AT4-1 - Unidade 4

Integrais[1]

Cálculo Diferencial e Integral

Bacharelado em Sistemas de Informação

UAB - UFSCar

[1]Versão com 14 páginas

Tópicos de AT4-1

Tópicos de AT4-1

Relação entre funções com derivadas iguais

- As funções constantes são exemplos de funções com derivadas iguais. Pois as funções constantes tem derivada zero.
  De fato, se $c \in \mathbb{R}$ e $f(x) = c$ para todo x no domínio de f, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x+\Delta x)}^{c} - \overbrace{f(x)}^{c}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

  aqui $x + \Delta x$ está no domínio de f.
- Em geral, não é verdade que toda função com derivada zero em todo os pontos do domínio é constante. A seguinte função contínua

$$g(x) = \begin{cases} 100, & \text{se } x > 0 \\ -100, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

  tem derivada zero nos pontos do domínio de g e g não é constate.

Usaremos o seguinte teorema:

Teorema do Valor Médio[2]

Se f for uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $]a, b[$,
então existirá pelo menos um número real x_0 com $a < x_0 < b$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

no próximo Slide

[2] Atividade extra para postar no fórum da Unidade 4.
Procure na bibliografia ou na Internet aplicações ou consequências do Teorema do Valor Médio e apresente algum exemplo.

Duas aplicação do Teorema do Valor Médio

1. Toda função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que tem derivada zero no intervalo $]a, b[$ é constante no intervalo fechado $[a, b]$.
2. Se duas funções continuas tiverem derivadas iguais num intervalo, então, neste intervalo, elas deferirão por uma constante.

Exemplo: a função $f(x) = x^5 - 3x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 5x^4 - 6x$

Determine uma função g tais que $g'(x) = f'(x)$ para todo $x \in D(f)$.
Solução. De acordo com o item 2, acima basta considerar a função $g(x) = f(x) + C$, para cada x no domínio de f, onde C é qualquer número real arbitrário. Neste caso temos que

$$g'(x) = (f(x) + C)' = f'(x) + \underbrace{(C)'}_{0} = f'(x).$$

$$g(x) - f(x) = C = Constante \ \forall x \in D(f)$$

Porque introduzir as funções primitivas?

Porque quando existem permitem resolver o problema de encontrar uma função F cuja derivada F' é uma função conhecida f.

Definição

Uma função F sé denominada uma primitiva (ou *antiderivada*) de uma função f sobre um intervalo I quando $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Exemplos determine uma primitiva mais geral das seguintes funções.

1. Se $f(x) = \cos(x) \;\Rightarrow\; F(x) = \text{sen }(x) + C$ é a primitiva mais geral.
   Pois $F'(x) = (\text{sen }(x) + C)' = (\text{sen } x)' + (C)' = \cos x + 0 = \cos x$
2. Se $f(x) = x^n,\; n \neq 1 \;\Rightarrow\; F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ é a solução.
   Pois $F'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' + 0 = \dfrac{(n \cancel{+1})x^n}{(n \cancel{+1})} + 0 = x^n$

Atividade online no fórum da Unidade 4

1. Dada a função $f(x) = x^{a+2} - (a+5)\cos x$ determine a função F que é uma primitiva de f que satisfaz a condição de $F(0) = a$, onde a é o número de seu R.A.
2. Procure na bibliografia ou na internet tabelas de fórmulas de antiderivadas ou primitivas e poste no Fórum da Unidade 4.
3. Comente sobre a existência de funções que não possuem primitivas ou antiderivadas ou apresente exemplos de tais funções no fórum.
4. A função valor absoluto $f(x) = |x|$ tem primitiva? Justifique sua resposta.
5. Se F é uma função primitiva de f num intervalo I, verifique que a função $G(x) = F(x) + C$ é também uma primitiva de f em I desde que C seja uma constante em $\mathbb{R}$.

Tópicos de AT4-1

Definição

A família de todas as primitivas (ou antiderivadas) da forma $F(x) + C$ de uma função f num intervalo I será chamada a integral indefinida da função f, isto é

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{notação}} = F(x) + C$$

leia-se a integral indefinida de f de x é igual F de x mais a constante C. Ou seja, significa que

$$f(x) = (F(x) + C)' = F'(x)$$

Exemplos

- Calcule $\int x^a \, dx$, onde $a \neq 1$.

$$\left[\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C\right]' = \left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right]' + (C)' = \frac{a+1}{a+1}x^a + 0 = x^a$$

$$\Rightarrow \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

- Verifique que

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C, \; x > 0.$$

Com efeito,

$$[\ln x + C]' = [\ln x]' + (C)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Tabela básica de Integrais indefinidas

$\int k\, du = ku + C$, (k constante)	$\int du = u + C$
$\int u^a\, du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C$, $(a \neq -1)$	$\int \frac{1}{u}\, du = \ln\|u\| + C$
$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$	$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$
$\int e^u\, du = e^u + C$	$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$

Propriedades de integrais indefinidas

Sejam f e g duas funções para as quais existem $\int f(x)dx$ e $\int g(x)\,dx$. Então vale:

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$, para qualquer k constante em $\mathbb{R}$.
2. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Exemplo calcule $\int(\sqrt[3]{x} + \cos 3x)\,dx$

1. Use a propriedade 2, para obter
   $\int(\sqrt[3]{x} + \cos 3x)\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int \cos 3x\,dx$
2. logo use as fórmula da tabela das integrais básicas, assim

$$\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C_1 \quad \text{e} \quad \int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\text{sen}3x + C_2$$

3. faça $C = C_1 + C_2$, para obter que

$$\int(\sqrt[3]{x} + \cos 3x)\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{3}\text{sen}3x + C.$$

Sempre confira seus resultados

No slide anterior obtivemos que

$$\int (\sqrt[3]{x} + \cos 3x)\, dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{3}\text{sen}3x + C.$$

Vejamos que o cálculo da integral indefinida está correto, para isto, o primeiro passo a ser feito é derivar a solução

$$\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{3}\text{sen}3x + C\right]' = \underbrace{\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]'}_{\underbrace{\frac{3}{4}\left[x^{\frac{4}{3}}\right]'}_{\underbrace{\frac{3}{4}\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}}_{\sqrt[3]{x}}}} + \underbrace{\left[\frac{1}{3}\text{sen }3x\right]'}_{\underbrace{\frac{1}{3}\cos 3x \underbrace{[3x]'}_{3}}_{\cos 3x}} + \underbrace{[C]'}_{0}.$$

Portanto, verificar que uma integral indefinida foi calculada corretamente terá que fazer uma conta como a que foi feita acima.