \cos\theta, \qquad dx = a\cos\theta\,d\theta$$

Temos então

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a^2\cos^2\theta\,d\theta$$

Usando a relação $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$, temos

$$\int a^2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2}{4}\operatorname{sen}2\theta + C$$

Agora substituímos

$$\theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}, \qquad \operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$$

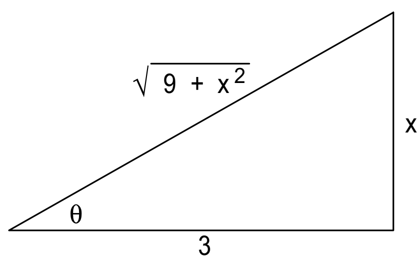
e obtemos

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

No caso de uma integral definida, ao realizar a mudança de variável, podemos também trocar os limites de integração, tal como ilustrado no seguinte exemplo.

Exemplo 7.10 *Calcular* $\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\,dx$.

Para desenvolver a estratégia de substituição trigonométrica, lançamos mão do diagrama ao lado. Teremos
$\frac{x}{3} = \operatorname{tg}\theta$, $\quad dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$, e
$\frac{3}{\sqrt{9+x^2}} = \cos\theta$, ou seja,
$\sqrt{9+x^2} = 3\sec\theta$.



Sendo $x = 3\,\mathrm{tg}\,\theta$, tomamos θ assumindo valores de 0 a $\pi/4$, e teremos x percorrendo os valores de 0 a 3.

Teremos então $\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} 3\sec\theta \cdot 3\sec^2\theta\,d\theta = 9\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta$.

Conforme vimos no exemplo 7.8,

$$\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\,dx = 9\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta &= 9\left[\frac{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\,\theta|\right]_0^{\pi/4}\\
&= 9\left[\frac{\sec(\pi/4)\,\mathrm{tg}(\pi/4)}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec(\pi/4)+\mathrm{tg}(\pi/4)|\right]\\
&\quad - 9\left[\frac{\sec 0\,\mathrm{tg}\,0}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec 0 + \mathrm{tg}\,0|\right]\\
&= 9\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right] - 9\left[0 + \frac{1}{2}\ln 1\right]\\
&= \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2}\ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

7.8 Problemas

Integrais que requerem completamento de quadrados

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+1}{2} + C$.
2. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$. *Resposta.* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$.
3. $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}\,dx$. *Resposta.* $\ln|3x^2-7x+11| + C$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}}$. *Resposta.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+\sqrt{12(3x^2+5x)}| + C$.
6. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. *Resposta.* $2\sqrt{ax^2+bx+c} + C$.

Integrais envolvendo funções trigonométricas

1. $\int \mathrm{sen}^3 x\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$.
2. $\int \mathrm{sen}^5 x\,dx$. *Resposta.* $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$.

3. $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\, dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$.

4. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx$. *Resposta.* $\operatorname{cosec} x - \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C$.

   Sugestão. Use o mesmo procedimento descrito à pagina 112, para o cálculo da integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, quando m ou n é um expoente ímpar.

5. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{3}{8}x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$.

6. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$.

   Sugestão. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)$.

7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\, dx$. *Resposta.* $\frac{3}{5}\cos^{5/3} x + 3\cos^{-1/3} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{4 - 5\operatorname{sen} x}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}\right| + C$.

   Sugestão. Use a identidade $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ (temos também $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$).

   Faça $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$, com $\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg} u$ e então $dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$.

Fórmulas de redução

1. Usando a fórmula de recorrência

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

   mostre que

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{3}{8}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{3x}{8} + C$$

$$\int \cos^7 x\, dx = \frac{1}{7}\operatorname{sen} x \cos^6 x + \frac{6}{35}\operatorname{sen} x \cos^4 x + \frac{8}{35}\operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{16}{35}\operatorname{sen} x + C$$

2. Usando a fórmula de recorrência

$$\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$$

   calcule

   (a) $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$.

   (b) $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + C$

Substituições trigonométricas

Calcule as seguintes integrais, através de substituições trigonométricas.

1. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. *Resposta.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$.
2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Resposta.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.
3. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. *Resposta.* $\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. *Resposta.* $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$.